

Conformable Kesirli Mertebeden COVID-19 Modelinin Reel Veriye Bağlı Kaotik Davranışları ve Kaos Kontrolü

Güven KAYA¹

¹Bingöl Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Bingöl.

e-posta: gkaya@bingol.edu.tr. ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-0411-5633>

Geliş Tarihi: 03.06.2022

Kabul Tarihi: 22.11.2022

Özet

Anahtar kelimeler

Covid-19; Conformable Kesirli Mertebeden Türev; Kararlılık; Çatallanma; Kaos Kontrol.

Bu çalışmanın amacı, Covid-19 virüsünün yayılımı hakkında tahminde bulunabilmek için tanımlanmış olan bir matematiksel modelin Conformable kesirli mertebeli halinin kompleks davranışlarını incelemektir. Bunu yaparken model tam değer sabitlerinin kullanılmasına dayalı bir süreçten geçirilerek fark denklem sistemine dönüştürülmüştür. Daha sonra bu yeni sistemin dinamik davranışları incelenmiş, sistemde Neimark-Sacker çatallanması olduğu gösterilmiştir. Ayrıca sistemde ortaya çıkan kaosu ve çatallanmanın kontrolü için sisteme iki farklı kaos kontrol stratejisi uygulanmıştır. Son olarak bulunan bütün bu analitik sonuçların doğruluğu parametre değerleri reel verilerden alınarak nümerik simülasyonlar ile gösterilmiştir.

Chaotic Behaviours and Chaos Control of a Conformable Fractional Order COVID-19 Model with Reel Data

Abstract

Keywords

Covid-19; Conformable Fractional Derivative; Stability; Bifurcation; Chaos Control.

The aim of this study is to examine the complex behavior of the Conformable fractional order of a mathematical model that has been defined to make predictions about the spread of the Covid-19 virus. For this purpose, the model is transformed into a difference equation system. Then, the dynamic behavior of this new system is examined and it is shown that Neimark-Sacker bifurcation occurred in the system. In addition, two different chaos control strategies have been applied to the system to control the chaos and bifurcation that occur in the system. Finally, the accuracy of all these analytical results are shown with numerical simulations by taking the parameter values from real data.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

1. Giriş

İlk Covid-19 vakası Aralık 2019'da Çin'in Hubei eyaletine bağlı Wuhan kentinden bildirildi. İnsani bir deneysel hata sonucu ortaya çıkan bu virüsler, canlı organizmaya girene kadar polimerleşerek yüzeylere yapışabilmelerine rağmen hayvan veya bitki hücrelerinin dışında yaşayamayan mikroorganizmalardır. İlk ortaya çıktığı günden beri, virüsün yayılımı pek çok araştırmacı tarafından yoğun bir şekilde araştırılmaktadır. Bu araştırmaların bazılarında, Andraus *et al.* (2021) Covid-19 virüsünün epilepsi gibi kronik hastalıklar üzerindeki etkisi, Mogensen *et al.* (2022) genç erişkinlerde akciğer fonksiyonu üzerinde olumsuz bir etkisi olup olmadığı, incelenmiştir.

Son zamanlarda Covid-19 salgınının şehirlerde ve popülasyonlar arasında yayılımını tahmin etmek için pek çok matematiksel model ortaya atılmıştır (Apergis 2021, Omame 2021, Inc 2021, Ayris *et al.* 2022, Lee 2022). Birçok biyolojik olayda var olan sistem hafıza etkisi ve kalıtsal özelliklerinin kesirli mertebeli diferansiyel denklemler aracılığı ile daha iyi tanımlanabiliyor olmasından dolayı reel dünya olayları modellenirken kesirli mertebeli denklemler ile oluşturulmuş matematiksel modellerin klasik tamsayı mertebeli denklemlerle oluşturulan modellere göre daha başarılı sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Bu modellerden birisi de Mohammed *et al.* (2021) tarafından ortaya atılan

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = ax(t) - bx(t)y(t) + ey(t) \\ D^\alpha y(t) = bx(t)y(t) + (c - d - e)y(t) \end{cases} \quad (1)$$

kesirli mertebeli modeldir. Burada $x(t)$ ile t anındaki sağlıklı birey popülasyonu, $y(t)$ ile t anındaki enfekte birey popülasyonu gösterilmektedir. Ayrıca $b > 0$ hasta oranı, $a > 0$ sağlıklı bireylerin dolaşım oranı, $c > 0$ enfekte bireylerin dolaşım oranı, $d > 0$ ölüm oranı ve $e > 0$ da tedavi oranını göstermektedir.

