Araştırma Makalesi/ Research Article

GAZİ
EĞİTİM BİLİMLERİ DERGİSİ

GAZİ
JOURNAL OF EDUCATION SCIENCES

Üstün Yetenekli Öğrencilerin Geometri Öğrenme Alanında Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi

Birnaz KANBUR TEKEREK[a], Ziya ARGÜN[b]

Yükleme: 08.05.2022; Kabul: 03.08.2022; Yayınlanma: 03.08.2022

DOI: 10.30855/gjes.2022.08.02.008

Anahtar Kelimeler:
Akıl yürütme,
Üstün yetenekli öğrenciler,
Geometri

Keywords:
Reasoning,
Gifted students,
Geometry

a Gazi Üniversitesi,
Gazi Eğitim Fakültesi,
Ankara, Türkiye
Orcid: 0000-0001-5263-1339
brnz617@gmail.com
Sorumlu Yazar

b Gazi Üniversitesi,
Gazi Eğitim Fakültesi,
Ankara, Türkiye
Orcid: 0000-0001-8101-7215
ziya@gazi.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmanın amacı üstün yetenekli öğrencilerin geometri öğrenme alanında akıl yürütme becerilerinin incelenmesidir. Bu bağlamda ispat yapmayı ve ilişki kurmayı gerektiren, “ne?” ve “nasıl?” soru köklü soruların üstün yetenekli öğrencilerin akıl yürütme becerilerini ne şekilde ortaya çıkardıkları araştırılmıştır. Çalışma; bir durumu ayrıntılı olarak ele almayı ve yorumlamayı amaçladığından araştırmada nitel araştırma desenlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Soru türleri açısından yaklaşıldığı için durum çalışması çeşitlerinden çoklu durum çalışması benimsenmiştir. Araştırmaya üstün yetenekli tanısı konmuş 3 öğrenci gönüllü olarak katılmıştır. Katılımcılar ile yarı yapılandırılmış bireysel görüşmeler yapılmış ve kamera kaydı altına alınmıştır. Bu görüşmelerde geometri öğrenme alanına ait 27 soru tartışılmıştır. Toplanan veriler literatürde yapılan akıl yürütme tanımlarından elde edilen akıl yürütme göstergeleri aracılığıyla betimsel ve içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Betimsel analiz sonucunda öğrencilerin akıl yürütme göstergeleri frekans tabloları oluşturulmuştur. Araştırmanın bulgularında öğrencilerin açık uçlu olmayan soru kökü “ne?” ile biten sorularda diğer soru türlerine göre akıl yürütme becerilerini daha iyi ortaya çıkardıkları, “nasıl?” soru köklü, ispat yapmayı ve ilişki kurmayı gerektiren sorularda zorlandıkları görülmüştür. Bunun nedeni olarak öğrencilerin ifadelerine göre öğrencileri zorlayan bu tür sorularla daha önce pek karşılaşmamış olmaları gösterilebilir. Bu nedenle öğrencilerin düşünme potansiyellerini daha iyi ortaya çıkaracakları, ispat yapmayı ve ilişki kurmayı gerektiren sorularla karşılaşacakları öğrenme ortamlarında bulunmaları önerilebilir.

Kanbur Tekerek, B., & Argün, Z. (2022). Üstün yetenekli öğrencilerin geometri öğrenme alanında akıl yürütme becerilerinin incelenmesi. *Gazi Eğitim Bilimleri Dergisi*, *8*(2), 306-332.
DOI: https://dx.doi.org/10.30855/gjes.2022.08.02.008.

Araştırma Makalesi/ Research Article

GAZİ
EĞİTİM BİLİMLERİ DERGİSİ

GAZİ
JOURNAL OF EDUCATION SCIENCES

Investigation of Reasoning Skills of Gifted Students in Geometry

ABSTRACT

The aim of this study is to investigate of reasoning skills of gifted students in geometry. In this context, “what?” and “how?” rooted questions, proof and relationship required questions was investigated in order to how they revealed reasoning skills. Since the purpose of the study is to examine and interpret a situation in detail, the design of the study is case study which is one of the qualitative research methods. It is adopted multiple case study one of the types of case studies because of question types. The participants are 3 gifted students. 27 questions in geometry are discussed in the sessions. Semi-structured individual interviews were made with the participants and recorded on camera. The collected data were analyzed by descriptive and content analysis method through the reasoning indicators obtained from the reasoning definitions made in the literature. As a result of descriptive analysis, frequency tables of students' reasoning indicators were created. It was founded that the students revealed their reasoning skills better in “what?” rooted questions according to other types of questions. However, they troubled with “how?” rooted questions, proof and relationship requiring questions. The reason of that is that they did not encounter with these types challenged questions very often according to statements of students. For this reason, these students should be given more opportunities in learning environments that will reveal their thinking potential better and compare them with questions that require proof and establishing relationships.

Kanbur Tekerek, B., & Argün, Z. (2022). Üstün yetenekli öğrencilerin geometri öğrenme alanında akıl yürütme becerilerinin incelenmesi. *Gazi Eğitim Bilimleri Dergisi*, *8*(2), 306-332.
DOI: https://dx.doi.org/10.30855/gjes.2022.08.02.008.

GİRİŞ

Matematik eğitimi alanında yapılan çalışmalar, sonuç odaklı olmaktan ziyade sorgulayabilen, neden-sonuç ilişkilerini analiz ederek çıkarımlar yapabilen ve ilişkilendirme becerisi yüksek bireyler yetiştirmenin önem arz ettiğini göstermektedir (Dinamit, 2020). Bu bağlamda ABD, Avustralya, Norveç ve İsveç gibi birçok ülke matematik eğitiminde reformlar yaparak yeni ulusal standartlarını oluşturmuşlar ve uygulamaya koymuşlardır. Önceki öğretim programları ile bu programlar karşılaştırıldığında ortak noktanın "matematik çalışmanın anlamı; matematiksel olarak yeterli olmaktır" şeklinde olduğu görülmektedir (Boesen, Lithner ve Palm, 2018). "Matematiği bilmek", "matematik yapmak" tır anlayışı bu reformların gerçekleştirilmesinde etkili olmuştur (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989).

Türkiye'de ise 2017 yılında yürürlüğe giren Matematik Dersi Öğretim Programında, Türkiye Yeterlikler Çerçevesi kapsamında matematiksel yeterliklere yer verilmeye başlanmıştır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2017). Türkiye Yeterlikler Çerçevesi'nde yer alan matematiksel yetkinlik; günlük hayatta karşılaşılan problemleri çözmek için matematiksel düşünmeyi geliştirme olarak tanımlanmaktadır. Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Örgütü (Organisation for Economic Co-operation and Development) (2019) da matematiksel okuryazarlığın temelinin bir dizi matematiksel yeterlikten oluştuğunu ortaya koymuştur. Türkiye Yeterlikler Çerçevesi'nde ve Ekonomik İşbirliği Kalkınma Örgütü'nde matematiksel yeterliklere önem verilmekte ve bu yeterlikler arasında mantıksal ve uzamsal düşünme becerisinin geliştirilmesi de yer almaktadır (MEB, 2017; OECD, 2019). Matematiksel yeterlikleri ve bileşenlerini tanımlamaya çalışan araştırmalara göre (Lithner, E. Bergqvist, T. Bergqvist, Boesen, Palm ve Palmberg, 2010; Niss, 2015; OECD, 2019) matematiksel akıl yürütme bu yeterliklerden biridir. Matematiksel akıl yürütme; problem ögeleri arasında ilişki kurulması, çıkarım yapılması, verilen gerekçelerin kontrol edilmesi ve problemlerin çözümlerinin doğrulanması (OECD, 2019), matematiksel iddiaların, cevapların ve çözümlerin doğrulanması ve gerekçelendirilmesi, adımlar için argüman zincirlerinin oluşturulması ve bu adımları takip edebilme becerisi (Niss, 2015; Rohana, 2015), seçimlerin ve sonuçların matematiksel argümanlar yoluyla desteklenmesi (Lithner vd., 2010) olarak tanımlanmaktadır. Akıl yürütme ile ilgili literatür incelenmiş, şimdiki çalışmada kullanılmak üzere araştırmacı tarafından aşağıda verilen akıl yürütme göstergeleri oluşturulmuştur (Ball ve Bass, 2003; Battista, 2017; Lithner, 2008; Lithner vd., 2010; Niss, 2015; OECD, 2019; Rohana, 2015):

1. Etkenleri, değişkenleri ve olası bütün durumları göz önüne alarak fikir ileri sürme, fikir oluşturma, fikir üretme
2. Etkenleri, değişkenleri ve olası bütün durumları göz önüne alarak iddia etme
3. Seçim yapma
4. Etkenleri, değişkenleri, var olan veya açığa çıkarılan ögeleri ve olası bütün durumları göz önüne alarak çıkarımda bulunma
5. Doğrulama-yanlışlama
6. Çözümleri, cevapları ve ulaşılan sonuçları gerekçelendirme
7. Açıklamalara veya çözümlere verilen bir gerekçeyi kontrol etme

8. Matematiksel ifadeleri (teoremler, önermeler, iddialar, problem kurmalar, çözümler, ispatlar ve bunlarda kullanılan semboller ile matematiksel kavramların temsiller) birbirlerine bağlayan (mantığa dayalı) düşünme süreci boyunca argüman zincirleri oluşturma;
   a) Adımlar atma,
   b) Atılan adımları izleme,
   c) Atılan adımları değerlendirme

Veri analizinde kullanılan yukarıdaki göstergeler oluşturulurken araştırmacıların akıl yürütmeyi nasıl tanımladıkları incelenmiştir. Tanımlar araştırılırken akıl yürütme kavramının matematik öğretiminde ne kadar önemli olduğu ve eksikliklerin de vurgulandığı fark edilmiştir. Battista (2017), matematiksel akıl yürütmenin matematiksel yeterliklerin temelini oluşturduğunu ve matematik öğretiminde akıl yürütme eksikliğinin matematik öğrenmede başarısızlık getireceğini ifade etmektedir. Öğretim programlarının matematiksel akıl yürütmenin eksik olduğu bir matematik öğretiminin başarısızlık getireceğini vurgulaması da matematiksel akıl yürütmenin gelişmesini sağlamaktadır (Steen, 1999). Matematiksel akıl yürütme matematik yapmak için gerekli bir unsurdur. Ayrıca, ilişkilendirme ve problem çözme gibi diğer süreç becerilerinden de bağımsız değildir. Örneğin; problem çözerken akıl yürütme, akıl yürütürken de ilişkilendirme becerisi kullanılır. Öğrenciler bir problemi analiz ederken ve planlamasını yaparken akıl yürütme becerilerini kullanırlar. Ansjar ve Sembiring (2000, aktaran; Bernard ve Chotimah, 2018) de akıl yürütmenin matematik öğretiminden ayrı tutulamayacağını, matematik yapmanın ve bir matematik problemini çözmenin akıl yürütme becerisi gerektirdiğini vurgulamıştır. Dolayısıyla matematiksel akıl yürütme süreci, problem çözerken eleştirel düşünme becerisini geliştiren ve mantıksal çıkarımlar yapmayı sağlayan bir süreçtir.

