

## Medyan Sıralı Küme Örneklemesinde Normal Dağılımın Konum Parametresi İçin Shrinkage Tahmin Edicileri

Kübra GÜRSOY<sup>1</sup>, Meral EBEGİL<sup>\*2</sup>, Yaprak Arzu ÖZDEMİR<sup>2</sup>, Fikri GÖKPINAR<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, 06500, Ankara, Türkiye

<sup>2</sup>Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

(Alınış / Received: 25.05.2022, Kabul / Accepted: 21.09.2022, Online Yayınlanma / Published Online: 20.12.2022)

### Anahtar Kelimeler

Sıralı Küme Örneklemesi,  
Medyan Sıralı Küme  
Örneklemesi,  
Ortalama Hata Kare,  
Shrinkage Tahmin Edicisi

**Öz:** Yığına ilişkin bir çıkarıma yapabilmek için genellikle yığın parametrelerinin sapmasız tahmin edicileri kullanılır. Sapmasız tahmin edicilerin büyük varyansa sahip olmaları durumunda, shrinkage tahmin edicileri gibi sapmalı tahmin ediciler tercih edilebilir. Bu çalışmada, normal dağılımın konum parametresi için shrinkage tahmin edicileri, sıralı küme örneklemesi ve medyan sıralı küme örneklemesi kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca sıralı küme örneklemesi ve medyan sıralı küme örneklemesi altında elde edilen shrinkage tahmin edicilerinin ortalama hata kareleri teorik olarak elde edilmiştir. Önerilen tahmin edicilerin etkinliklerini incelemek amacıyla farklı durumlar altında Monte Carlo simülasyon çalışması ile ortalama hata kareleri hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlara göre, medyan sıralı küme örneklemesi kullanılarak elde edilen shrinkage tahmin edicilerinin sıralı küme örneklemesi ve basit tesadüfi örnekleme altında elde edilen shrinkage tahmin edicilerinden daha etkin olduğu gözlemlenmiştir.

## Shrinkage Estimators for the Location Parameter of the Normal Distribution in Median Ranked Set Sampling

### Keywords

Ranked Set Sampling,  
Median Ranked Set  
Sampling,  
Mean Square Error,  
Shrinkage Estimator

**Abstract:** Unbiased estimators of the population parameters are often used to make an inference about the population. In cases where unbiased estimators have large variance, biased estimators such as shrinkage estimators may be preferred. In this study, shrinkage estimators of the location parameter of the normal distribution were obtained under ranked set sampling and median ranked set sampling. In addition, mean square errors of shrinkage estimators were obtained theoretically under ranked set sampling and median ranked set sampling. In order to examine the efficiency of the estimators, the mean square errors were calculated under different conditions using Monte Carlo simulation study. According to the results, it was observed that the shrinkage estimators obtained under median ranked set sampling were more efficient than the shrinkage estimators obtained under ranked set sampling and simple random sampling.

### 1. Giriş

Yığına ilişkin bir çıkarıma yapabilmek için öncelikle yığın parametrelerinin tahmin edilmesi gerekir. Bu amaçla parametrelerin sapmasız tahmin edicileri sıkça kullanılır. Sapmasız tahmin edicilerin büyük varyansa sahip olmaları durumunda, sapmalı tahmin ediciler kullanılabilir. Bu tahmin ediciler sapmalı ancak ortalama hata kare (OHK)'si daha küçüktür. Sapmalı tahmin edicileri elde etme yöntemlerinden bir tanesi shrinkage tahmin yöntemidir. Shrinkage tahmin yöntemi, parametrenin önsel bilgisini kullanan ve bu önsel bilgi ile parametrenin tahmin edicisine belli bir ağırlık veren bir yöntemdir

[1,2,3,4,5]. Thompson (1968) yığın ortalamasının en iyi doğrusal sapmasız tahmin edicisi (ENDOST)'nin OHK değerini shrinkage faktörü yardımıyla küçülterek daha iyi bir tahmin edici elde etmiştir [1]. Diğer taraftan, bazı araştırmalarda örnek birimlerinin ilgilenilen değişken bakımından ölçümünün emek, zaman ve maliyet anlamında pahalı olduğu durumlarla karşılaşılabilir. Bu durumda, yığına en iyi şekilde temsil edecek küçük çaplı bir örnekle çalışmaya imkan tanıyan bir örnekleme yöntemine gereksinim duyulur [6]. Bu tür bir örnekleme yöntemi olarak, Sıralı Küme Örneklemesi (SKÖ) ile SKÖ'nün çeşitli modifikasyonları önerilmiştir [7]. Önerilen SKÖ yöntemlerinin parametre

tahminlerinde Basit Tesadüfi Örneklemeye (BTÖ) yöntemi ile karşılaştırıldığında daha yüksek etkinlik değerlerine sahip olduğu gözlenmiştir. SKÖ yönteminde örneklem işlemi iki aşamada yapılmaktadır. İlk aşamada gözlem birimleri hassas ölçüm gerektirmeden görsel olarak veya yardımcı bir değişkene göre sıralanmakta olup, elde edilen tahminler sıralama hatalarına karşı duyarlıdır. SKÖ yöntemlerinden biri olan Medyan Sıralı Küme Örneklemesi (MSKÖ) ise özellikle tek modlu olan simetrik dağılımlar için daha etkin tahminlerin elde edilmesini sağlayan ve her bir kümedeki medyan değerlerinin ölçülmesine dayanan bir yöntemdir.

McIntyre 1952 yılında meralardaki ortalama ürün miktarını tahmin etmek üzere, SKÖ'ni önermiştir [7]. Önerilen bu yöntemin teorisi ilk olarak Takahashi ve Wakimoto (1968) tarafından oluşturulmuştur [8]. SKÖ'de sıralama hatası durumu ise Dell ve Clutter (1972) tarafından incelenmiştir [9]. MacEachern ve diğ. (2002) ise SKÖ'de varyans tahmin edicisini önermişlerdir [10].

Muttalak (1997), tek modlu olan simetrik dağılımlarda yığın ortalamasını tahmin etmek ve SKÖ'de sıralama hatasını azaltmak için MSKÖ yöntemini önermiştir. Bu yöntem, özellikle normal dağılımda ortalamanın tahmininde SKÖ'ye göre daha etkin sonuçlar vermektedir [11]. Daha sonra Muttalak(1998) yığın ortalamasının regresyon tahmini için de MSKÖ'yü kullanmıştır [12]. Chen (2003), çeyrekliklerin tahmin edilmesinde SKÖ ve MSKÖ'yü kullanarak, MSKÖ ile bulunan tahmin edicilerin BTÖ ile bulunan tahmin edicilerden daha etkin olduğunu göstermiştir [13]. Jemain ve Al-Omari (2008), çok aşamalı MSKÖ' yü yığın ortalamasını tahmin etmekte kullanmışlardır [14]. SKÖ ve MSKÖ ile örnek seçimi yapılarak, normal ve üstel dağılıma sahip yığın ortalamasının hipotez testi Tseng ve Wu (2007) tarafından yapılmıştır [15]. Muttalak ve diğ. (2010), simetrik dağılımlarda yığın ortalamasını tahmin etmek için MSKÖ kullanarak shrinkage ve önsel test işlemine dayalı yeni bir tahmin metodu önermişlerdir [16]. Koyuncu (2018), bir ve iki yardımcı değişken kullanarak MSKÖ ve neoterik SKÖ'de yeni regresyon tahmin edicileri önermiştir [17]. Önerilen tahmin edicilerin SKÖ'ye göre daha etkin oldukları belirlenmiştir. Ebeğil ve diğ. (2021) regresyon analizinde çoklu bağlantı olması durumunda MSKÖ ile shrinkage tahmin edicilerini elde ederek, bu tahmin edicileri BTÖ ve SKÖ ile elde edilen tahmin edicilerle karşılaştırmışlardır [18]. Bunun sonucunda, MSKÖ kullanılarak bulunan shrinkage tahmin edicilerinin daha etkin sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Ayrıca Koyuncu ve Al-Omari (2021), genelleştirilmiş sağlam regresyon tahmin edicilerini SKÖ ve MSKÖ altında incelemişlerdir [19].

Bu çalışmada, öncelikle shrinkage tahmin yöntemi tanıtılarak, normal dağılımın konum parametresi için shrinkage tahmin yöntemi ile elde edilen sapmalı tahmin ediciler SKÖ ve MSKÖ altında elde edilmiştir.