Kesirli mertebeden türevin pek çok tanımı vardır. Bunlardan birisi de Khalil *et al.* (2014) tarafından ortaya atılan ve "Conformable Kesirli Türev" adı verilen türevdir. Daha sonra Abdeljawad (2015) sol/sağ conformable kesirli türevi literatüre eklemiştir. Bu tanıma göre $\alpha \in (0,1]$ için sol conformable kesirli türev

$$({}_a^L T f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon},$$

ve sağ conformable kesirli türev ise

$$({}_b^R T f)(t) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon},$$

şeklinde tanımlanır. Dikkat edelim ki eğer f diferansiyellenebilir ise bu durumda

$$({}_a^L T f)(t) = (t-a)^{1-\alpha} f'(t),$$

ve

$$({}_b^R T f)(t) = (b-t)^{1-\alpha} f'(t),$$

dir. Bu türevin literatürde pek çok alana uygulaması bulunmaktadır (Perez 2018, Balcı 2019, Kartal and Gürçan 2019, Kaya *et al.* 2020, Kaya ve Kartal 2020).

Bu çalışmada Sistem (1) in conformable kesirli mertebeli modifiye edilmiş halinin dinamik davranışları incelenecektir.

$$\begin{cases} T_\alpha x(t) = ax(t) - bx(t)y\left(t \left[\frac{t-h}{h}\right] h\right) + ey\left(\left[\frac{t-h}{h}\right] h\right) \\ T_\alpha y(t) = bx\left(\left[\frac{t-h}{h}\right] h\right)y(t) + (c - d - e)y(t) \end{cases}, \quad (2)$$

burada $h > 0$ kesikleştirme parametresini ve $[t]$, $t \in (0, \infty)$ için t nin tam değerini temsil etmektedir.

Bu çalışmanın ilerleyen bölümlerinde: Bölüm 2’de fark denklemine geçiş, Bölüm 3’te denge noktalarının kararlılık analizi, Bölüm 4’te Neimark-Sacker çatlatılma analizi, Bölüm 5’te Kaos kontrol ve Bölüm 6’da sonuç kısmı verilmiştir.

2. Fark Denklem Sistemine Geçiş

Bu bölümde Kartal ve Gürçan (2019) tarafından ortaya atılan kesikleştirme prosedüründen yararlanılacaktır.

Sol conformable türev tanımından Sistem (1) in birinci denklemini $t \in [nh, (n+1)h)$, $n = 0,1,2, \dots$ aralığında ele alındığında

$$(t-nh)^{\alpha-1} \frac{dx(t)}{dt} + (by(nh) - e)x(t) = ey(nh), \quad (3)$$

olur. Bu denklem düzenlendiğinde

$$x'(t) + \frac{by(nh) - a}{(t-nh)^{\alpha-1}} x(t) = \frac{ey(nh)}{(t-nh)^{\alpha-1}}, \quad (4)$$

şeklinde bir Bernoullie diferansiyel denklem elde edilebilir. (4) denklemini $[nh, t)$ aralığında t ye göre çözülür, elde edilen denklemde $t \rightarrow (n+1)h$ alınır ve $x(nh)$ ile $y(nh)$ sırasıyla $x(n)$ ve $y(n)$ şeklinde değiştirilir ise,