Kilpatrick, Swafford ve Findell (2001) matematiksel akıl yürütmenin matematiğin diğer dallarıyla iç içe geçtiğini ifade etmektedir. Bu dallardan birisi de geometri öğrenme alanıdır. Geometri, akıl yürütme becerisinin gelişimi için en uygun öğrenme alanlarından biri olarak gösterilmektedir (Arıcı, 2012; MEB, 2017; NCTM, 2000). Geometri öğrenme alanında öğretmen adaylarının (İlhan ve Aslaner, 2018), ortaöğretim öğrencilerinin (Arıcı, 2012) ve ilköğretim öğrencilerinin (Kızıltoprak, 2020) akıl yürütme becerileri araştırılmıştır. Bunun yanında Krutetskii (1976) tarafından da belirtildiği gibi üstün yetenekli öğrencilerin de geometri alanında yeterliklerini gösterdikleri bilinmektedir. Ayrıca üstün yetenekli öğrencilerle yapılan çalışmalar incelendiğinde geometrik düşünme (Özçakır, Özdemir ve Kıymaz, 2020), geometrik yapılandırma (Yıldız, 2016), ispat (Lee, 2005), kavram yanılgıları (Mason, 1989) konularında çalışmalar yapılmıştır. Ancak bu çalışmaların genellikle deneysel olduğu, sürece odaklanmadığı, üstün yetenekli bireylerin nasıl düşündükleri, kendilerini matematiksel dille nasıl ifade ettikleri ve nasıl akıl yürüttükleri hakkında yeterli bilgi veremedikleri görülmektedir. Üstün yetenekli öğrencilerin düşünme süreçleri (Aydın Güç, Aygün ve Orbay, 2021), mantıksal muhakeme becerileri (Yıldız, 2022), görsel uzamsal zeka ile akıl yürütmeleri (Aziz, Juniati ve Wijayanti, 2020), normal başarıda olan öğrencilerle karşılaştırılmaları (Aydın Güç vd., 2021; Berg ve McDonald, 2018), ispat yapma süreçleri (Dinamit, 2020), rutin ve rutin olmayan problem çözme süreçleri (Garofalo, 1993), problem kurma süreçleri (Yılmaz, 2019) ve ilişkilendirme becerileri (Aydın Güç vd., 2021) hakkında araştırmalar mevcuttur. Ancak bu çalışmalarda Van Hiele geometri testleri gibi literatürde var olan veri toplama araçları veya sınıflandırma yöntemleri kullanılmıştır. Öğrencilerin nasıl akıl yürüttüklerini ve ne gibi süreçlerden geçtiklerini açıklığa kavuşturan ve bunları derinlemesine inceleyen özgün çalışmalara ihtiyaç olduğu görülmektedir. Şimdiki araştırma üstün yetenekli öğrencilerin akıl yürütme becerilerini literatürde daha önce kullanılmayan akıl yürütme bileşenleri kapsamında ve derinlemesine incelendiğinden diğer çalışmalardan ayrılmaktadır. Bu bağlamda üstün yetenekli öğrencilerin farklı problem türlerinde akıl yürütme becerilerinin nasıl olduğu hakkında yapılacak çalışmalar literatüre katkı sağlayacaktır. Dolayısıyla hem güncel çalışmalara ihtiyaç duyulması hem de sonuçtan çok süreci ortaya koymak açısından yeni çalışmaların yapılması gerekmektedir. Bunun yanında üstün yetenekli öğrencilerin soyut düşünme, eleştirel düşünme, keşfetme ve fikir üretme becerilerinin iyi olduğu bilinmektedir (Sak, 2013; Yılmaz, 2015). Üstün yetenekli öğrencilerin meraklı oldukları ve problem çözme yeteneklerinin gelişmiş olduğu (Tucker ve Hafenstein, 1997), hızlı öğrendikleri (Winebrenner, 2000), yaşıtlarına göre yüksek başarı potansiyellerinin olduğu (Uçar, Uçar ve Çalışkan, 2017) bilinmektedir.

Bu nedenle şimdiki çalışmada üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapmayı ve ilişki kurmayı gerektiren, "…nasıl?" ve "…ne?" soru kökleri ile biten geometri soruları kullanılarak akıl yürütme becerilerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Bu çalışmanın; üstün yetenekli öğrencilerin geometri öğrenme alanında akıl yürütme becerilerinin incelenmesine dair yeterli ve güncel çalışma olmaması, çalışmada literatürde var olan sınıflandırmalardan ziyade akıl yürütme becerilerini ayrıntılı bir şekilde ortaya koyan göstergelerin oluşturması ve bu göstergelerin soru türlerine göre incelenmesi açısından literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

YÖNTEM

Nitel araştırma, varsayımlarla sosyal ya da insan sorununa değinen ve araştırma probleminin incelenmesini içeren yorumlayıcı çerçeveden bakılan bir araştırma türüdür (Creswell, 2016) ve bir konunun ya da problemin keşfedilmesi gerektiğinde kullanılır. Nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması ise bir bağlam içindeki bir durumun araştırılmasını gerektiren, bu durumun neden ele alındığını, nasıl yorumlandığını ve hangi sonuçları doğurduğunu ortaya koyan araştırma desenidir (Yin, 2003). Bu çalışmanın amacı üstün yetenekli öğrencilerin nasıl akıl yürüttüklerini ve düşüncelerini nasıl ifade ettiklerini ayrıntılı bir şekilde ortaya koymak olduğundan çalışmanın deseni nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması olarak belirlenmiştir. Araştırmacının bir konuyu örneklemek için birden fazla durum çalışmasını seçtiği çalışmalar çoklu durum çalışması olarak adlandırılır (Creswell, 2016). Bu çalışmada da üstün yetenekli öğrencilerin geometri öğrenme alanında akıl yürütme becerileri incelenirken soru türlerine göre araştırılması çoklu durum çalışması olduğunu göstermektedir. Analiz birimi ise öğrencilerin her oturumda ortaya koyduğu akıl yürütme göstergeleridir.

Katılımcılar

Bu çalışmada üstün yetenekli tanısı konulmuş 8. sınıfta öğrenim gören iki öğrenci ile çalışılmıştır. Bu öğrenciler araştırmanın amacı doğrultusunda okul dışında Bilim ve Sanat Merkezine devam eden, matematik dersini seven ve matematik dersi başarıları yüksek olan, düşüncelerini açıkça ifade edebilen öğrencilerdir. Asıl uygulamadan önce bir öğrenci ile pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Çalışma grubunun belirlenmesinde amaçsal örnekleme metodu kullanılmıştır. Amaçsal örnekleme belli ölçütleri karşılayan özel durumlarda çalışmak amacıyla tercih edilir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu araştırmada da izin alınması konusunda sorun yaşanmayacak bir kurumun seçilmesi ve üstün yetenekliler gibi spesifik bir grupla çalışılacağı için gönüllü olarak katılmak isteyen öğrencilerin seçilmesi en elverişli durum olarak görülmüştür. Bu nedenle çalışmanın katılımcıları amaçsal örnekleme yöntemlerinden kolay ulaşılabilir örnekleme metodu ile seçilmiştir. Bu çalışmada katılımcılara Ayşe ve Demet olarak takma isimler verilmiş ve bulgular bölümünde de (A) ve (D) harfleriyle temsil edilmiştir.

Veri Toplama Araçları

Geometri çalışma kâğıdı

Araştırmanın verileri geometri soruları kullanılarak toplanmıştır. Bu sorular; öğrencilere Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2017) ve taslak olarak hazırlanan Özel Yetenekliler İçin Matematik Öğretim Programı (MEB, 2019) incelenerek çeşitli kaynaklardan (Ceylan, 2012; Posamentier ve Krulik, 1998; Posamentier ve Salkind, 1988; Potari, Zachariades ve Zaslavsky, 2009; Senk, 1985) faydalanarak hazırlanmıştır. Sorular kendi içinde "ispat gerektiren", "ilişkilendirme gerektiren", "nasıl?" ve "ne?" şeklinde dört gruba ayrılmıştır.

Tablo 1

Soru Türlerine Göre Örnekler

Soru türleri	Örnek sorular
İspat yapmayı gerektiren soru	Bir dik üçgende hipotenüse çizilen kenarortayın uzunluğunun hipotenüsün uzunluğunun yarısı olduğunu ispatlayınız.
İlişki kurmayı gerektiren soru	ABC üçgeninde çemberin yarıçapı r ile $\frac{a}{sinA}$, $\frac{b}{sinB}$, $\frac{c}{sinC}$ arasındaki ilişki nedir?
Soru kökü "ne?" olan soru	Uç noktası ortak olan 10 farklı ışın kaç açı oluşturur? (Saymadan yapınız.)
Soru kökü "nasıl?" olan soru	$\cos A . \cos B . \cos C > 0$olan bir üçgen nasıl bir üçgendir?

Bu sorular bir matematik eğitimcisi uzmanı tarafından çalışmanın amacı doğrultusunda incelenmiş ve dönütler göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Uzman görüşü sonucunda veri zenginliği sağlamayacak olan, birden fazla çözüm yolu olmayan ve öğrencilerin akıl yürütme becerilerinin desteklenmesini sağlamayacak sorular çıkarılmıştır.

Madde havuzundan çıkarılan örnek bir soru: Bir ABC ikizkenar üçgeninde $|AC|$= $|BC|$ dir. D ve E noktaları sırasıyla $[AC]$ ve $[BC]$ üzerinde olmak üzere, $\widehat{ABD}$=60°, $\widehat{BAE}$=50° ve $\hat{C}$=

20° olsun. EDB açısının ölçüsü kaç derecedir?

Bu sorunun çıkarılmasının nedeni öğrencilerin akıl yürütme becerilerini ortaya çıkarmaktan ziyade sorunun çözümünün zorlayıcı ve zaman kaybına neden olacağının düşünülmesidir.

Madde havuzunda bırakılan örnek bir soru: $\cos A . \cos B . \cos C > 0$ olan bir üçgen nasıl bir üçgendir?