Daha sonra, bu tahmin edicilerin OHK'leri bulunarak, farklı durumlardaki değerlerini incelemek üzere simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyon çalışması ile MSKÖ altında önerilen tahmin edicinin bilinen BTÖ ve SKÖ altında önerilen tahmin edicilere göre OHK'leri elde edilmiştir.

## 2. Materyal ve Metot

### 2.1. Shrinkage tahmin yöntemi

Shrinkage tahmin yöntemi kullanılarak sapmalı ve daha küçük varyanslı yeni bir tahmin edici, parametre için daha önceden belirlenen sapmasız bir tahmin edicinin OHK'sinin shrinkage faktörü olarak adlandırılan  $c$  gibi bir sabitle çarpılması yardımıyla elde edilir [1]. Bu çalışmada ise, Thompson (1968) tarafından önerilen shrinkage tahmin yöntemi kullanılarak normal dağılımın konum parametresi için farklı shrinkage tahmin edicileri önerilmiştir.

Thompson (1968), yığın ortalamasının ENDOST'unu kullanarak, bir "önsel bilgi" doğrultusunda shrinkage tahmin edicisini elde etmiştir.

$\theta$  parametresi için, yeni bir shrinkage tahmin edicisi aşağıdaki gibi önerilmiştir [1, 2].  $\theta$  parametresi için, yeni bir shrinkage tahmin edicisi  $c$  sabiti ve dolayısıyla onun tahmin edicisi olan  $\hat{c}$  değeri ile aşağıdaki gibi elde edilir [1, 2].

$$\hat{\theta}_s = \hat{c}\hat{\theta} + (1 - \hat{c})\theta_0 \quad (1)$$

Burada  $c$  ve  $\hat{c}$   $[0, 1]$  arasında değer alır.  $\hat{\theta}$ ,  $\theta$  parametresinin tahmin edicisi ve  $\theta_0$ ,  $\theta$  parametresinin önsel değeridir. Eşitlik 1'de gerekli işlemler yapıldığında Eşitlik 2'ye ulaşılır.

$$\hat{\theta}_s = \hat{c}(\hat{\theta} - \theta_0) + \theta_0 \quad (2)$$

Yukarıda önerilen tahmin edicide yer alan  $c$  parametresi, OHK'yı en küçükleyecek şekilde belirlenir [1]. Buradan,  $\hat{\theta}_s$  tahmin edicisine ait OHK aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} E[c(\hat{\theta} - \theta_0) - (\theta - \theta_0)]^2 \\ = c^2[V(\hat{\theta}) + \{E(\hat{\theta} - \theta_0)\}^2] \\ - 2c(\theta - \theta_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Eşitlik 3'ün  $c$ 'ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde, shrinkage faktörü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$c = \frac{(\theta - \theta_0)^2}{V(\hat{\theta}) + (\theta - \theta_0)^2} \quad (4)$$

$c$  shrinkage faktörünün,

$$\hat{c} = \frac{(\hat{\theta} - \theta_0)^2}{(\hat{\theta} - \theta_0)^2 + \widehat{Var}(\hat{\theta})} \quad (5)$$

şeklinde oluşturulan tahmin edicisi Eşitlik 2'de yerine yazıldığında Eşitlik 6'daki shrinkage tahmin edicisi elde edilir.

$$\hat{\theta}_s = \frac{(\hat{\theta} - \theta_0)^2}{(\hat{\theta} - \theta_0)^2 + \widehat{Var}(\hat{\theta})} (\hat{\theta} - \theta_0) + \theta_0 \quad (6)$$

Sonuç olarak, normal dağılımın  $\mu$  parametresine için önerilen shrinkage tahmin edicisi,  $\bar{X}$  örnek ortalaması istatistiği ve  $\hat{\theta} = \bar{X}$  olmak üzere, Eşitlik 7'deki gibi oluşturulabilir.

$$\hat{\mu}_s = \frac{(\bar{X} - \mu_0)^2}{(\bar{X} - \mu_0)^2 + s^2/n} (\bar{X} - \mu_0) + \mu_0 \quad (7)$$

### 2.1.1. Normal dağılımın $\mu$ parametresi için shrinkage tahmin edicisi

$X$  rassal değişkeni ortalaması  $\mu$  ve varyansı  $\sigma^2$  olan normal dağılıma sahip olsun.  $\mu$  parametresinin ENDOST'u örnek ortalaması istatistiği  $\bar{X}$ ' dir. Burada önsel bilgi  $\mu_0 = 0$  olduğunda,  $\mu$  parametresinin farklı bir tahmin edicisi  $\hat{\mu} = c\bar{X}$  olarak ele alınabilir. Bu durumda risk fonksiyonu olarak kullanılan OHK' yi en küçükleyecek  $c$  değeri, Eşitlik 4' de gerekli işlemler yapıldığında Eşitlik 8' deki ifade elde edilir.

$$c = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2/n} \quad (8)$$

Sonuç olarak,  $\mu$  parametresi için yeni bir tahmin edici,

$$\hat{\mu}_s = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2/n} \bar{X} \quad (9)$$

şeklinde elde edilir.

### 2.1.2. Normal dağılımın $\mu$ parametresinin shrinkage tahmin edicisi için OHK'nin elde edilmesi

Bu bölümde  $\mu$  parametresine ilişkin shrinkage tahmin edicisinin OHK'sinin,  $\mu$  parametresinin ENDOST'u olan örnek ortalaması  $\bar{X}$ 'nin OHK'sinden daha küçük olduğu gösterilmiştir. Shrinkage tahmin edicisinin OHK değeri Eşitlik 10'da verilmiştir.

$$OHK(c\bar{X}) = E(c\bar{X} - \mu)^2 \quad (10)$$

Eşitlik 8'deki  $c$  değeri OHK fonksiyonunda yerine yazıldığında,

$$OHK(c\bar{X}) = E(c\bar{X} - \mu)^2 = \frac{\mu^2 \sigma^2/n}{\mu^2 + \sigma^2/n} \quad (11)$$

sonucuna ulaşılır.  $OHK(\bar{X}) = Var(\bar{X}) = \sigma^2/n$  olduğu bilinmektedir. Buradan hareketle,  $OHK(c\bar{X}) \leq OHK(\bar{X})$  eşitsizliği yazılabilir.

$c$  shrinkage faktörü hem  $\mu$  parametresinin hem de  $\sigma^2$  parametresinin bir fonksiyonudur. Bu nedenle hem  $\mu$  hem de  $\sigma^2$  yerine tahmin edicileri kullanılarak  $c$  shrinkage faktörünü tahmin etmek mümkündür.  $\mu$  parametresi yerine örnek ortalaması istatistiği  $\bar{X}$  ve  $\sigma^2$  parametresi yerine ise örnek varyansı istatistiği;

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (12)$$

kullanılarak,  $c$  için bir tahmin elde edilebilir. Böylece;

$$\hat{\mu}_s = c\bar{X} = \frac{\bar{X}^2}{\bar{X}^2 + S^2/n} \bar{X} \quad (13)$$

ifadesine ulaşılır.

### 2.1.3. SKÖ altında normal dağılımın $\mu$ parametresinin shrinkage tahmin edicisine ilişkin OHK

SKÖ'de örnek seçim işlemi iki aşamada gerçekleştirilir. İlk aşamada rasgele örneğe seçilen  $m^2$  birim,  $m$  çaplı  $m$  kümeye rasgele dağıtılarak, her bir küme içindeki birimler hassas olmayan ucuz ve kolay bir ölçümle sıralanır. Daha sonra, küme sırasına göre  $i'$  inci kümedeki  $i'$  inci sırada yer alan birim ölçüm için seçilir ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Böylece  $m^2$  büyüklüğündeki bir örnekten  $m$  adet birim seçilerek hassas ölçümleri yapılır. Bu işlem gerekli  $n$  örnek çapını elde etmek üzere  $r$  kez tekrarlanabilir ( $n=mr$ ).