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \left(x(n) - \frac{ey(n)}{by(n) - a} \right) e^{(a-by(n)) \frac{h^\alpha}{\alpha}} \\ &+ \frac{ey(n)}{by(n) - a}, \end{aligned} \quad (5)$$

elde edilir. Benzer yöntemler Sistem (1) in ikinci denklemine uygulandığında

$$y(n+1) = y(n)e^{(bx(n)+c-d-e)\frac{h^\alpha}{\alpha}}$$

(6) **İspat:** Sistem (7) nin E_0 denge noktası civarında lineerleştirilmesiyle elde edilen Jakobiyen matris

bulunur. Denklem (5) ve (6) birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{cases} x(n+1) = \left(x(n) - \frac{ey(n)}{by(n)-a}\right) e^{(a-by(n))\frac{h^\alpha}{\alpha}} + \frac{ey(n)}{by(n)a} \\ y(n+1) = y(n)e^{(bx(n)+c-d-e)\frac{h^\alpha}{\alpha}} \end{cases} \quad (7)$$

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} e^{\frac{ah^\alpha}{\alpha}} & \frac{(-1 + e^{\frac{ah^\alpha}{\alpha}})e}{a} \\ 0 & e^{\frac{h^\alpha(c-d-e)}{\alpha}} \end{pmatrix}$$

şeklinde bir fark denklem sistemi elde edilir.

3. Kararlılık Analizi

Sistem (7) nin Sistem (1) e benzer ve daha zengin dinamik davranışlar sergilemesinden dolayı, bu ve bundan sonraki bölümlerde Sistem (7) ele alınacaktır.

Teorem 3: Sistem (7) nin pozitif denge noktası E_1 in lokal asimptotik kararlıdır ancak ve ancak $e > \frac{(c+d)^2 h^\alpha}{\alpha - dh^\alpha + ch^\alpha}$ dir.

Kolayca elde edilebileceği gibi Sistem (7) nin $d \neq c$ için

İspat: Sistem (7) nin E_1 denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$E_0 = (0,0) \text{ ve } E_1 = \left(\frac{e+d-c}{b}, \frac{a(e+d-c)}{b(d-c)}\right) \text{ olmak üzere iki}$$

denge noktası vardır. Ölüm oranı enfekte bireylerin dolaşım oranından daha büyük olur ise (yani $d > c$) E_1 in pozitif bir denge noktası olacağı açıktır.

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} \frac{ah^\alpha e}{e^{c\alpha-d\alpha}} & \frac{(c-d)^2(-1 + e^{\frac{ah^\alpha e}{e^{c\alpha-d\alpha}}})}{ae} \\ \frac{ah^\alpha(c-d-e)}{(c-d)\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

Şimdi Sistem (7) nin dinamik davranışını incelemeye kullanacağımız Schur-Chon Kriterini verelim.

ve bu matrise karşılık gelen karakteristik denklem ise

Teorem 1: $\lambda_i, x(n+1) = Ax(n)$ fark denklem sistemindeki 2x2 boyutlu A matrisinin bütün öz değerleri ve

$$\lambda^2 - \left(1 + e^{\frac{ah^\alpha e}{e^{c\alpha-d\alpha}}}\right)\lambda + e^{\frac{ah^\alpha e}{e^{c\alpha-d\alpha}}} + \frac{(c-d)(-1 + e^{\frac{ah^\alpha e}{e^{c\alpha-d\alpha}}})h^\alpha(-c+d+e)}{e\alpha} = 0, \quad (8)$$

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = 0$$

şeklinde. Bu denklemin Schur-Chon Kriteri katsayıları

karakteristik polinomu olsun. O halde denklem (8) in köklerinin birim dairenin içinde olması için ($|\lambda_i| < 1$) gerek ve yeter şart

$$p_0 = e^{\frac{ah^\alpha e}{e^{c\alpha-d\alpha}}} + \frac{(c-d)(1 - e^{\frac{ah^\alpha e}{e^{c\alpha-d\alpha}}})h^\alpha(c-d-e)}{e\alpha},$$

(a) $1 + p_1 + p_0 > 0,$

ve

(b) $1 - p_1 + p_0 > 0,$

$$p_1 = -1 - e^{\frac{ah^\alpha e}{e^{c\alpha-d\alpha}}},$$

(c) $1 - p_0 > 0.$

dir.