Madde havuzundan değişiklik yapılarak alınan örnek bir soru: Uç noktası ortak olan 10 farklı ışın kaç açı oluşturur? Sorusuna öğrencilerin sayma eğiliminde olmamaları açısından (saymadan yapınız) ifadesi eklenmiştir.

Son halinde 27 adet geometri sorusu bulunmaktadır. Ayrıca, asıl uygulamadan önce bir öğrenciyle yapılan pilot çalışma sırasında sorularda herhangi bir anlaşılmazlık olmadığından düzeltmeye de ihtiyaç duyulmamıştır. Pilot çalışma sırasında bir soruya her öğrenci farklı şekilde yaklaşacağı ve veri zenginliği açısından farklı akıl yürütme göstergeleri ortaya çıkacağı fark edilmiş ve çıkarılan soru olmamıştır. Okuyucuya fikir vermesi bakımından, öğrencilere sorulan sorulardan iki örnek ve bu sorular çözülürken ortaya çıkması muhtemel olan akıl yürütme bileşenleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 2

Örnek Sorular ve Akıl Yürütme Göstergeleri

Sorular	Akıl yürütme göstergeleri
[CD] nin kenarortay olduğu bir ABC üçgeni verilsin. |CD|=|BD| ise, ACB açısının ölçüsünü bulunuz.	Fikir ileri sürme (1) Çıkarımda bulunma (4)
“Bir üçgenin iki açıortay uzunluğu birbirine eşit ise, o zaman bu üçgen ikizkenar üçgendir.” İfadesinin doğru olduğunu gösteriniz.	Doğrulama/yanlışlama (5) Geçerli olduğunu onaylama (7)

Ancak her sorunun yalnız bir çözümü olmadığından ve her öğrenci farklı düşünüp farklı yollar izlediğinden, bu göstergeler dışında başka göstergelerin de ortaya çıktığı durumlar olmuştur. Burada belirtilen bileşenler araştırmacılar tarafından ortaya çıkması öngörülen bileşenlerdir. Bulgular kısmında diyaloglarda (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (a,b,c)) şeklinde verilen numaralandırmalar her bileşenin madde numarasına göre kullanılması için yapılan kısaltmalardır.

Görüşme soruları

Bu çalışmada veriler yarı yapılandırılmış görüşme soruları aracılığıyla toplanmıştır. Bu görüşmeler birebir şekilde gerçekleştirilmiştir. Birebir görüşmeler yapılmasının nedeni öğrencilerin sesli düşünmelerini sağlayarak kendi düşüncelerini bağımsız şekilde ifade etmelerini sağlamaktır. Her öğrenci bireysel olarak farklı olduğundan farklı akıl yürütme göstergeleri ortaya çıkaracaktır. Bu da çalışmanın özgünlüğüne katkı sağlayacaktır. Öğrencilere verilen geometri soruları hakkında tartışılırken “Bu problemi gördüğünde ilk düşündüğün nedir? Nasıl karar verdin? Nasıl düşündün? Nasıl yaptın?” (Çiftçi, 2015; Yazgan Sağ, 2012) gibi soruların yanı sıra, süreç sırasında oluşabilecek durumlar için de yeni soruların sorulabileceği esnek bir veri toplama yönteminin akıl yürütme becerilerini ortaya çıkarmakta daha uygun olacağı düşünülmüştür.

Verilerin Toplanması

Hazırlanan geometri soruları ile önce bir öğrenciyle pilot çalışma yapılmıştır. Pilot uygulamanın ardından asıl uygulamaya başlanmıştır. Öğrencilerle geometri çalışma kâğıdı kullanılarak 10 hafta boyunca yaklaşık iki ders saati süren yarı yapılandırılmış-birebir görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde öğrencilerin doğru cevabı bulmasından ziyade süreçte nasıl fikir yürüttüklerine odaklanılmıştır. Bu süreçte öğrencilerin düşüncelerini sesli ifade etmeleri için düşüncelerini ortaya çıkaracak sorular sorulmaya özen gösterilmiştir. Bu görüşmeler kamera ile kayıt altına alınmıştır. Çalışmanın verilerini görüşmeler sırasında yapılan kamera kayıtları ve öğrencilerin çalışma kâğıtları oluşturmuştur.

Verilerin Analizi

Veriler öğrencilerin akıl yürütme göstergelerinin hangi sıklıkta ortaya çıktığını belirlemek için betimsel analizle, öğrencilerin düşüncelerini nasıl ifade ettiklerini ve yansıttıklarını anlamak için içerik analizi ile analiz edilmiştir. İçerik analizinde temel amaç, toplanan verilerin açıklayıcı kavramlara ulaşmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Yapılan görüşmelerin çözümlemesi tamamlandıktan sonra literatürde bulunan akıl yürütme tanımlamalarından yola çıkarak oluşturulan akıl yürütme göstergelerine göre veriler analiz edilmiştir. Daha sonra her soru için gösterge sıklık tablosu oluşturulmuştur. Öğrencilerin hangi soru türlerinde nasıl akıl yürüttükleri, düşüncelerini nasıl ifade ettikleri giriş bölümünde bahsedildiği gibi literatürden yararlanarak oluşturulan akıl yürütme göstergeleri doğrultusunda ortaya konmuştur. Aşağıda betimsel ve içerik analiz örneği verilmiştir.

Tablo 3

Betimsel Analiz İçin Örnek Frekans Tablosu

Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 1	25	2	17	21	6	4	2	7	7	0
Problem 2	13	6	4	18	1	5	1	1	0	0

Yukarıdaki tabloda bir öğrencinin iki soruya ait frekans tablosu verilmştir. Bu tabloya göre hangi akıl yürütme göstergesini daha iyi yansıttığı ya da hangisini ortaya koyamadığı açıkça görülmektedir.

Tablo 4
İçerik Analiz Örneği

Sorular	Diyalog
Bir üçgende iç teğet çemberin nasıl çizildiğini gösteriniz.	… D: Eşkenar olursa kolay. (1,3) A: Eşkenar olursa nasıl kolay? D: Yani bi defa ben bu üçgeni bu ABC üçgeni içine çizmeye çalışırken her kenara değecek şekilde bir eşit üçgen çizmeye çalışacağım ama eşit… A: Çember. D: Yok ilk önce üçgen sonra ona göre çember yani nereye çizeceğim belli olsun diye. (1,3,6) A: Hmm tamam. D: Ama mesela eşkenar üçgende her taraf eşit zaten burda belirli bir kalıpla çizilmiş bile olsa etrafına çizgi çek yani doğru parçası çizmeye çalıştığında bize eşkenar çıkarıyor. (1,4,5,7) …
Uç noktası ortak olan 10 farklı ışın kaç açı oluşturur? (Saymadan yapınız.)	… D: 360 derece. O açıyı çizdik. Sonra bu 1.ışın desek buna. Her biri teker teker kendiyle kaç açı oluşturduğunu düşündüm. E bu da 360 derecelik açı olarak düşünürsek her biriyle yaparsa 10 tane açı oluşturmuş olacak. Diğerleri 360 derecelik açı oluşturamayacak çünkü yine aynı şeye denk gelecek. O yüzden diğerleri de teker teker 9 tane oluştursa 46 olmuyor aslında. Ben farklı düşündüm. Eee 9 tane açı oluştursa 9 kere 9 81. O zaman buradaki yanlış sonucu silersek 91 açı oluşturur. Çünkü tam 100 olmaz. 360 dereceyi bir kere oluşturduk. (1,4,6,8(a,b,c)) …

Yukarıdaki içerik analizi tablosuna bakıldığında, ilk soru için; öğrenci *"eşkenar üçgen olursa kolay"* diyerek hem bir fikir ileri sürmüş hem de üçgen çeşidi belirterek bir seçim yapmıştır. Sonraki açıklamalarında ise çemberi nasıl çizeceğinin nedenlerini öne sürerek gerekçelendirme göstergesinin izlerini ortaya koymuştur.

Etik Kurul İzin Belgesi

Bu araştırma Gazi Üniversitesi Ölçme Değerlendirme Etik Alt Çalışma Grubu'nun 04.02.2020 tarihinde aldığı 166906 sayılı karar ile etik yönden uygun bulunmuştur.

BULGULAR

Bu bölümde soru türlerine göre üstün yetenekli öğrencilerin oturumlarda açığa çıkardığı akıl yürütme becerilerine dair analiz sonucu elde edilen bulgulara yer verilecektir.

Ayşe'nin "ne?" soru köklü sorularda akıl yürütme becerilerine dair bulgular

Toplanan verilerde ortaya çıkan akıl yürütme göstergelerinden 168'i fikir ileri sürme (1), 17'si iddia etme (2), 49'u seçim yapma (3), 124'ü çıkarım yapma (4), 23'ü doğrulama/yanlışlama (5), 69'u gerekçelendirme (6), 20'si gerekçeyi kontrol etme (7) ve 72'si argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c))olduğu gözlenmiştir. Aşağıda ayrıntılı tablo verilmiştir.

Tablo 5

"Ne?" Soru Köklü Sorularda Ortaya Çıkan Göstergeler

Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 1	25	2	17	21	6	4	2	7	7	0
Problem 3	18	1	7	13	4	7	3	3	3	1
Problem 6	19	7	2	12	3	8	3	2	2	1
Problem 7	25	0	6	15	2	10	3	1	1	1
Problem 9	14	0	2	24	1	16	3	9	9	4
Problem 11	22	3	2	15	3	9	2	2	2	1
Problem 17	25	2	10	16	3	9	2	5	5	3
Problem 26	20	2	3	8	1	6	2	1	1	1
Toplam	**168**	**17**	**49**	**124**	**23**	**69**	**20**	**30**	**30**	**12**

Bu sayılardan da anlaşılacağı gibi öğrenci fikir ileri sürme (1) ve çıkarım yapma (4) becerilerini diğer göstergelere göre nispeten daha iyi sergilemiştir. İddia etme (2), gerekçeyi kontrol etme (7) ve doğrulama/yanlışlama (5) becerileri ise en az görülen becerilerdir. Bu soru türünde öğrenci bütün sorularda fikir ileri sürme (1), seçim yapma (3), çıkarım yapma (4), gerekçelendirme (6) ve gerekçeyi kontrol etme (7) becerilerinin mevcut olduğu izlere rastlanmıştır. Sadece iki soruda iddia etme becerisini gösterememiştir. Bir soruda ise argüman zincirleri oluşturma becerisine ait alt bileşenlerden adımlar atma (8(a))ve atılan adımları izleme (8(b)) becerilerinin izleri olmasına rağmen bu adımları bir sonuca bağlayamadığından atılan adımların değerlendirilmesi (8(c)) bileşenine rastlanmamıştır.