SKÖ altında yığın ortalaması  $\mu'$  nün tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\bar{X}_{SKÖ} = \frac{1}{mr} \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^m X_{i(i:m)j} \quad (14)$$

Burada,  $X_{i(i:m)j}$  sıralamada hata yapılmadığı varsayımı altında,  $j'$  inci tekrarda  $m$  çaplı  $i'$  inci kümedeki  $i'$  inci sıra istatistiğini ( $i = 1, 2, \dots, m$  ve  $j = 1, 2, \dots, r$ ) ifade etmektedir.  $i.$  sıra istatistiğinin ortalaması  $\mu_{(i:m)}$  olmak üzere,  $\bar{X}_{SKÖ}$  tahmin edicisinin varyansı

$$Var(\bar{X}_{SKÖ}) = \frac{\sigma^2}{rm} - \frac{1}{m^2 r} \sum_{i=1}^m (\mu_{(i:m)} - \mu)^2 \quad (15)$$

şeklinde elde edilir [20].

SKÖ'de konum parametresi  $\mu$  için shrinkage tahmin yöntemine ilişkin OHK'yi elde etmek üzere, öncelikle  $\mu$  parametresinin farklı bir tahmin edicisi  $\hat{\mu} = c\bar{X}_{SKÖ}$  kullanılmıştır. Buradan, OHK'yi en küçükleyecek  $c$  değeri Eşitlik 16'daki gibidir.

$$c = \frac{\mu^2}{V(\bar{X}_{SKÖ}) + \mu^2} = \frac{\mu^2}{\sigma^2/n - \frac{1}{nm} \sum (\mu_{(i)} - \mu)^2 + \mu^2} \quad (16)$$

SKÖ ile Shrinkage tahmin edicinin OHK' sı Eşitlik 17'deki gibi ifade edilir

$$OHK(c\bar{X}_{SKÖ}) = E(c\bar{X}_{SKÖ} - \mu)^2 \quad (17)$$

Bu fonksiyonda  $c$  değeri yerine yazıldığında, Eşitlik 18 elde edilir.

$$\begin{aligned} OHK(c\bar{X}_{SKÖ}) &= E \left[ \frac{\mu^2 \bar{X}_{SKÖ}}{\sigma^2/n - \frac{1}{nm} \sum (\mu_{(i)} - \mu)^2 + \mu^2} - \mu \right]^2 \\ &= c \left( \sigma^2/n - \frac{1}{nm} \sum (\mu_{(i)} - \mu)^2 \right) \\ &= cV(\bar{X}_{SKÖ}) \end{aligned} \quad (18)$$

Yani  $0 < c \leq 1$  olmak üzere  $OHK(c\bar{X}_{SKÖ}) = cV(\bar{X}_{SKÖ}) \leq OHK(c\bar{X})$  olacaktır [21].

SKÖ altında elde edilen shrinkage faktörleri;

$$\begin{aligned} S_1 &= c=1 \\ S_2 &= c = \mu^2 / (V(\bar{X}_{SKÖ}) + \mu^2) \\ S_3 &= \hat{c} = \mu^2 / (\hat{V}(\bar{X}_{SKÖ}) + \mu^2) \\ S_4 &= \hat{c} = \bar{X}_{SKÖ}^2 / (V(\bar{X}_{SKÖ}) + \bar{X}_{SKÖ}^2) \\ S_5 &= \hat{c} = \bar{X}_{SKÖ}^2 / (\hat{V}(\bar{X}_{SKÖ}) + \bar{X}_{SKÖ}^2) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

#### 2.1.4. MSKÖ altında shrinkage tahmin edicisi için OHK'nin elde edilmesi

MSKÖ ile örnek seçim işlemi örnek çapının tek ve çift olduğu durumlara göre değişkenlik göstermektedir. İlk aşamada rasgele örneğe seçilen  $m^2$  birim,  $m$  çaplı

$m$  kümeye rasgele dağıtılarak, her bir küme içindeki birimler hassas olmayan ucuz ve kolay bir ölçümle sıralanır. Örnek çapının tek olduğu durumda her bir kümedeki medyan değeri hassas ölçüm için seçilirken, örnek çapının çift olduğu durumda ilk  $m/2$  kümedeki  $(m/2)$ . sıradaki birim ve geriye kalan  $m/2$  kümedeki  $[(m/2) + 1]$ . sıradaki birim hassas ölçüm için çekilir. Bu işlemler  $r$  kez tekrarlanırsa,  $n = mr$  gözlem birimi ilgilenilen değişkene göre hassas ölçüm için seçilmiş olur (Muttlak, 1997).  $m$  tek olduğu durumda yığın ortalamasının tahmin edicisi

$$\bar{X}_{MSKÖ} = \frac{1}{mr} \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^m X_{i(\frac{m+1}{2}:m)_j} \quad (19)$$

ve bu tahmin edicinin varyansı

$$Var(\bar{X}_{MSKÖ}) = \frac{1}{mr} \sigma^2 \binom{m+1}{2:m} \quad (20)$$

şeklinde oluşur.

$m$  çift olduğu durumda ise yığın ortalamasının tahmin edicisi Eşitlik 21'deki gibi,

$$\bar{X}_{MSKÖ} = \frac{1}{mr} \sum_{j=1}^r \left[ \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} X_{i(\frac{m}{2}:m)_j} + \sum_{i=(\frac{m}{2}+1)}^m X_{i(\frac{m}{2}+1:m)_j} \right] \quad (21)$$

ve bu tahmin edicinin varyansı ise

$$Var(\bar{X}_{MSKÖ}) = \frac{1}{2mr} \left[ \sigma^2 \binom{m}{2:m} + \sigma^2 \binom{m}{2+1:m} \right] \quad (22)$$

olarak elde edilir.

$\mu$  parametresinin farklı bir tahmin edicisi  $\hat{\mu} = c\bar{X}_{MSKÖ}$  olarak ele alınmıştır. Burada  $0 < c \leq 1$  dir. Buradan, OHK' yi en küçükleyecek  $c$  değeri Eşitlik 23'deki gibi elde edilir.

$$c = \frac{\mu^2}{V(\bar{X}_{MSKÖ}) + \mu^2} \quad (23)$$

MSKÖ altında shrinkage tahmin edicisinin OHK' si Eşitlik 24'deki gibi elde edilir.

$$OHK(c\bar{X}_{MSKÖ}) = E(c\bar{X}_{MSKÖ} - \mu)^2 \quad (24)$$

Eşitlik 19'da verilen  $c$  değerinde  $m$  tek iken Eşitlik 20'de verilen varyans formülü yerine yazıldığında, OHK yi en küçükleyecek  $c$  değeri Eşitlik 25'deki gibi oluşur.

$$c = \frac{\mu^2}{\frac{1}{mr} \left( \sigma^2 \binom{m+1}{2:m} \right) + \mu^2} \quad (25)$$

m tek iken Eşitlik 25' deki c değeri Eşitlik 24' deki OHK fonksiyonunda yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
 & OHK(c\bar{X}_{MSK\hat{O}}) \\
 &= E \left[ \frac{\mu^2}{\frac{1}{mr} \left( \sigma^2 \left( \frac{m+1}{2}; m \right) \right) + \mu^2} \bar{X}_{MSK\hat{O}} - \mu \right]^2 \\
 &= c \left[ \frac{1}{mr} \left( \sigma^2 \left( \frac{m+1}{2}; m \right) \right) \right] \\
 &= cVar(\bar{X}_{MSK\hat{O}})
 \end{aligned} \quad (26)$$

elde edilir.

Benzer şekilde, Eşitlik 23' de verilen c değerinde m çift iken Eşitlik 22'de verilen varyans formülü yerine yazıldığında, OHK yi en küçükleyecek c değeri Eşitlik 27' deki gibi oluşur.

$$c = \frac{\mu^2}{\frac{1}{2mr} \left( \sigma^2 \left( \frac{m}{2}; m \right) + \sigma^2 \left( \frac{m+1}{2}; m \right) \right) + \mu^2} \quad (27)$$

m çift iken Eşitlik 27' deki c değeri Eşitlik 26' daki OHK fonksiyonunda yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned}
 & OHK(c\bar{X}_{MSK\hat{O}}) \\
 &= E \left[ \frac{\mu^2 \cdot \bar{X}_{MSK\hat{O}}}{\frac{1}{2mr} \left( \sigma^2 \left( \frac{m}{2}; m \right) + \sigma^2 \left( \frac{m+1}{2}; m \right) \right) + \mu^2} - \mu \right]^2 \\
 &= c \left[ \frac{1}{2mr} \left( \sigma^2 \left( \frac{m}{2}; m \right) + \sigma^2 \left( \frac{m+1}{2}; m \right) \right) \right] \\
 &= cVar(\bar{X}_{MSK\hat{O}})
 \end{aligned} \quad (28)$$

Eşitlik 28'deki sonuca ulaşılır.