Teorem 2: Eğer enfekte bireylerin dolaşım oranı ölüm oranı ve tedavi oranlarının toplamından küçük ise (yani $c < d + e$), o halde Sistem (7) nin E_0 denge noktası eyer noktası (saddle point) dir. Aksi taktirde, yani $c > d + e$ kararsız düğüm (node) noktasıdır.

Pozitiflik koşulu $d > c$ dikkate alındığında Schur-Chon Kriterinin (a) koşulundan

$$\frac{(c-d)(1 - e^{\frac{ah^\alpha e}{e^{c\alpha-d\alpha}}})h^\alpha(c-d-e)}{e\alpha} > 0,$$

ve (b) koşulundan da

$$2 + 2e^{\frac{ah^\alpha e}{c\alpha - d\alpha}} + \frac{(c-d)(1 - e^{\frac{ah^\alpha e}{c\alpha - d\alpha}})h^\alpha(c-d-e)}{q\alpha} > 0,$$

halde Neimark-Sacker çatallanması oluşabilir. Öyle ise E_1 denge noktası $d > c$ ve $e = e^* = \frac{(c+d)^2 h^\alpha}{\alpha - dh^\alpha + ch^\alpha}$

olduğu kolayca görülebilir. Son olarak (c) koşulundan da olduğunda Neimark-Sacker çatallanmasına gider.

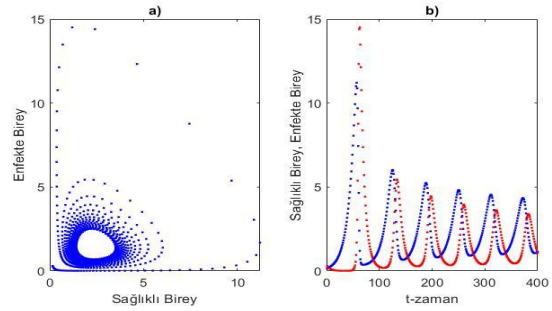
$$e > \frac{(c+d)^2 h^\alpha}{\alpha - dh^\alpha + ch^\alpha},$$

olmak üzere

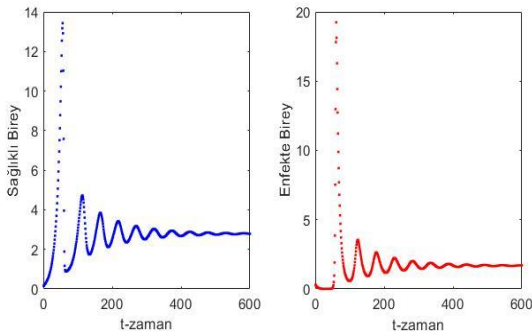
$$\theta \frac{(c^2 h^\alpha + d^2 h^\alpha + c(2d+e)h^\alpha - \frac{d(c+d)^2 h^{2\alpha}}{ch^\alpha - dh^\alpha + \alpha} + e\alpha)}{(c+d)^2 \alpha} > 0,$$

elde edilir. Burada

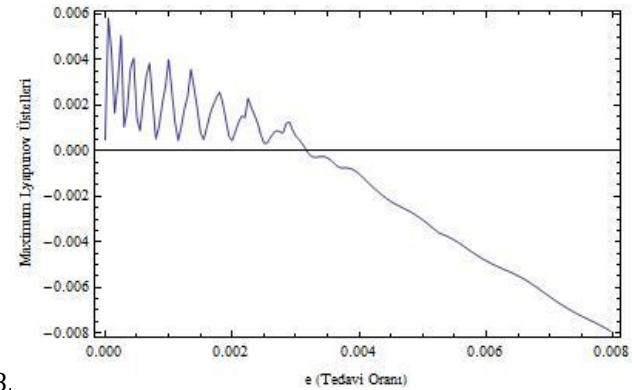
$$\theta = \left(1 - e^{\frac{\alpha(c+d)^2 h^{2\alpha}}{(ch^\alpha - dh^\alpha + \alpha)(c\alpha - d\alpha)}} \right) h^{-\alpha} (ch^\alpha - dh^\alpha + \alpha).$$



Şekil 2. $e = 0.003078$ ve diğer parametreler Şekil 1 ile aynı olmak üzere Sistem (7) için (a) Neimark-Sacker Çatallanma, (b) Timeseries grafiği.