Aşağıda "Uç noktası ortak olan 10 farklı ışın kaç açı oluşturur? (Saymadan yapınız.)" sorusunun tartışıldığı oturumdan bir kesit verilmiştir. Bu diyalogda akıl yürütme bileşenlerinin tümüne yer verilmiştir. Öğrencinin hiç saymadan sonucun 9 olduğunu söylemesi hem fikir ileri sürdüğünü (1) hem de kendinden emin olması iddia etme becerisini yansıtmaktadır. Daha sonra araştırmacının sorusu üzerine 9 sonucuna nasıl ulaştığını açıklaması gerekçelendirme (6), bu süreçte neden sonuç ilişkisi kurması çıkarım yapma (4) göstergesinin izleridir. İlerleyen aşamada öğrenci diğer açıları da çizerek istediği dört ışını kapatarak seçim yapma (3) becerisini göstermiş ve bir açı daha saymıştır. Öğrenci sayarak kaç açı bulabileceğini hesaplamaya başlamış, belli adımlar atmı (8(a)), bu adımları takip etmiş (8(b)) ancak bir sonuca ulaşamamıştır. Görüldüğü üzere atılan adımların değerlendirilmesi (8(c))alt bileşenine dair bir iz bulunmamaktadır. Araştırmacının sorusuna göre öğrenci ikili, üçlü açılar derken ne kastettiğini açıklaması doğrulama (5) yaptığını, son diyalogda ise ifade ettiği gerekçeye açıklama getirerek gerekçeyi kontrol etme (7) becerisini ortaya koymaktadır.

…

A: 9 direk. Hiç saymadan da olur. (1,2)

Ar: Hmm. Ne düşündün ilk problemi gördüğünde?

A: İlk önce böyle 10 tane farklı ışının geldiğini düşündüm. Sonra belki bunların dışında da bazen dış açıyı bulduğumuz için bir açı vardır diye tekrardan çizdim emin olmak için. 9 tane iç 1 tane dış açı çıktı. (1,4,6)

Ar: Peki. Işının tanımını da düşünürsen eğer…

A: Sonsuz, sonsuza kadar gidiyor. (1)

Ar: Ne gidiyor sonsuza kadar?

A: Yani şu taraflara gidiyor. (Çizdiği ışınların yönlerini gösteriyor) Yönü her zaman uzunluğu bilinmiyor kısaca. (1)

Ar: Hmm peki. Tekrar bir düşündüğünde problem üzerinde dikkatini çeken başka bir şey yok mu mesela?

A: Işınla doğru arasında kaldım bi ya şöyle uzuyorsa o zaman farklı olacak (ışınların ters yönde uzadığını işaret ediyor). (1,4)

Ar: Başka açılar yok mudur sence de burada?

A: Ama burada başka çizgi yok ki oradan çıkacak. (2,6)

Ar: Şimdi, ne yapıyorsun?(Diğer açıları da tek tek çizmeye başlayınca)

A: Şey, bunlar oluşturuyor ama mesela şu ortadaki dördünü kapatırsak bir tane şuradan çıkar. Bunları da ekliyorum. (1,3,4)

Ar: Hmm, peki sayarak mı yapıyorsun bu durumda?

A: Aslında hep eksilerek gidiyor. 10 (dış açıyı da dâhil etti) tane şey vardı ilk başta sonra 9 tane iç oldu. 8 tane 2 li, 7 tane 3 lü. O zaman 6 tane galiba 4 lü olacak. 5 tane 5li oluyor. Yok ya 5 tane 5 li olmaz. Varmış. (3,4,8(a,b))

Ar: Bu 5 li, 4 lü, 3 lü, 2 liden kastın ne?

A: İki tane açının birleşmesi yani bu çizgiler arasında olan iki tane açının birleşmesi ya mesela şu ortadakini kapatınca şu ikisi benim ifademle ikili açı oluyor. Ya da işte sadece öyle üç tanesi üçlü açı oluyor. (Burada ortada bir ışın kolu daha varsa ona ikili ya da iki ışın kolu varsa onu üçlü diye ifade ediyor.) (1,5)

Ar: Hmm. Anladım.

…

A: Mesela belki oran orantı vardır orantı şeklinde devam eder. Doğru orantı varsa ikisi arttıkça açı sayısı da artacak. (1,4)

Ar: Ne ile ne arasında orantı bulmaya çalıştın?

A: Şey şu belki her 1 tanede şu kadar açı var böyle böyle gider diye ama sonuç virgüllü çıkıyor bölünmüyor. (1,7)

…

Ayşe'nin "nasıl?" soru köklü sorularda akıl yürütme becerilerine dair bulgular

Toplanan verilerde ortaya çıkan akıl yürütme göstergelerinden 93'ü fikir ileri sürme (1), 7'si iddia etme (2), 24'ü seçim yapma (3), 37'si çıkarım yapma (4), 2'si doğrulama/yanlışlama (5), 32'si gerekçelendirme (6), 9'u gerekçeyi kontrol etme (7) ve 4'ü argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) olduğu gözlenmiştir. Aşağıda ayrıntılı tablo verilmiştir.

Tablo 6

"Nasıl?" Soru Köklü Sorularda Ortaya Çıkan Göstergeler

Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Problem 14	15	0	4	9	0	9	3	1	1	0
Problem 16	15	3	6	8	0	8	1	0	0	0
Problem 18	35	0	5	9	2	9	3	1	1	0
Problem 19	12	4	7	4	0	1	0	0	0	0
Problem 20	16	0	2	7	0	5	2	0	0	0
Toplam	**93**	**7**	**24**	**37**	**2**	**32**	**9**	**2**	**2**	**0**

Bu sayılardan da anlaşılacağı gibi öğrenci fikir ileri sürme ve çıkarım yapma becerilerini diğer göstergelere göre nispeten daha iyi sergilemiştir. Doğrulama/yanlışlama (5), argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) ve iddia etme (2) becerileri ise en az görülen becerilerdir. Bu kategoride "$\cos A . \cos B . \cos C > 0$ olan bir üçgen nasıl bir üçgendir?" sorusunun tartışıldığı oturumda hiçbir becerinin izlerine rastlanmamıştır. Bunun dışındaki sorularda fikir ileri sürme (1) becerisini diğer becerilerle karşılaştırıldığında daha iyi gösterebilmiştir. Çıkarım yapma (4), gerekçelendirme (6) ve seçim yapma (3) becerilerinin de ortaya çıkmasına rağmen iddia etme (2), doğrulama/yanlışlama (5), gerekçeyi kontrol etme (7) ve argüman zincirleri oluşturma becerileri (8(a,b,c)) genellikle çok zayıftır ve hiç görülmeyen sorular mevcuttur. Sadece "Bir üçgende iç teğet çemberin nasıl çizildiğini gösteriniz." sorusunda doğrulama/yanlışlama (5) becerisinin göstergeleri vardır. Aşağıda verilen kesitte bu göstergenin izleri görülmektedir. Öğrenci üçgenin kenarlarına dik gelen doğru parçalarının yani kenarorta dikmelerin kesişim noktasının çemberin merkezi olamayacağını, kenarortayların kesişim noktasının çemberin merkezi olabilecğini nedenleriyle açıklamış, bunu çeşitli üçgenlerde sağladığını göstererek doğrulama (5) yapmıştır.

…

Ar: Niye dik kesmesi gerekiyor bu kenarları? Niye öyle düşündün? Yani nasıl bilebiliriz onların kesişim noktasının çemberin merkezi olacağını?

A: Hocam aslında şey olabilir tam dik kesmek değil de ortadan ikiye ayırsa. (1)

Ar: Kenarları mı?

A: Evet kenarları ikiye ayırsa o zaman olabilir çünkü dik kesince böyle deneyince olmuyor. (1,6)

Ar: Hmm denedin mi?

A: Evet hocam dik kestiğinde [BC] de A yani dik kesmeye çalıştığında B ye daha yakın oluyor. C, [AB] yi dik kestiğinde A ya daha yakın oluyor. Sonra B kestiğinde bu sefer de A ya daha yakın oluyor. Yani ortada nasıl desem bir nokta olmuyor ya da o noktadan geçebilecek bir çember olmuyor. (4,5,6,7)

Ar: Peki kenarları ortadan ikiye böldüğünde nasıl oluyor?

A: Kenarları ortadan ikiye böldüğümüzde yine bu ortada kesişen nokta çemberin merkezi olabiliyor. (1,4)

Ar: Hmm peki böyle bir üçgen üzerinde değil de daha farklı bir üçgen çizersek eğer illa bu tipte bir üçgen olmak zorunda değil. Farklı üçgenler üzerinde denersen nasıl oluyor? İstediğin sonucu elde edebiliyor musun? Bir de ona bak bakalım. Bir sürü üçgen modeli olabilir değil mi?

A: Evet. O zaman da olur hocam mesela şimdi ikizkenarda denedim oldu. Eşkenarda da denedim onda da oldu. Yani. (3,5)

…

Ayşe'nin ilişkilendirme gerektiren sorularda akıl yürütme becerilerine dair bulgular

Toplanan verilerde ortaya çıkan akıl yürütme göstergelerinden 51'i fikir ileri sürme (1), 6'sı iddia etme (2), 10'u seçim yapma (3), 43'ü çıkarım yapma (4), 4'ü doğrulama/yanlışlama (5), 22'si gerekçelendirme (6), 7'si gerekçeyi kontrol etme (7) ve 8'i argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) olduğu gözlenmiştir.

Tablo 7

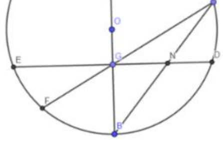
İlişkilendirme Gerektiren Sorularda Ortaya Çıkan Göstergeler

Göstergeler	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8-a**	**8-b**	**8-c**
Problem 4	7	0	3	6	1	3	2	0	0	0
Problem 8	12	4	4	21	2	12	5	1	1	1
Problem 21	14	0	1	4	0	2	0	1	1	0
Problem 24	18	2	2	12	1	5	0	1	1	1
Toplam	**51**	**6**	**10**	**43**	**4**	**22**	**7**	**3**	**3**	**2**

Bu sayılardan da anlaşılacağı gibi öğrenci fikir ileri sürme (1) ve çıkarım yapma (4) becerilerini diğer göstergelere göre nispeten daha iyi sergilemiştir. Doğrulama/yanlışlama (5), iddia etme (2) ve gerekçeyi kontrol etme (7) becerileri ise en az görülen becerilerdir. Fikir ileri sürme (1) ve çıkarım yapma (4) becerileri nispeten daha iyi görünürken özellikle iddia etme (2), doğrulama/yanlışlama (5), gerekçeyi kontrol etme (7) ve argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) becerileri zayıf ve bazı sorularda ortaya çıkmamıştır. Aşağıdaki diyalogda "O merkezli çemberde [ED] kirişi [AB] çapına G noktasında diktir. P noktası AB yayı üzerinde bir nokta ve [PB], [ED] ile N noktasında kesişmektedir. |BN| ve |FG| arasındaki ilişkiyi tahmin ediniz. Tahmininizi destekleyiniz." sorusunda göstergelerin en çok görüldüğü alıntılar verilmiştir. Öğrencinin fikirlerini açıklaması (1), bunlarda ısrarcı olması (2), birbirini destekleyen çıkarımlarda bulunması (4), açıklamalarını aksini örneklendirerek doğrulama yapması (5), gerekçeler ortaya sunması (6), bu gerekçeleri yeni açıklamalarla desteklemesi (7) ve birbirini izleyen adımlar atması ve bir sonuca ulaşması (8(a,b,c)) açıkça görülmektedir.