Ayrıca MSKÖ altında elde edilen shrinkage faktörleri;

$$\begin{aligned}
 S_1 &= c = 1 \\
 S_2 &= c = \mu^2 / (V(\bar{X}_{MSK\hat{O}}) + \mu^2) \\
 S_3 &= \hat{c} = \mu^2 / (\hat{V}(\bar{X}_{MSK\hat{O}}) + \mu^2) \\
 S_4 &= \hat{c} = \bar{X}_{MSK\hat{O}}^2 / (V(\bar{X}_{MSK\hat{O}}) + \bar{X}_{MSK\hat{O}}^2) \\
 S_5 &= \hat{c} = \bar{X}_{MSK\hat{O}}^2 / (\hat{V}(\bar{X}_{MSK\hat{O}}) + \bar{X}_{MSK\hat{O}}^2)
 \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

### 3. Bulgular

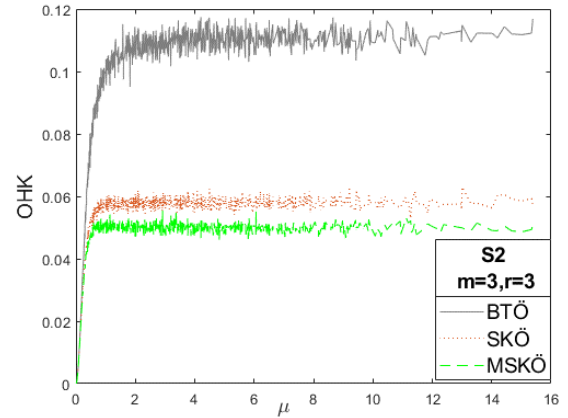
#### 3.1. Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, SKÖ ve MSKÖ yöntemleri altında elde edilmiş shrinkage tahmin edicileri ele alınmıştır.

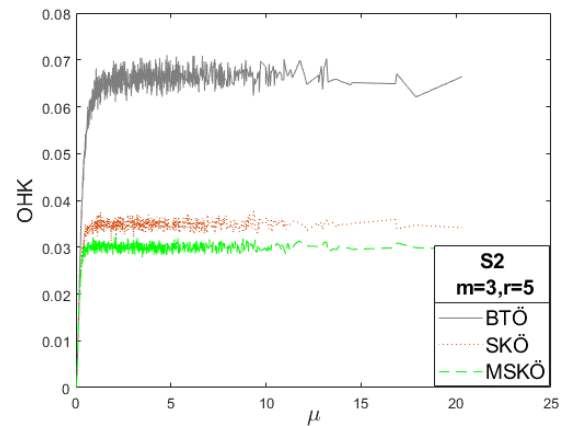
Monte Carlo simülasyon yöntemi kullanılarak, bu tahmin edicilerin BTÖ yöntemi altında elde edilmiş shrinkage tahmin edicisine göre etkinlikleri incelenmiştir. Standart Normal dağılımdan, küme sayısı  $m=3,5,7$  ve tekrar sayısı  $r=3,5,7$  olacak şekilde 3000 tekrarlı veri üretilmiştir. SKÖ, MSKÖ ve BTÖ yöntemleri altında bulunan tahmin edicilerin OHK değerleri aşağıdaki adımlar izlenerek hesaplanmıştır.

- 1) Belirlenen standart normal dağılım altında, BTÖ, SKÖ ve MSKÖ yöntemlerine uygun olacak şekilde belirlenen küme çapı ve tekrar sayısına göre tesadüfi olarak örnek birimleri üretilir.
- 2) Seçilen örneklerden yığın ortalamasına ilişkin shrinkage tahmin edicisi hesaplanır.
- 3) 1. ve 2. adım 3000 kez tekrarlanarak yığın ortalamasına ilişkin tahmin değerlerinin ortalama, varyans ve OHK değerleri hesaplanır.

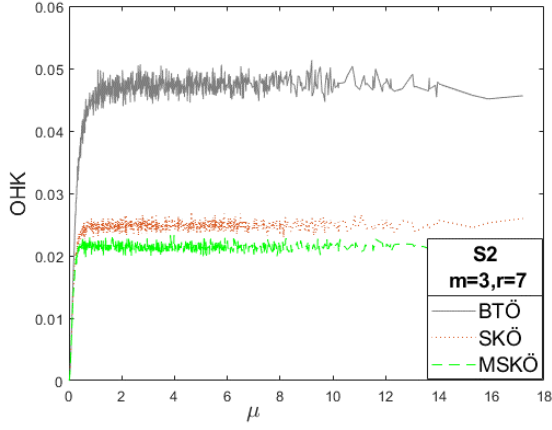
SKÖ, MSKÖ ve BTÖ yöntemleri ile normal dağılımın konum parametresi için elde edilen S2, S3, S4, S5 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin OHK değerleri Şekil 1-36 arasında gösterilmektedir.



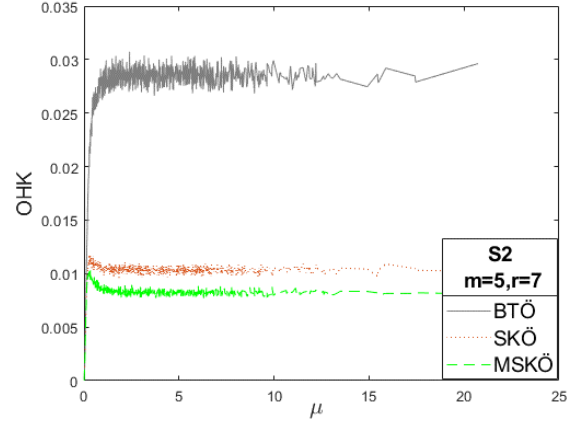
Şekil 1. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S2 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=3, r=3$  iken OHK değerleri



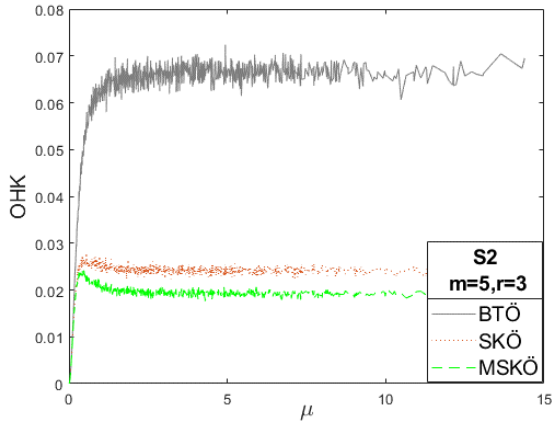
Şekil 2. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S2 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=3, r=5$  iken OHK değerleri



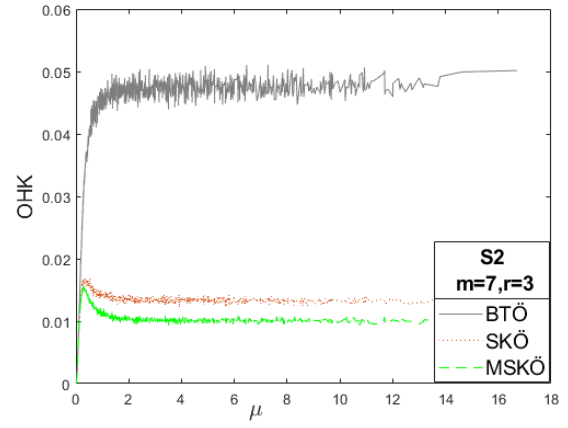
Şekil 3. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S2 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=3, r=7$  iken OHK değerleri



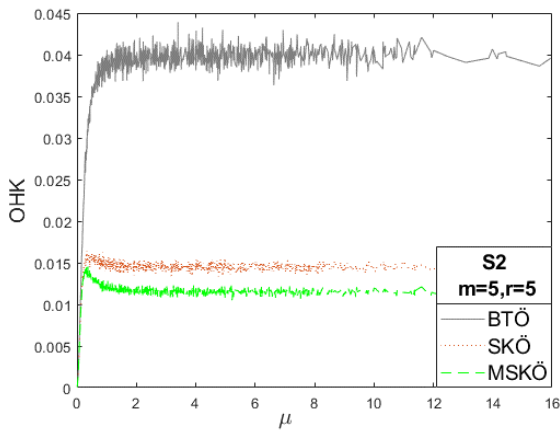
Şekil 6. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S2 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=5, r=7$  iken OHK değerleri