Şekil 1. $a = 0.012$, $b = 0.01$, $c = 0.0001$, $d = 0.02$, $e = 0.008$, $h = 0.95$, $\alpha = 0.15$ ve başlangıç koşulu $(x_0, y_0) = (0.15, 0.3)$ için Sistem (7) nin kararlılık grafiği.



Şekil 3. Sistem (7) için Şekil 2'ye karşılık gelen Maximum Lyapunov üstelleri.

4. Neimark-Sacker Çatallanma Analizi

Neimark-Sacker çatallanması, fark denklem sistemleri ile oluşturulan biyolojik modellerin kaotik davranışlarının önemli bir özellik olarak kabul edilmektedir. Bu araştırılmasında oldukça önemli bir konudur. Burada tedavi oranı "e" çatallanma parametresi olarak ele alınacaktır.

Teorem 4: Kabul edelim ki Covid-19 virüsünden kaynaklı ölüm oranı enfekte bireylerin dolaşım oranından büyük olsun. Bu durumda Sistem (7) için E_1 denge noktası civarında Neimark-Sacker çatallanması ortaya çıkar.

İspat: Elaydi (2007) den, eğer J_{E_1} in modülü 1 olan (yani $|\lambda_{1,2}(e^*)| = 1$) iki kompleks eşlenik kökü var ise o

5. Kaos Kontrol

Kaosun ve çatallanmanın kontrolü türlerin biyolojik olarak üremesi ile ilgili popülasyon modelleri için önemli bir özellik olarak kabul edilmektedir. Bu bölümde, Sistem (7) de ortaya çıkan Neimark-Sacker çatallanmasını kontrol etmek için sisteme iki farklı kontrol stratejisi uygulayacağız.

Bunlardan birincisi Ott *et al.* (1990) da ortaya atılan (OGY) kontrol metodudur. Sistem (7) ye OGY metodu uygulandığında

$$\begin{cases} x(n+1) = (x(n) - \frac{\psi y(n)}{by(n)-a})e^{(a-by(n))\frac{h^\alpha}{\alpha}} + \frac{\psi y(n)}{by(n)-a} \\ y(n+1) = y(n)e^{(bx(n)+c-d-\psi)\frac{h^\alpha}{\alpha}} \end{cases} \quad (9)$$

şeklinde bir kontrol sistemi elde edilir. Burada ρ_1 ve ρ_2 kontrol parametresi olmak üzere

$$\psi = e - \rho_1(x(n) - x^*) - \rho_2(y(n) - y^*),$$

dir. Sistem (9) un (x^*, y^*) denge noktasındaki Jakobiyen matrisine karşılık gelen karakteristik polinom

$$\lambda^2 - M\lambda + K = 0 \tag{10}$$

burada

$$M = \frac{b(c-d)e(1 + e^{\frac{aeh^\alpha}{c\alpha-d\alpha}}\alpha) + ae(c-d-e)h^\alpha\rho_2}{b(c-d)e\alpha} + \frac{(c-d)(c-d-e)(1 - e^{\frac{aeh^\alpha}{c\alpha-d\alpha}})\alpha\rho_1}{b(c-d)e\alpha}$$

ve

$$K = \frac{b(c-d)e e^{\frac{aeh^\alpha}{c\alpha-d\alpha}}\alpha - (c-d)(c-d-e)(-1 + e^{\frac{aeh^\alpha}{c\alpha-d\alpha}})((c-d)h^\alpha + \alpha)\rho_1}{b(c-d)e\alpha} - \frac{(c-d-e)h^\alpha \left(b(c-d)^2 \left(-1 + e^{\frac{aeh^\alpha}{c\alpha-d\alpha}} \right) + a \left(c-d-e + (-c+d)e^{\frac{aeh^\alpha}{c\alpha-d\alpha}} \right) \rho_2 \right)}{b(c-d)e\alpha}$$