Şekil 1.

Örnek Soru 1



…

Ar: Peki bir şey soracağım şimdi P noktasını az önce yukarıya taşımıştın ona göre şöyle bir şey çizmiştin değil mi çizdiğin şey şu?

A: Evet.

Ar: Tamam. Bunların yeri değişmedi mi hep sabit mi orada?

A: Evet. Çünkü P oynuyor, F ya da B oynamıyor. P de ikisinin kesiştiği nokta yani bunlar ışın olsa şurada başlasa bu da burda başlasa, şöyle gidecek, bu da böyle gidecek, burası kesişir. Aynı aynalardaki odak noktası gibi. Işınların kesiştiği bölge yani mesela burda bize hiç P noktası vermeseydi biz bunu böyle ilerletseydik o zaman P noktasını bulurduk. Kesişim noktası ortak, o zaman değiştirirdik. Tekrar değiştirirdik. Bu P olmasa bile sadece bunu yani şu taraf yok, şunu şöyle çizselerdi, uzunluğunu sorsalardı, biz bunları böyle düz götürürdük. Ortada kesiştikleri yerler onların aslında çıkış noktası olabilirdi. Yani buradan çıkan iki tane ışın şu tarafa doğru geliyor. Bunu her değiştirdiğimizde burada ED adlı bir doğru parçamız var ve bunun ortada olmadığından kesiniz. O zaman bu bize şöyle bir şey verdi. Bunu bu [ED] ye de bağlı şunların uzunluğu. Bu her yukarı çıktığında bunların da değeri büyüyecek. Belki bu tam şöyle olacak bu böyle küçücük burada kocaman kalacak. O zaman |BN| büyüktür |FG| olacak ama bu şekilde yani açılar birbirini bu şekilde kestiği zamanda ve [ED] nin bu şekilde geçtiği zamanda |BN| büyüktür |FG|. (1,2,4,5,6,7,8(a,b,c))

Ayşe'nin ispat gerektiren sorularda akıl yürütme becerilerine dair bulgular

Toplanan verilerde ortaya çıkan akıl yürütme göstergelerinden 88'i fikir ileri sürme (1), 10'u iddia etme (2), 14'ü seçim yapma (3), 67'si çıkarım yapma (4), 8'i doğrulama/yanlışlama (5), 28'i gerekçelendirme (6), 2'si gerekçeyi kontrol etme (7) ve 30'u argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) olduğu gözlenmiştir.

Tablo 8

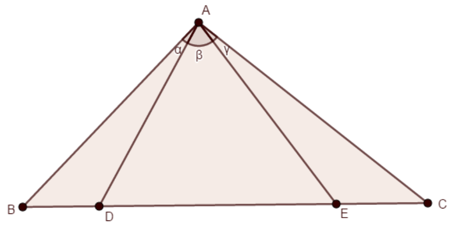
İspat Yapmayı Gerektiren Sorularda Ortaya Çıkan Göstergeler

Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 2	13	6	4	18	1	5	1	1	0	0
Problem 10	18	3	1	10	2	4	0	0	0	0
Problem 12	4	0	0	10	1	4	1	3	3	0
Problem 13	6	0	3	3	2	4	0	1	1	0
Problem 15	6	0	2	3	0	2	0	0	0	0
Problem 22	4	0	1	2	0	1	0	0	0	0
Problem 23	18	0	1	7	0	1	0	3	2	1
Problem 25	4	1	0	3	2	3	0	2	2	2
Problem 27	15	0	2	11	0	4	0	4	4	1
Toplam	**88**	**10**	**14**	**67**	**8**	**28**	**2**	**14**	**12**	**4**

Bu sayılardan da anlaşılacağı gibi öğrenci fikir ileri sürme (1) ve çıkarım yapma (4) becerilerini diğer göstergelere göre nispeten daha iyi sergilemiştir. Gerekçeyi kontrol etme (7), doğrulama/yanlışlama (5) ve iddia etme (2) becerileri ise en az görülen becerilerdir. Fikir ileri sürme (1), çıkarım yapma (4) ve gerekçelendirme (6) göstergeleri her soruda rastlanmıştır. Argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) göstergesinin alt bileşenleri de nadir görülmüştür. Öğrenci iddia etme ve doğrulama/yanlışlama becerilerini sergilemekte de çok iyi değildir. Sadece "Bir dik üçgende hipotenüse çizilen kenarortayın uzunluğunun hipotenüsün uzunluğunun yarısı olduğunu ispatlayınız." ve

Şekil 2.

Örnek Soru 2



$|AB|=|AC|$ ve $\alpha = \gamma$ ise ADE üçgeninin ikizkenar olduğunu ispatlayınız. Bu probleme göre aşağıdaki tabloda bulunan önermeleri ve sebeplerini yazınız.

Tablo 9

Örnek Soru 2'ye Ait Tablo

Önermeler	Sebepler
$\vert AB\vert=\vert AC\vert$	………………
…………………….	İkizkenar üçgenin taban açıları eştir.
$\alpha = \gamma$	Verilen bilgi
ABD üçgeni ACE üçgenine benzerdir.	………………
…………………………	Eş şekillerin karşılıklı parçaları eştir.

Sorularında gerekçeyi kontrol etme (7) becerisinin izleri mevcuttur. Bu sorunun tartışıldığı oturumda sunduğu gerekçeyi başka gerekçelerle kontrol ettiğine dair diyalog örneği aşağıda verilmiştir. Öğrenci son cümlesinde, ilk cümlede söylediklerini başka şekilde ifade etmeye çalışmış ve yeni gerekçeler sunmuştur. Dolayısıyla gerekçeyi kontrol etme izlerine rastlanmaktadır.

…

A: Hmm tekrar etmeyince her şeyi unutuyorum. B eşittir neymiş C açısı. (sebebi verilmiş önermeyi yazmış) a=y verilen bilgi. ABD üçgeni ACE üçgenine benzerdir. Çünkü a=y, x=r, s=p. Bunlar birbirine eşit. Bunlar aynı üçgenleri oluşturuyor. O yüzden benzerdir. (4,6)

Ar: Tamam.

A: Eş şekillerin karşılıklı parçaları eşittir.

Ar: Peki yaptığın son adımda ispatladın mı bunu sence? ADE üçgenine vardın mı, az önceki çözüm yolundan bahsetmiyorum, tabloyu doldururken?

A: Hmm, vardım bence. (1)

Ar: Tamam başka nasıl çözebilirsin.

A: Yazmam gerekiyor mu sözel anlatsam.

Ar: Sözel anlatabilirsin.

A: |AC| eşit diyordu |AB| ye. O zaman bu ikizkenar kesin. Bu a açısı ve y açısı eşit. O zaman aynı büyüklükte parçalar kesilmiş. Çünkü ikisi aynı, mesela biraz daha uzun olsaydı, bu küçülürdü, daha kısa olsaydı bu büyürdü bu sefer. Eşit ikisi. O zaman |AE| nin |AD| ye eşit olması gerekiyor. O zaman iki tane kenarın birbirine eşit olduğu üçgenlere de ikizkenar diyoruz. (1,4,5,7)

Ar: Hmm.

…

Demet'in "ne?" soru köklü sorularda akıl yürütme becerilerine dair bulgular

Toplanan verilerde ortaya çıkan akıl yürütme göstergelerinden 192'si fikir ileri sürme (1), 16'sı iddia etme (2), 33'ü seçim yapma (3), 120'si çıkarım yapma (4), 19'u doğrulama/yanlışlama (5), 70'i gerekçelendirme (6), 18'i gerekçeyi kontrol etme (7) ve 46'sı argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) olduğu gözlenmiştir.

Tablo 10
"Ne?" Soru Köklü Sorularda Ortaya Çıkan Göstergeler

Göstergeler	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8-a**	**8-b**	**8-c**
Problem 1	56	5	5	41	2	16	3	7	5	3
Problem 3	21	0	2	9	1	3	1	1	0	0
Problem 6	10	1	1	11	6	9	3	0	0	0
Problem 7	20	1	3	19	5	13	4	5	5	4
Problem 9	36	1	4	12	2	7	1	2	2	2
Problem 11	17	4	6	4	2	5	1	0	0	0
Problem 17	22	2	8	17	1	10	3	3	3	2
Problem 26	10	2	4	7	0	7	2	1	1	0
Toplam	**192**	**16**	**33**	**120**	**19**	**70**	**18**	**19**	**16**	**11**

Bu sayılardan da anlaşılacağı gibi öğrenci fikir ileri sürme (1) ve çıkarım yapma (4) becerilerini diğer göstergelere göre nispeten daha iyi sergilemiştir. İddia etme (2), gerekçeyi kontrol etme (7) ve doğrulama/yanlışlama (5) becerileri ise en az görülen becerilerdir. Bir soruda iddia etme (2) göstergesinin, iki soruda ise argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) göstergesinin izlerine rastlanmamıştır. Aşağıda "Uç noktası ortak olan 10 farklı ışın kaç açı oluşturur? (Saymadan yapınız.)" sorusunun tartışıldığı oturumdan bir kesit verilmiştir. Bu diyalogda fikir ileri sürme (1), çıkarım yapma (4), gerekçelendirme (6) ve argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) göstergeleri açıkça görülmektedir.