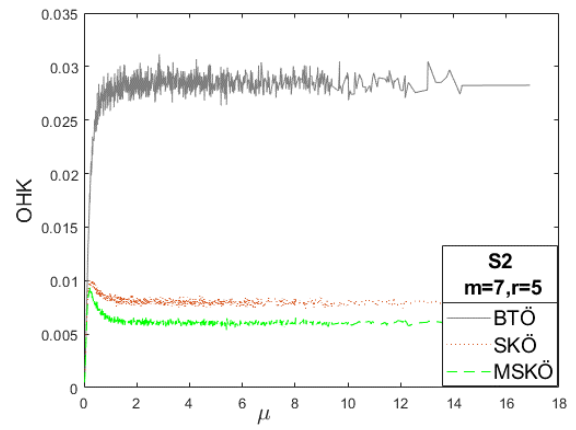
Şekil 4. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S2 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=5, r=3$  iken OHK değerleri



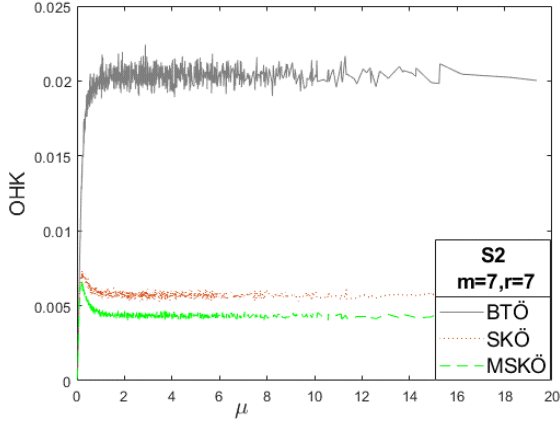
Şekil 7. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S2 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=7, r=3$  iken OHK değerleri



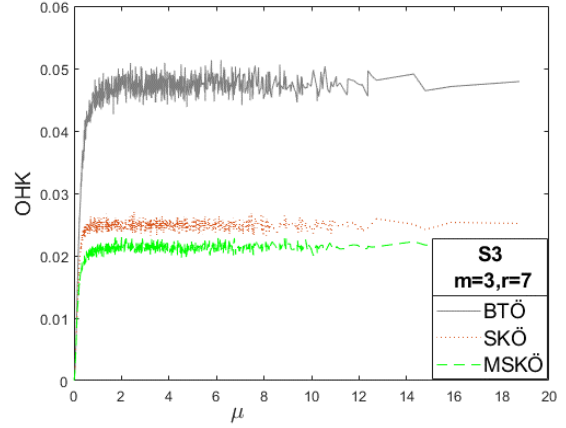
Şekil 5. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S2 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=5, r=5$  iken OHK değerleri



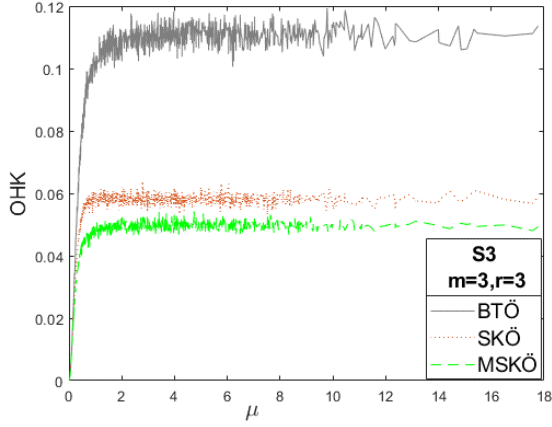
Şekil 8. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S2 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=7, r=5$  iken OHK değerleri



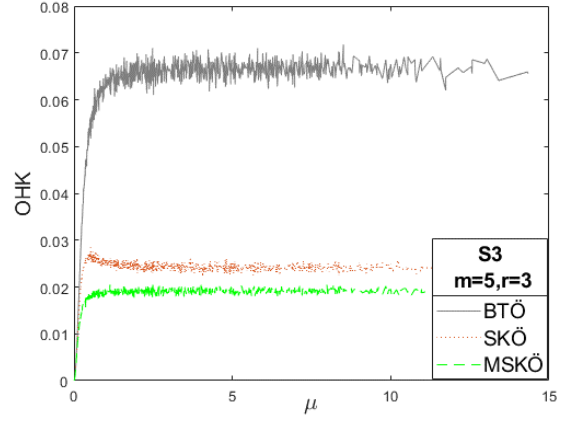
Şekil 9. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S2 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=7, r=7$  iken OHK değerleri



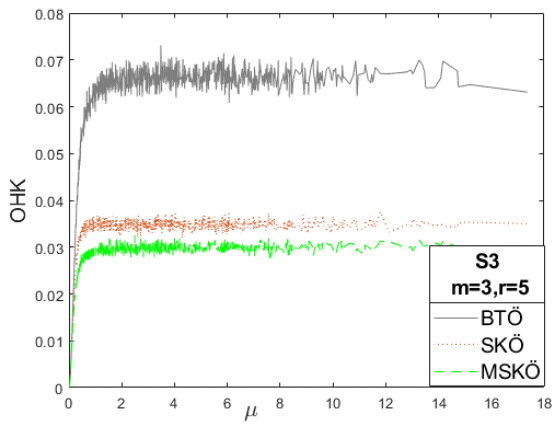
Şekil 12. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S3 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=3, r=7$  iken OHK değerleri



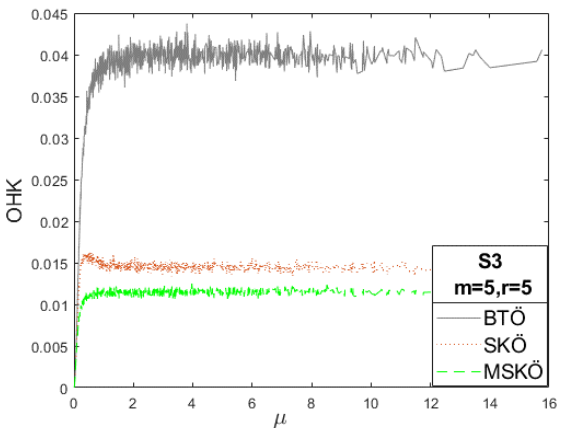
Şekil 10. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S3 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=3, r=3$  iken OHK değerleri



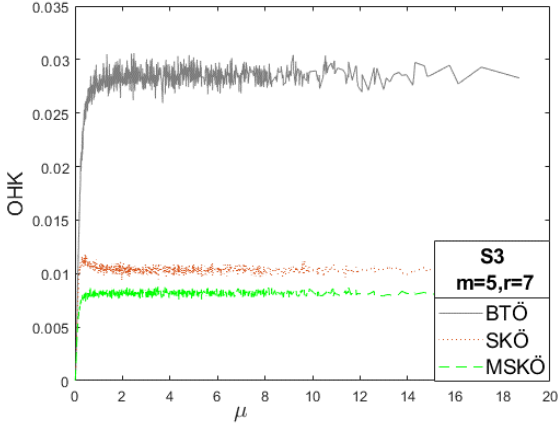
Şekil 13. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S3 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=5, r=3$  iken OHK değerleri



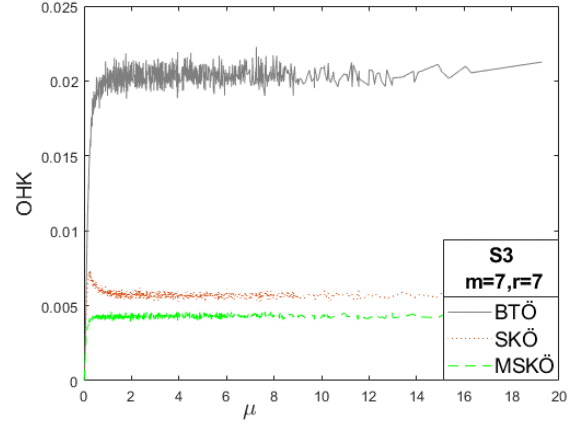
Şekil 11. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S3 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=3, r=5$  iken OHK değerleri



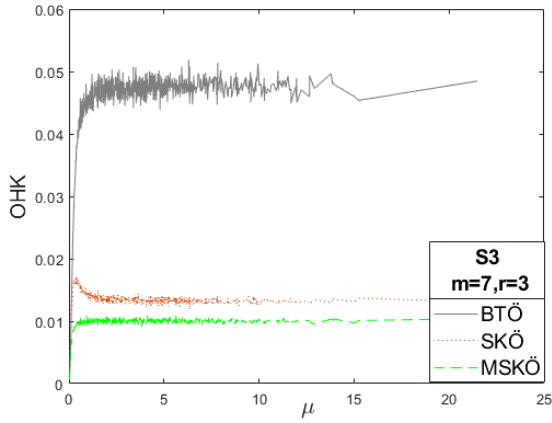
Şekil 14. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S3 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=5, r=5$  iken OHK değerleri



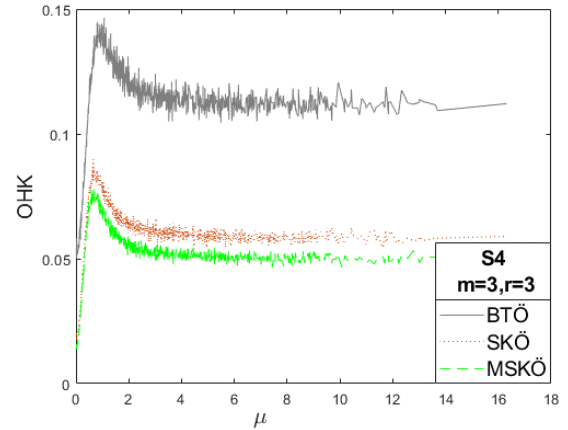
Şekil 15. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S3 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=5, r=7$  iken OHK değerleri



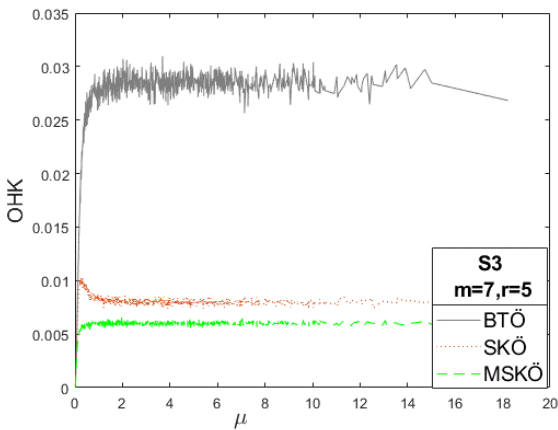
Şekil 18. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S3 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=7, r=7$  iken OHK değerleri



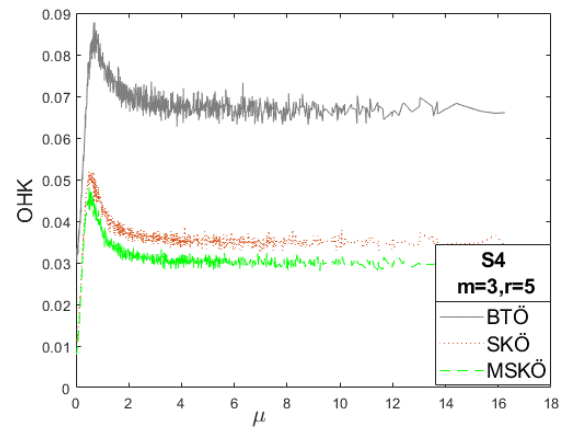
Şekil 16. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S3 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=7, r=3$  iken OHK değerleri



Şekil 19. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S4 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=3, r=3$  iken OHK değerleri

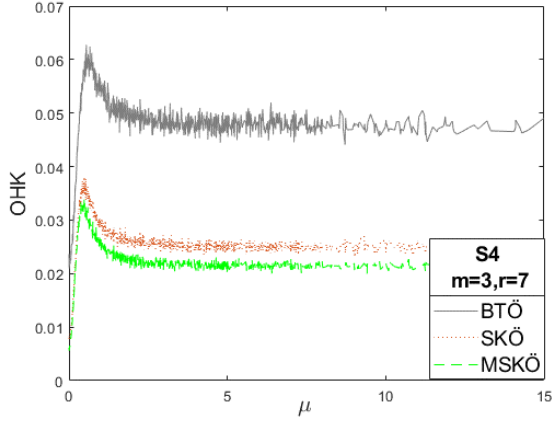


Şekil 17. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S3 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=7, r=5$  iken OHK değerleri

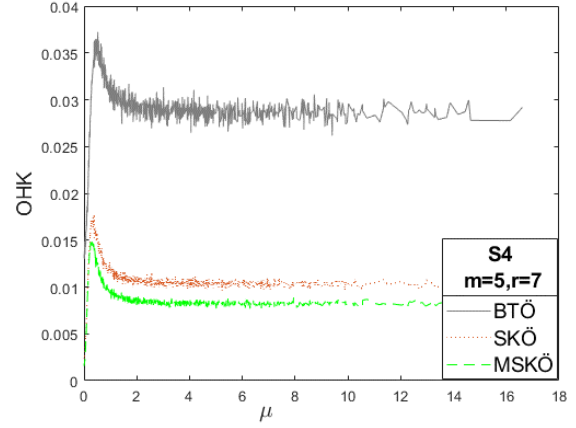


Şekil 20. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S4 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=3, r=5$  iken OHK değerleri

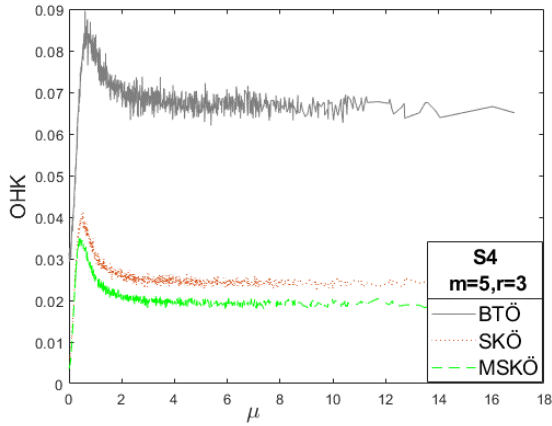




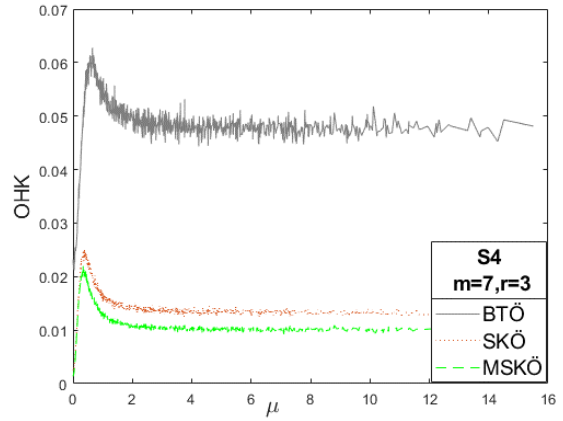
Şekil 21. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S4 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=3, r=7$  iken OHK değerleri



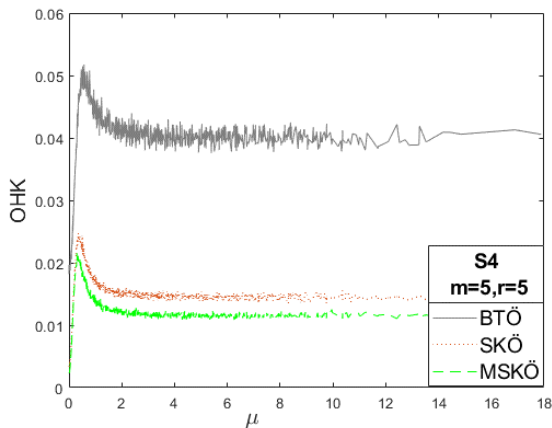
Şekil 24. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S4 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=5, r=7$  iken OHK değerleri



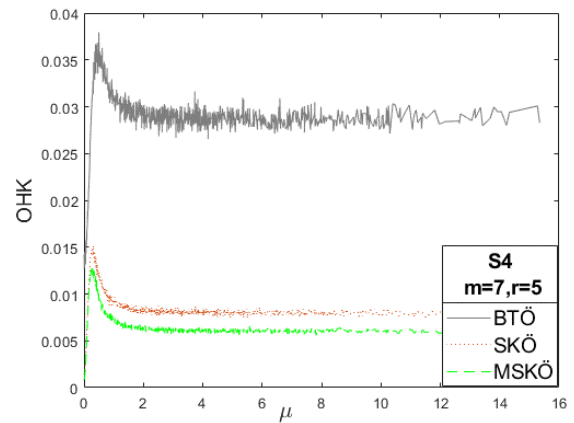
Şekil 22. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S4 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=5, r=3$  iken OHK değerleri