…

D: 360 derece. O açıyı çizdik. Sonra bu 1.ışın desek buna. Her biri teker teker kendiyle kaç açı oluşturduğunu düşündüm. E bu da 360 derecelik açı olarak düşünürsek her biriyle yaparsa 10 tane açı oluşturmuş olacak. Diğerleri 360 derecelik açı oluşturamayacak çünkü yine aynı şeye denk gelecek. O yüzden diğerleri de teker teker 9 tane oluştursa 46 olmuyor aslında. Ben farklı düşündüm. Eee 9 tane açı oluştursa 9 kere 9 81. O zaman buradaki yanlış sonucu silersek 91 açı oluşturur. Çünkü tam 100 olmaz. 360 dereceyi bir kere oluşturduk. (1,4,6,8(a,b,c))

…

Demet'in "nasıl?" soru köklü sorularda akıl yürütme becerilerine dair bulgular

Toplanan verilerde ortaya çıkan akıl yürütme göstergelerinden 83'ü fikir ileri sürme (1), 7'si iddia etme (2), 26'sı seçim yapma (3), 40'ı çıkarım yapma (4), 9'u doğrulama/yanlışlama (5), 31'i gerekçelendirme (6), 8'i gerekçeyi kontrol etme (7) ve 29'u argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) olduğu gözlenmiştir.

Tablo 11

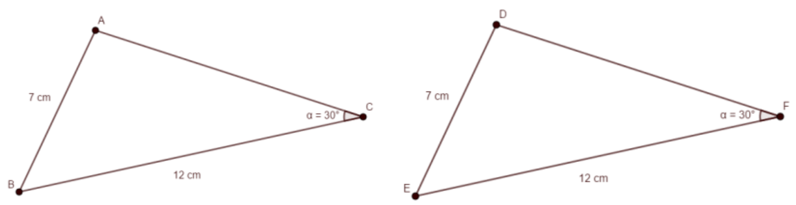
"Nasıl?" Soru Köklü Sorularda Ortaya Çıkan Göstergeler

Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 5	6	0	1	3	0	3	0	2	2	2
Problem 14	13	0	0	12	0	5	1	1	1	0
Problem 16	19	4	5	12	0	9	1	1	1	1
Problem 18	16	1	5	6	1	5	1	1	1	1
Problem 19	22	2	14	4	8	6	4	6	5	4
Problem 20	7	0	1	3	0	3	1	0	0	0
Toplam	**83**	**7**	**26**	**40**	**9**	**31**	**8**	**11**	**10**	**8**

Bu sayılardan da anlaşılacağı gibi öğrenci fikir ileri sürme (1) ve çıkarım yapma (4) becerilerini diğer göstergelere göre nispeten daha iyi sergilemiştir. İddia etme (2), gerekçeyi kontrol etme (7) ve doğrulama/yanlışlama (5) becerileri ise en az görülen becerilerdir. Bu kategoride bulunan

Şekil 3.

Örnek Soru 3



"ABC ve DEF üçgenlerinin eş olup olmadığını tartışınız.

Öğrenci A: İki kenarı ve bir açısı eşit olduğu için eş üçgenlerdir.

Öğrenci B: İki kenarı ve bu iki kenarı içeren açı eşit olduğunda eş üçgen olabileceği için bu iki üçgen eş değildir.

Bu iki öğrencinin fikirleri hakkında neler söyleyebilirsiniz?" ve "$\cos A . \cos B . \cos C > 0$olan bir üçgen nasıl bir üçgendir?" sorularında öğrencinin akıl yürütme göstergeleri çok zayıftır. "Bir üçgende iç teğet çemberin nasıl çizildiğini gösteriniz." sorusunda eşkenar üçgenle başlama fikri hem fikir ileri sürme (1) hem de seçim yapma (3) becerisini gösterir. Sonraki adımda ilk önce üçgeni, ardından çemberi çizme fikrinin nedenini açıklaması gerekçelendirme (6), çemberi çizmekle başlamış olsa bile eşkenar üçgenin yine ortaya çıkacağını belirtmesi ise çıkairm yapma (4), doğrulama/yanlışlama (5) ve gerekçeyi kontrol etme (7) göstergelerini barındırmaktadır.

…

D: Eşkenar olursa kolay. (1,3)

A: Eşkenar olursa nasıl kolay?

D: Yani bi defa ben bu üçgeni bu ABC üçgeni içine çizmeye çalışırken her kenara değecek şekilde bir eşit üçgen çizmeye çalışacağım ama eşit…

A: Çember.

D: Yok ilk önce üçgen sonra ona göre çember yani nereye çizeceğim belli olsun diye. (1,3,6)

A: Hmm tamam.

D: Ama mesela eşkenar üçgende her taraf eşit zaten burda belirli bir kalıpla çizilmiş bile olsa etrafına çizgi çek yani doğru parçası çizmeye çalıştığında bize eşkenar çıkarıyor. (1,4,5,7)

…

Demet'in ilişkilendirme gerektiren sorularda akıl yürütme becerilerine dair bulgular

Toplanan verilerde ortaya çıkan akıl yürütme göstergelerinden 46'sı fikir ileri sürme (1), 6'sı iddia etme (2), 17'si seçim yapma (3), 39'u çıkarım yapma (4), 15'i doğrulama/yanlışlama (5), 20'si gerekçelendirme (6), 9'u gerekçeyi kontrol etme (7) ve 10'u argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) olduğu gözlenmiştir.

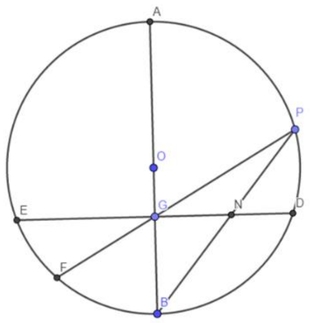
Tablo 12

İlişkilendirme Gerektiren Sorularda Ortaya Çıkan Göstergeler

Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 4	16	3	7	17	9	6	4	2	2	3
Problem 8	18	2	6	13	4	9	2	1	1	1
Problem 21	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Problem 24	6	1	4	9	2	5	3	0	0	0
Toplam	**46**	**6**	**17**	**39**	**15**	**20**	**9**	**3**	**3**	**4**

Bu sayılardan da anlaşılacağı gibi öğrenci fikir ileri sürme (1) ve çıkarım yapma (4) becerilerini diğer göstergelere göre nispeten daha iyi sergilemiştir. İddia etme (2), gerekçeyi kontrol etme (7) ve argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) becerileri ise en az görülen becerilerdir. "ABC üçgeninde çemberin yarıçapı r ile $\frac{a}{sinA}, \frac{b}{sinB}, \frac{c}{sinC}$ arasındaki ilişki nedir?" sorusunda sadece fikir ileri sürme göstergesinin izleri bulunmakta ve daha ileri akıl yürütme becerileri görülmemiştir. Aşağıdaki diyalogda "O merkezli çemberde [ED] kirişi [AB] çapına G noktasında diktir. P noktası AB yayı üzerinde bir nokta ve [PB], [ED] ile N noktasında kesişmektedir. |BN| ve |FG| arasındaki ilişkiyi tahmin ediniz. Tahmininizi destekleyiniz." sorusunda göstergelerin en çok görüldüğü alıntılar verilmiştir. Öğrencinin sorulan uzunlukların eşit olduğunu tahmin etmesi fikir ileri sürme (1) ve çıkarım yapma (4) becerilerinin, sonraki adımda ise eşit olma zorunluluğuna değinmesi iddia etme (2), bunu gerekçelendirmesi (6) izlerine rastlanmaktadır. Diyaloğun ilerleyen bölümlerinde başka seçenekler sunması seçim yapma (3), gerekçelerine yeni gerekçeler eklemesi gerekçeyi kontrol etme (7), açıklamalarını adım adım yaparak ilerlemesi argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) becerilerini göstermektedir.

Şekil 4.
Örnek soru 4



…

D: Şimdi bu [AB] çapına G noktasında kesişiyorlar ED çizgisiyle kirişiyle. Noktasında dik olarak kesişiyorlar. O zaman burda bu yaya gelecek her türlü şey zaten bir nevi birbirine eş olur diye tahmin ediyorum. (1,4)

A: Neden eş olur birbirine?

D: Ya mesela buradan buraya çizilen bir uzunluk tabi ki buradan buraya çizilen bi çizgiye eşit olmaz ama belki bu FG çizgisine bu NB gibi bir şekilde onun gibi bir açıda mı denir artık o durumda aşağı indirirsek eğer eşit olursa yani inerse o zaman bu birbirine eş olurlar. Çünkü zaten burası dik olarak kesiştiği için eş olmak zorundalar. (2,4,6)

A: Dik olarak kestiği için mi öyle?

D: Hıhı. Ama burda şöyle kesseydi bu PE den kesseydi, böyle olacaktı. Olmazdı o zaman. (1,3,4)

A: Niye?

D: Çünkü böyle bir yuvarlak çember. Bunu orta noktası O yine. Bunu bu sefer şuradan şöyle kesmiş. (6)

A: Hmm bu senin DE kirişin galiba.

D: Hıhı. Böyle kesmiş. O zaman burda veya bu tarafta herhangi bir dik açı oluşmaz. O yüzden de zaten buranın bu bölümün uzunluğu buradaki çizginin uzunluğu ile şuradaki çizginin uzunluğu birbirine eş olamaz eşit olamaz. Ama buradaki ED kirişi AB ye dik olarak indiği için dik olarak birleştiği için G noktasında o zaman eğer bu NB nin açısına göre GF yi ayarlarsak ve sığıyorsa bu aralığa o zaman ikisinin eş olması gerekir. Ama eğer sığmıyorsa zaten olmaz. (1,3,4,6,7)

A: Başka durumlar var mıdır peki büyüklük küçüklük gibi?

D: Büyüklük, küçüklük…

A: Yani her zaman eşit midir sence bu ikisi?

D: Cık değildir. (1)

A: Hangi durumlarda eşit değildir acaba?

D: Şimdi bunu böyle bir yay değil de dik doğru parçası olarak düşünürsek, GN EF ye eşit olursa, biz bu [GF] nin yerini değiştirdiğimizde mesela bu F yi buraya getirdim ya, ND arasındaki uzunluğun buradaki (F ve F nin yeni yeri) uzunluk olması gerektiğini düşünüyorum. Burda geriye kalan uzunluk da bunların yay olmasından dolayı olabilir. Ama zaten şöyle bişey var. Bu [ED] G noktasında kesildiği zaman yarı yarıya oluyorlar. Burası GD ile EG birbirine eşit oluyor, uzunlukları. O yüzden birinde buradaki bir noktadan bu GN nin uzunluğundan yine buradan başlatırsak burayı yine buraya G demeyelim öyle. (GN kadar G den bi uzunluk çizmeye çalışıyor) K olsun. Burası kadar buradaki arasındaki uzunluk kadar burada da uzunluk mesafesi eklesek buraya K noktası desek bu K noktasından da B noktasına bi uzunluk çizsek, o zaman Zaten burası bir dik açılı dik açıda üçgen oluşturduğu için burası da oluşturur. O zaman da burasıyla burası (KB ve NB den bahsediyor) birbirine eşit olur. (1,3,4,8(a,b,c))

…

Demet'in ispat gerektiren sorularda akıl yürütme becerilerine dair bulgular

Toplanan verilerde ortaya çıkan akıl yürütme göstergelerinden 135'i fikir ileri sürme (1), 10'u iddia etme (2), 24'ü seçim yapma (3), 85'i çıkarım yapma (4), 18'i doğrulama/yanlışlama (5), 55'i gerekçelendirme (6), 22'si gerekçeyi kontrol etme (7) ve 28'i argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) olduğu gözlenmiştir.

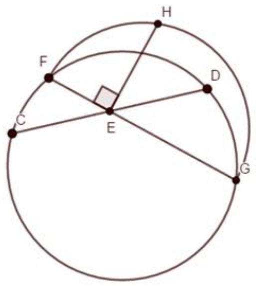
Tablo 13

İspat Yapmayı Gerektiren Sorularda Ortaya Çıkan Göstergeler

Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 2	34	1	1	31	6	14	10	4	4	2
Problem 10	19	3	2	8	4	3	2	1	1	1
Problem 12	21	0	2	11	0	9	1	1	1	1
Problem 13	18	3	5	5	0	10	3	0	0	0
Problem 15	11	0	6	6	2	2	1	1	0	0
Problem 22	9	1	4	11	1	4	1	0	0	0
Problem 23	9	0	3	5	1	5	0	2	2	0
Problem 25	8	2	0	3	2	6	3	2	2	1
Problem 27	6	0	1	5	2	2	1	1	1	0
Toplam	**135**	**10**	**24**	**85**	**18**	**55**	**22**	**12**	**11**	**5**

Bu sayılardan da anlaşılacağı gibi öğrenci fikir ileri sürme (1) ve çıkarım yapma (4) becerilerini diğer göstergelere göre nispeten daha iyi sergilemiştir. İddia etme (2), doğrulama/yanlışlama (5) ve gerekçeyi kontrol etme (7) becerileri en az görülen becerilerdir. Bu kategoriye ait bütün sorularda fikir ileri sürme (1) ve gerekçelendirme (6) göstergelerinin izlerine rastlanmıştır. Seçim yapma (3) ve gerekçeyi kontrol etme (7) becerileri daha iyi olan becerilere göre çok zayıf olsa da birer soru dışında bütün sorularda mevcuttur. "[CD] kirişi [FG] kirişini E noktasında iki eşit parçaya bölmüştür. [FG] çaplı bir yarı çember çizilmiştir. [FG] ye dik olan [EH] bu yarı çemberi H noktasında kesmektedir. Buna göre, $|EH|=|CE|$ olduğunu gösteriniz."

Şekil 5.
Örnek Soru 5



Sorusunda gerekçelendirmeyi kontrol etme (7) ve iddia etme (2) dışında diğer göstergeler az da olsa ortaya çıkmış ancak aşağıdaki kesitten de anlaşılacağı üzere öğrenci akıl yürütmekte zorlanmıştır. Öğrencinin denemme yanılma yoluna giderek açıları kullanması hem fikir ileri sürme (1) hem de seçim yapma (3) becerisidir. Açıortay düşüncesiyle ilerlemesinin nedenini ise açıları kullanabilmek şeklinde açıklaması gerekçelendirme (6) göstergesinin bir izidir.

…

A: Ne düşünüyorsun şu an?

D: Şu an o 90 derecelik açıdan gitmeye çalıştım. Burası 90, yani FG deki FH 90 derece. O zaman HG de 90 derece olacak. HD ile DG 45, 45 olsa dedim orası HD 45 olduğu zaman FC de 45 olacak. Öyle olunca 180 derece eee ondan sonra… (1,3,4,8(a,b))

…

D: Bu FEH 90 derece olduğuna göre HEG de 90 derece olmalı, şöyle tahmin ettim ya da şöyle yaptım. HEG deki E noktasından bir açıortay çizilmiş D noktasına. (1,6)

A: Hmm. Bunun açıortay olduğunu nerden biliyorsun?

D: Değil midir?

A: Bilmiyorum yani neden öyle düşündün diye sordum sadece.

D: 45 olursa en azından belli bir birim veriyim diye. (6)

A: Evet başka?

D: Bilemedim.

A: Tamam düşün biraz daha. Çizdin mi bu arada?

D: Hıhı.

A: Tamam çizim üzerinden de düşünebilirsin. Ek çizimler yapmayı deneyebilirsin. Oradaki 90 drece kullanılabilir.

D: Daha demin onu kullanmaya çalıştım ama bir yere varamadım.

…

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada üstün yetenekli öğrencilerin geometri öğrenme alanında soru türlerine göre akıl yürütme becerilerini ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Öğrenciler soru türünden bağımsız olarak fikir ileri sürme ve çıkarım yapma becerilerini göstermekte diğer becerilere göre daha başarılıdırlar. Özellikle iddia etme (2), doğrulama/yanlışlama (5), gerekçeyi kontrol etme (7) ve argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) becerilerine ait göstergelere çok az rastlanmıştır. Öğrencilerin cevabı belli ve açık uçlu olmayan “ne?” soru türündeki sorularda neredeyse bütün akıl yürütme göstergelerinin izlerine rastlanmıştır. “ne?” soru türünde diğer soru türlerine göre göstergeler açısından daha iyi akıl yürütmüşlerdir. Bunun nedeninin öğrencilerin derslerde onları zorlayan sorularla karşılaşmamaları, genellikle cevabı belli olan bildikleri formüllerle çözebilecekleri rutin sorular çözmeleri olduğu düşünülmektedir. Bundan dolayı öğrencilerin “ne?” soru türündeki sorularda akıl yürütme göstergelerinin daha yoğun olduğu söylenebilir. Bu çalışmada da “ne?” soru köklü sorular rutin soru türleriyle benzer olduklarından Lerch (2004) tarafından yapılan araştırmada da öğrenciler ders kitaplarında bulunan rutin soruları doğru şekilde tamamladıkları ve rutin olmayan onlara yabancı sorularla karşılaştıklarında ilerleme sağlayamadıkları bulgusu da bu sonucu desteklemektedir.

Soru kökü “nasıl?” olan, ilişki kurmayı ve ispat yapmayı gerektiren soru türlerinde ise fikir ileri sürme (1) ve çıkarım yapma (4) göstergeleri ile ağırlıklı olarak karşılaşılsa da “ne?” soru türüne göre bu göstergeler daha nadir bulunmaktadır. Öğrenciler Soru kökü “nasıl?” olan, ilişki kurmayı ve ispat yapmayı gerektiren soru türlerinde zorluklar yaşamıştır. Öğrenciler okulda onları zorlayan bu tür sorularla karşılaşmadıklarını ifade etmişlerdir. Üstün yetenekli öğrencilerin rutinden sıkıldıkları ve onları zorlayan sorularla uğraşmayı sevdikleri bilinmektedir (Özçelik, 2017). Ayrıca literatürde üstün yetenekli öğrencilerin rutin olmayan, işlem basamağı çok olan soruları çözmek istedikleri, problem çözerken genelleme, soyutlama ve akıl yürütme becerilerini kullandıkları (Garofalo, 1993; Montague, 1991; Sriraman, 2003) ortaya koyulmuştur. Dolayısıyla öğrenciler üstün yetenekli oldukları için açık uçlu veya bir kısmı rutin olmayan “nasıl?” soru köklü, ispat yapmayı ve ilişki kurmayı gerektiren sorularda zorlanmamaları gerektiği düşüncesine rağmen elde edilen güncel sonuçlar bunun aksini göstermiştir. “nasıl?” soru köklü, ispat yapmayı ve ilişki kurmayı gerektiren sorularda zorlanmalarının sebebi üstün yetenekli öğrenciler normal başarılı öğrenciler ile bir arada, aynı öğretim programına tabi oldukları için zorlayıcı sorularla derinlemesine çalışacak fırsatlarının olmaması düşünülebilir.

Başka bir bulgu, öğrencilerin sorularda sayısal bir veri aramalarıdır. Ayrıca, soruları çözerken deneme yanılma yoluna başvurdukları durumlar da meydana gelmiştir. Yeşildere ve Akkoç (2011) da öğrencilerin zorlandıkları sorularda deneme yanılma yoluna gittiklerini ifade etmektedir.

Fikir ileri sürme göstergesine göre daha üst düzey düşünme becerisi gerektiren iddia etme, doğrulama/yanlışlama ve argüman zincirleri oluşturma göstergeleri ispat yapmayı ve ilişki kurmayı gerektiren bazı sorularda nadir ortaya çıkmış, bazı sorularda ise izlerine hiç rastlanmamıştır. Özellikle ispat sorularında öğrenciler tek bir durumla örneklendirmeyi yeterli görme eğilimindedirler. Yapılan çalışmalar öğrencilerin ispat yapmada zorluk yaşadıklarını (Albayrak, 2010; Aylar, 2014; Çalışkan, 2012) gösterse de üstün yetenekli öğrencilerden özellikle bu tür açık uçlu olan sorularda üst düzey akıl yürütme becerileri beklenmektedir. Dolayısıyla burada beklenen sonuçla karşılaşılmamıştır.

Bir diğer bulgu, öğrencilerin genellikle sonuç odaklı çalıştıkları ve eğer sonuca ulaşıyorlarsa başka yollar denemekten vazgeçme eğiliminde olduklarıdır.