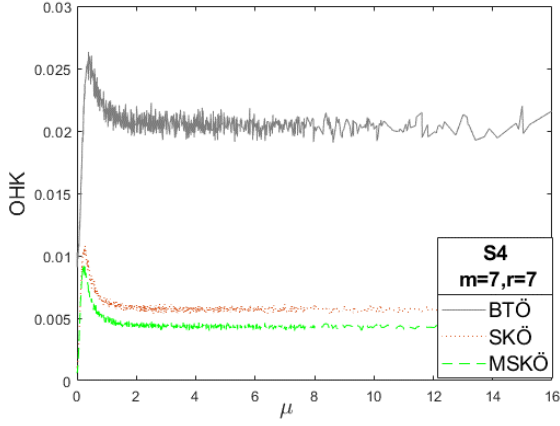
Şekil 25. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S4 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=7, r=3$  iken OHK değerleri



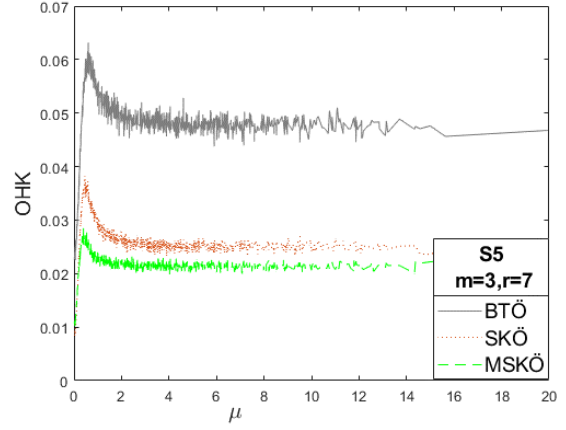
Şekil 23. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S4 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=5, r=5$  iken OHK değerleri



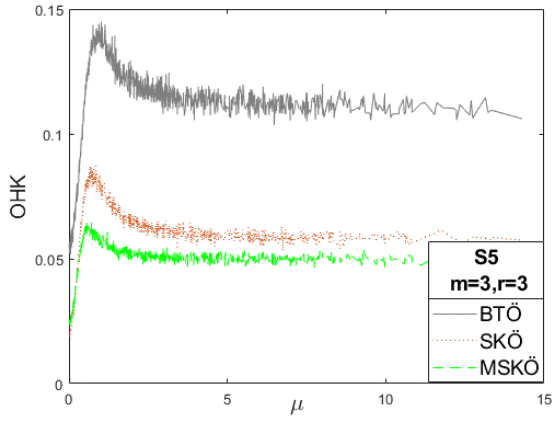
Şekil 26. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S4 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=7, r=5$  iken OHK değerleri



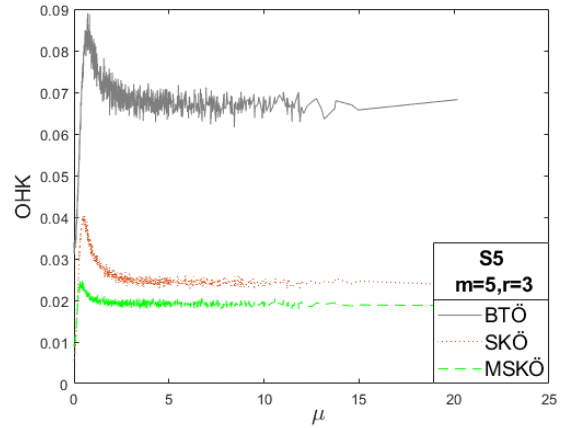
Şekil 27. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S4 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=7, r=7$  iken OHK değerleri



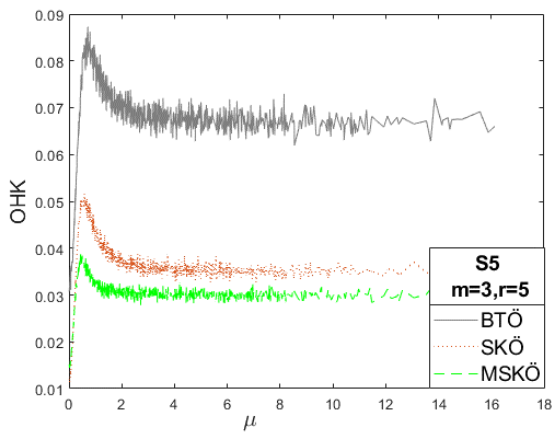
Şekil 30. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S5 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=3, r=7$  iken OHK değerleri



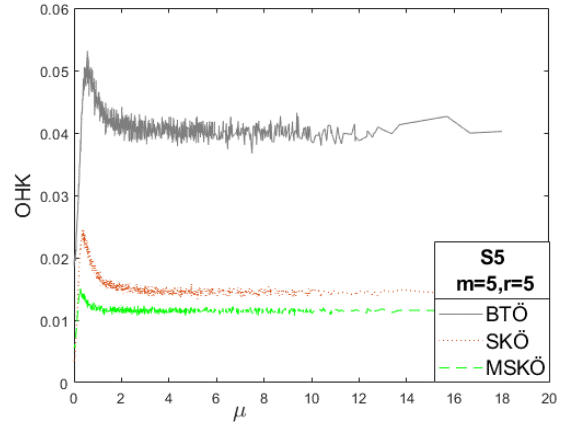
Şekil 28. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S5 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=3, r=3$  iken OHK değerleri



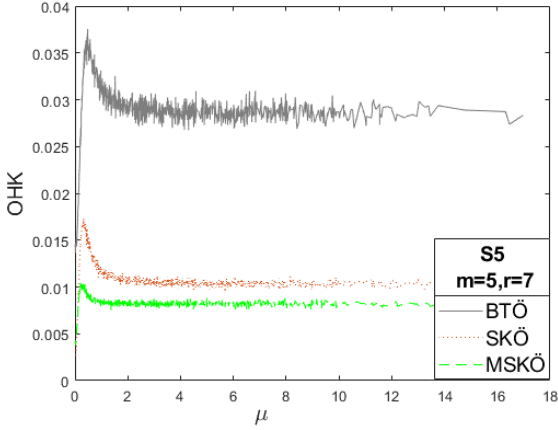
Şekil 31. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S5 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=5, r=3$  iken OHK değerleri



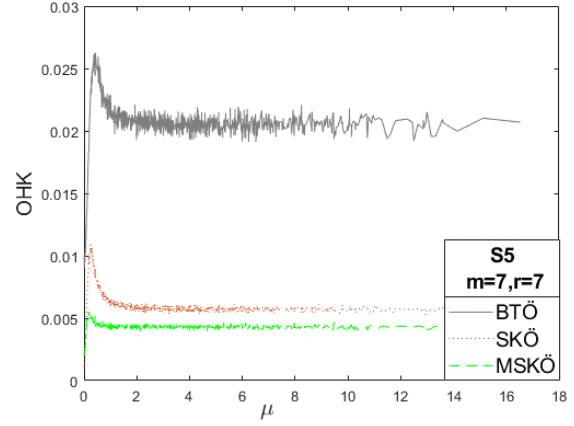
Şekil 29. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S5 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=3, r=5$  iken OHK değerleri



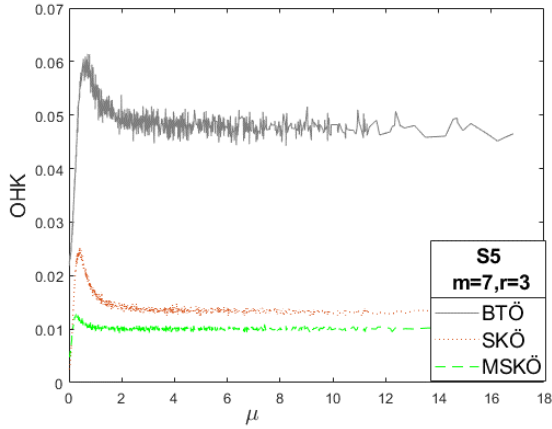
Şekil 32. BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S5 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=5, r=5$  iken OHK değerleri