Öğrencilerin soru kökü "ne?" olan sorularda akıl yürütme göstergelerinin daha net ortaya çıkması, "nasıl?" soru köklü, ispat yapmayı ve ilişki kurmayı gerektiren sorularda daha çok zorlanmaları göstermiştir ki; görmeye alışık oldukları, kendilerine kolay gelen, cevabı belli soruları çözmeye daha istekli olmuşlar ve bu tür sorularda akıl yürütme becerilerini daha iyi sergilemişlerdir. Bunun nedeninin ise, derslerdeki etkinliklerde ve uygulamalarda karşılaştıkları soruların çoğunlukla bu türden olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Daha üst düzey düşünme becerileri gerektiren, yoruma açık, cevabı bilinen formüllerle hesaplanmayan, ispat yapmayı, ilişki kurmayı gerektiren ve "nasıl?" soru köklü sorularda ise zorluklar yaşamışlar ve akıl yürütme becerilerini sergileyemedikleri durumlar bu tür sorularda daha sık görülmüştür. Bunların nedenleri; üstün yetenekli öğrencilerin de üstün yetenekli tanısı koyulmamış normal başarıda öğrenciler gibi aynı eğitim ortamında sınav odaklı rutin sorularla karşılaşmaları olabilir. Ayrıca potansiyellerini daha iyi ortaya çıkaracak olan Bilim ve Sanat Merkezlerinde verilen matematik eğitimi genellikle okulu destekleyecek düzeyde kaldığından onların mevcut potansiyellerini daha ileri düzeye taşıyacak nitelikte olmaması olabilir. Bu merkezlere giriş sınavları da alana özgü üstün yeteneklilikten ziyade zekâ testleri ile yapılmaktadır. Çitil (2018), Türkiye'de üstün yetenekli öğrenciler hakkında sistemli ve planlı bir politika olmadığı, eğitim programları, ölçme araçlarının yetersizliği ve Bilim ve Sanat Merkezlerinde verilen eğitimin verimliliği hakkındaki sorunlara değinmiştir. Yurtdışında yapılan çalışmalara bakıldığında üstün yeteneklilik kavramına ve üstün yetenekli öğrencilere verilen önemin yıllar öncesinden başladığı görülmektedir (Krutetskii, 1976; Renzulli, 1978; Rosenbloom, 1960; Sriraman, 2004). Ancak ülkemizde üstün yetenekli öğrencilerin varlığı ve bu konudaki çalışmalar son yıllarda artmaya başlamıştır. Bu çalışmada öğrencilerin aşina oldukları sorularla karşılaştıklarında daha iyi akıl yürütme becerileri sergilemelerine ve diğer sorularda zorlanmalarına rağmen farklı sorular gördüklerinde hevesleri kırılmamış, onları zorlayan sorularla sıkılmadan uğraşmaya devam ettikleri görülmüştür. Bu çalışmaya dâhil oldukları için mutlu olduklarını, okul hayatlarından farklı sorularla karşılaştıkları için kendilerini geliştirme fırsatı bulduklarını her fırsatta dile getirmişlerdir. Dolayısıyla, üstün yetenekli öğrencilerin potansiyellerini ortaya çıkaracak, onları zorlayacak matematiksel görevlerin verildiği ortamlar sağlanmasının gerekliliği ortaya çıkmıştır. Üstün yetenekli öğrencilerin akıl yürütme becerilerini daha da geliştirmek ve onların potansiyellerini tam kullanabilmelerine imkân vermek için öğretim programlarında rutin olmayan, zorlayıcı, ufuk açıcı problem durumlarının yer almasında fayda vardır. Öğrencilere her zaman doğru cevaba ulaşmanın öneminden ziyade onların gelişimine katkı sağlayacak bir sürecin daha faydalı ve değerli olduğu bilincine sahip olmalarında onlara rehberlik yapmanın gerekli olduğu düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Albayrak B. Ö. (2010). *8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı.* [Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi], Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Arıcı, S. (2012). *The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement and geometric reasoning of tenth-grade students*. [Unpublished Master Thesis], Boğaziçi University, İstanbul.

Aydın Güç, F., Aygün, Y. İ., & Orbay, K. (2021). Üstün yetenekli tanısı konulmuş ve konulmamış öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin karşılaştırılması. *Milli Eğitim Dergisi, 50*(229), 337-362.

Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi.* [Yayınlanmamış DoktoraTezi], Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Aziz, J. A., Juniati, D., & Wijayanti, P. (2020). Students' reasoning with logical mathematical and visual spatial intelligence in geometry problem solving. *International Joint Conference on Science and Engineering, 196*, 203-207.

Battista, M. T. (2017). Mathematical reasoning and sense making. In *Reasoning and Sense Making in the Mathematics Classroom: Grades 3–5* (pp. 1-22). National Council of Teachers of Mathematics.

Berg, D. H., & McDonald, P. A. (2018). Differences in mathematical reasoning between typically achieving and gifted children. *Journal of Cognitive Psychology, 30*(3), 281-291, https: //doi.org/ 10.1080/20445911.2018.1457034

Bernard, M. & Chotimah, S. (September, 2018). Improve student mathematical reasoning ability with open-ended approach using VBA for powerpoint. *Paper presented at the AIP Conference Proceedings 2014.* https://doi.org/10.1063/1.5054417

Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2018). Assessing mathematical competencies: an analysis of Swedish national mathematics tests. *Scandinavian Journal of Educational Research, 62*(1), 109-124.

Ceylan, T. (2012). *Geogebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi*. [Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi],Ankara Üniversitesi, Ankara.

Creswell, J. W. (2016). *Nitel araştırma yöntemleri*. M. Bütün & S. B. Demir (Ed.), (s. 96-101). Ankara: Siyasal Kitabevi.

Çalışkan, Ç. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin ilişkilendirilmesi.* [Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi], Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Çitil, M. (2018). Türkiye'de üstün yeteneklilerin eğitimi politikalarının değerlendirilmesi. *Milli Eğitim, 1*, 143-172.

Dinamit, D. (2020). *Üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel ispat yapma süreçlerinin incelenmesi.* [Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi], Adnan Menderes Üniversitesi, Aydın.

Garofalo, J. (1993). Mathematical problem preferences of meaning-oriented and number-oriented problem solvers. *Journal for the Education of the Gifted, 17,* 26-40.

İlhan, A., & Aslaner, R. (2018). Examination of mathematics teacher candidates' reasoning skills on geometric shapes in terms of university and class level variables. *Inonu University Journal of the Faculty of Education*, *19*(2), 82-97.

Kızıltoprak, A. (2020). *Ortaokul öğrencilerinin dörtgenlere ilişkin geometrik muhakemelerinin gelişimi.* [Yayınlanmamış DoktoraTezi], Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics.* Washington, D.C.: National Academy Press.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* Chicago: University of Chicago Press

Lee, K. H. (2005). Mathematically gifted students' geometrical reasoning and informal proof. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3, pp. 241-248. Melbourne: PME.

Lerch, C. M. (2004). Control decisions and personal beliefs: Their effect on solving mathematical problems. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 21–36.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255–276.

Lithner, J., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Boesen, J., Palm, T. & Palmberg, B. (2010, January). Mathematical competencies: A research framework. *Paper presented at the MADIF7 Mathematics and mathematics education: Cultural and social dimensions,* Stockholm.

Mason, M. M. (1989). Geometric understanding and misconceptions among gifted fourth-eighth graders. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association,* SanFrancisco, CA.

MEB (2017). *Matematik dersi öğretim programı. 1-8.sınıflar.* Ankara.

MEB (2019). *Özel yetenekliler için matematik öğretim programı.* Ankara.

Montague, M. (1991). Gifted and learning disabled gifted students‟ knowledge and use of mathematical problem-solving strategies. *Journal for the Education of the Gifted, 14,* 393-411.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (2015). Mathematical competencies and PISA. K. Stacey, R. Turner (ed.), *Assessing Mathematical Literacy* (s. 35-55). Switzerland: Springer International Publishing.

OECD (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework, PISA.* OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/b25efab8-en.

Özçakır, B., Özdemir, D., & Kıymaz, Y. (2020). Effects of dynamic geometry software on students' geometric thinking regarding probability of giftedness in mathematics. *International Journal of Contemporary Educational Research, 7*(2), 48-61. https://doi.org/10.33200/ijcer.664985

Özçelik, T. (2017). *Üstün yetenekli öğrencilere yönelik geliştirilen farklılaştırılmış matematik dersi öğretim programının etkililiği.* [Yayınlanmamış Doktora Tezi], Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Posamentier, A. and Krulik, S. (1998). *Problem solving strategies for efficient and elegant solutions.* California: Corwin Pres. A Sage Publications.

Posamentier, A. and Salkind, C. T. (1988). *Challenging problems in geometry.* New York: Dover.

Potari, D., Zachariades, T. & Zaslavsky, O. (2009). Mathematics teachers' reasoning for refuting students' invalid claims. *Paper presented at the Congress of the European Society for Research in Mathematics Education 6,* Lyon, France.

Renzulli, J. (1978). What makes giftedness? Re-examining a definition. *Phi Delta Kappan, 60,* 180–184.

Rohana. (2015). The enhancement of student's teacher mathematical reasoning ability through reflective learning. *Journal of Education and Practice, 6*(20), 108–115.

Rosenbloom, P.C. (1960). Teaching gifted children mathematics. In. E. Torrance (Ed.) Talent and Education: present status and future directions: *Papers presented at the 1958 Institute on Gifted Children* (s. 351-370). Minneapolis: University of Minnesota.

Sak, U. (2013). *Üstün zekâlılar.* Vize Yayıncılık, Ankara.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *The Mathematics Teacher, 78*(6), 448-456.

Sriraman, B. (2003). Mathematical giftedness, problem solving, and the ability to formulate generalizations. *The Journal of Secondary Gifted Education, 14,* 151-165.

Sriraman, B. (2004). Gifted ninth graders' notions of proof: Investigating parallels in approaches of mathematically gifted students and professional mathematicians. *Journal for the Education of the Gifted, 27*(4), 267-292.

Steen, L. A. (1999). Twenty question about mathematical reasoning. L. V. Stiff, F. R. Curcio. (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12. 1999 yearbook* (pp. 270-285). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tucker, B., & Hafenstein, N. (1997). Psychological intensities in young gifted children. *Gifted Child Quarterly, 41* (3), 66-75

Uçar, F.M., Uçar, M.B., & Çalışkan, M. (2017). Investigation of gifted students' problem-solving skills. *Journal for the Education of Gifted Young Scientists, 5*(3), 15-28

Winebrenner, S. (2000). Gifted students need an education, too. *Educational Leadership, 58*(1), 52-56.

Yeşildere, S., & Akkoç, H. (2011). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30*, 141-153.

Yıldırım, A & Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldız, A. (2016). The geometric construction abilities of gifted students in solving real – world problems: A case from Turkey. *Malaysian Online Journal of Educational Technology, 4*(4), 53-67.

Yıldız, A. (2022). Examining gifted primary school students' logical reasoning ability. *Turkish Journal of Educational Studies, 9*(1), 84-99.

Yılmaz, K. (2015). *Matematiksel modellerle teorem ispatlarının ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerine, ispatla ilgili görüşlerine ve akademik başarılarına etkisi.* [Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi]. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Yılmaz, K. (2019). *Üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerine göre problem kurma süreçlerinin incelenmesi.* [Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi]. Ahi Evran Üniversitesi, Kırşehir.

Yin, R. K. (2003). *Case study research. Applied Social Research Methods Series,* Vol. 5, SAGE Publications, California, the United States of America.