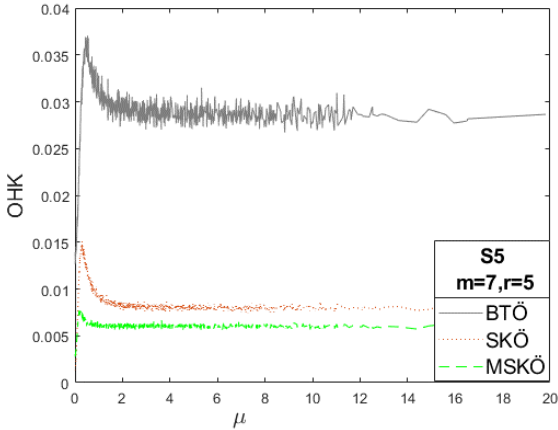
**Şekil 33.** BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S5 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=5, r=7$  iken OHK değerleri



**Şekil 36.** BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S5 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=7, r=7$  iken OHK değerleri



**Şekil 34.** BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S5 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=7, r=3$  iken OHK değerleri



**Şekil 35.** BTÖ, SKÖ ve MSKÖ ile  $\mu$  parametresi için elde edilen S5 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin  $m=7, r=5$  iken OHK değerleri

Küme çapı  $m=3,5,7$  ve tekrar sayıları  $r=3,5,7$  olmak üzere, tüm mümkün  $(m,r)$  değerleri için Şekil 1-9'da S2, Şekil 10-18'de S3, Şekil 19-27'de S4 ve Şekil 28-36'da S5 faktörlü shrinkage tahmin edicilerinin OHK değerleri verilmiştir. Tüm durumlar için MSKÖ altında önerilen tahmin edicinin SKÖ ve BTÖ'ye göre bulunan tahmin ediciden daha etkin olduğu görülmektedir. Bunun yanında, küme sayısı sabit kalırken tekrar sayısı arttıkça OHK değerleri incelenen tüm tahmin ediciler için azalmaktadır.

Örneğin Şekil 10'da, MSKÖ için elde edilen S3 faktörlü tahmin edicinin OHK değeri 0,05 civarında iken Şekil 12'den görüldüğü gibi küme sayısı  $m=3$  sabit ve tekrar sayısı  $r=7$  iken aynı tahmin edici için OHK 0,02 civarına düşmektedir. Benzer şekilde tekrar sayısı sabit kalırken küme çapı arttığında da OHK değeri azalmakta ve bu azalış tekrar sayısının arttığı durumdan daha fazla olmaktadır. Örneğin Şekil 10'da MSKÖ için elde edilen tahmin edicinin OHK değeri 0,05 civarında iken, Şekil 16'dan görüldüğü gibi aynı tahmin edici için OHK değeri 0,01 civarına düşmektedir. Genel olarak, küme sayısı ve tekrar sayısı arttıkça, incelenen tüm tahmin ediciler için OHK değeri azalmaktadır.

Ayrıca en etkin sonuç,  $m=7, r=7$  iken elde edilmektedir. Bu küme çapı ve tekrar sayısı için S3 faktörlü MSKÖ yöntemi ile elde edilen shrinkage tahmin edicisinin diğer S faktörlerine göre daha düşük OHK değerleri verdiği Şekil 18'in Şekil 9, 27 ve 36 ile karşılaştırılması sonucunda açıkça görülmektedir.

#### 4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, Thompson (1968,a) tarafından önerilen shrinkage tahmin edicisi dikkate alınarak, normal dağılımın konum parametresine ilişkin SKÖ ve MSKÖ altında shrinkage tahmin edicileri teorik olarak elde edilmiştir. Elde edilen tahmin ediciler, BTÖ yöntemi ile bulunan shrinkage tahmin edicileri ile OHK'ları bakımından Monte Carlo simülasyon çalışması yardımıyla karşılaştırılmıştır. Böylece, hangi örnekleme yöntemi altında elde edilen tahmin edicinin daha etkin olduğu tespit edilmeye çalışılmıştır.

Yapılan simülasyon çalışması sonucunda MSKÖ yöntemi kullanılarak elde edilen shrinkage tahmin edicisinin SKÖ ve BTÖ ile bulunan shrinkage tahmin edicilerine göre daha küçük OHK'lere sahip olduğundan dolayı daha etkin sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Bu nedenle, MSKÖ yönteminin shrinkage tahmin edicisini elde etmede SKÖ ve BTÖ yöntemine tercih edilebileceği sonucuna varılmıştır. Ayrıca aynı S faktörlü shrinkage tahmin edicisi için tekrar sayısı sabit kalıp küme sayısı arttıkça, OHK değerleri küme sayısının sabit kalıp tekrar sayısının arttığı durumdan daha fazla azalmaktadır. Bir diğer deyişle, küme sayısının artması, tahmin edicilerin etkinliğini arttırmada tekrar sayısından daha fazla rol oynamaktadır.

#### Etik Beyanı

Bu çalışmada, "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması gerekli tüm kurallara uyulduğunu, bahsi geçen yönergenin "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbirinin gerçekleştirilmediğini taahhüt ederiz.

#### Kaynakça

- [1] Thompson, J. R. (1968). Some shrinkage techniques for estimating the mean. *Journal of the American Statistical Association*, 63(321), 113-122.
- [2] Mehta, J. S., & Srinivasan, R. (1971). Estimation of the mean by shrinkage to a point. *Journal of the American Statistical Association*, 66(333), 86-90.
- [3] Jani, P. N. (1991). A class of shrinkage estimators for the scale parameter of the exponential distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, 40(1), 68-70.
- [4] Kourouklis, S. (1994). Estimation in the 2-parameter exponential distribution with prior information. *IEEE Transactions on Reliability*, 43(3), 446-450.
- [5] Özdemir, Ş. (2012). Shrinkage tahmin ediciler sınıfı üzerine bir çalışma. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 98s, Ankara.
- [6] Özdemir, Y. A. (2005). Sıralı Küme Örneklemesiyle Doğrusal Regresyon Modelinde Parametre Tahminlerinin İncelenmesi, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 186s, Ankara.
- [7] McIntyre, G. A. (1952). A method of unbiased selective sampling, using ranked sets. *Aust. J. Agric. Res.* 3, 385-90.
- [8] Takahasi, K., & Wakimoto, K. (1968). On unbiased estimates of the population mean based on the sample stratified by means of ordering. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 20(1), 1-31.
- [9] Dell, T. R., & Clutter, J. L. (1972). Ranked set sampling theory with order statistics background. *Biometrics*, 545-555.
- [10] MacEachern, S. N., Öztürk, Ö., Wolfe, D. A., & Stark, G. V. (2002). A new ranked set sample estimator of variance. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 64(2), 177-188.
- [11] Muttlak, H. A. (1997). Median ranked set sampling. *J Appl Stat Sci*, 6, 245-255.
- [12] Muttlak, H. A. (1998). Median ranked set sampling with concomitant variables and a comparison with ranked set sampling and regression estimators. *Environmetrics: The official journal of the International Environmetrics Society*, 9(3), 255-267.
- [13] Chen, Z., Bai, Z., & Sinha, B. (2003). *Ranked set sampling: theory and applications* (Vol. 176). Springer Science & Business Media.
- [14] Jemain, A. A., Al-Omari, A., & Ibrahim, K. (2008). Some variations of ranked set sampling. *Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*, 1(1), 1-15.
- [15] Tseng, Y., Wu, S., (2007). Ranked- Set- Sample-based Tests for Normal and Exponential Means. *Communication in Statistics: Simulation and Computation*.36: 761-782.
- [16] Muttlak, H. A., Ahmed, S. E., & Al-Momani, M. (2010). Shrinkage estimation in replicated median ranked set sampling. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 80(11), 1185-1196.
- [17] Koyuncu, N. (2018). Regression estimators in ranked set, median ranked set and neoteric ranked set sampling. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 89-94.

- [18] Ebegil, M., Özdemir, Y. A., & Gökpınar, F. (2021). Some Shrinkage estimators based on median ranked set sampling. *Journal of Applied Statistics*, 1-26.
- [19] Koyuncu, N., & Al-Omari, A. I. (2021). Generalized robust-regression-type estimators under different ranked set sampling. *Mathematical Sciences*, 15(1), 29-40.
- [20] Özdemir, Y. A., Ebegil, M. and Gökpınar, F. (2017). A test statistic based on ranked set sampling for two normal means. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46(10), 8077-8085.
- [21] Gürsoy, K. (2019), Medyan sıralı küme örneklemesi kullanılarak shrinkage tahmini, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 98s, Ankara.