λ_1 ve λ_2 denklem (10) un kökleri olsun, o halde

$$\lambda_1 + \lambda_2 = M \tag{11}$$

ve

$$\lambda_1\lambda_2 = K \tag{12}$$

dır. Şimdi, Sistem (9) un kararlılık doğrularını elde etmek için $\lambda_1 = \mp 1$ ve $\lambda_1\lambda_2 = 1$ alalım. Kabul edelim ki $\lambda_1\lambda_2 = 1$ olsun. Bu durumda

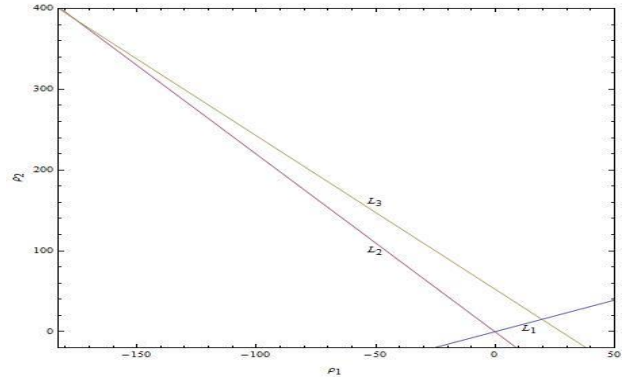
$$L_1: \rho_2 \rightarrow \frac{(c-d)(-1 + e^{\frac{aeh^\alpha}{c\alpha-d\alpha}})h^{-\alpha}(-be\alpha - (c+d+e)\alpha\rho_1 + (c-d)(c-d-e)h^\alpha(b+\rho_1))}{a(c-d-e)(-c+d+e+(c-d)e^{\frac{aeh^\alpha}{c\alpha-d\alpha}})}$$

Öte yandan, $\lambda_1 = 1$ ise denklem (11) ve (12) den

$$L_2: \rho_2 \rightarrow \frac{(c-d)(b+\rho_1)}{a}$$

Son olarak $\lambda_1 = -1$ ise denklem (11) ve (12) den

$$L_3: \rho_2 \rightarrow \frac{-\frac{2beh^{-\alpha}\alpha}{aeh^\alpha} + (c-d)(b+\rho_1)}{(-c+d+e)(-1 + e^{\frac{aeh^\alpha}{c\alpha-d\alpha}})}$$



Öyle ise kararlı öz değerler, $\rho_1\rho_2$ -düzleminde çizilen L_1, L_2 ve L_3 doğruları arasında kalan üçgensel bölge içerisindedirler. Bu durum bazı parametre değerleri için Şekil 4 te gösterilmiştir.

Şekil 4. Sistem (9) için L_1, L_2 ve L_3 ile sınırlanan Üçgensel bölge.

İkinci olarak Sistem (7) ye Din (2018) de önerilen üstel tip kararlılık metodunu uygulayalım. Bu yöntemde göre s_1 ve s_2 kontrol parametresi olmak üzere Sistem (7)

$$\begin{cases} x(n+1) = X \left(\left(x(n) - \frac{ey(n)}{by(n)-a} \right) e^{(a-by(n))\frac{h^\alpha}{\alpha}} + \frac{ey(n)}{by(n)-a} \right) \\ y(n+1) = Y \left(y(n) e^{(bx(n)+c-d-e)\frac{h^\alpha}{\alpha}} \right) \end{cases} \tag{13}$$

olur. Burada

$$X = e^{(-s_1(x(n)-x^*))} \text{ ve } Y = e^{(-s_2(y(n)-y^*))}$$

dir. Sistem (13) ün (x^*, y^*) denge noktasında lineerleştirilmesi sonucunda elde edilen karakteristik polinom

$$\lambda^2 - M_1\lambda + K_1 = 0 \tag{14}$$

burada

$$M_1 = \frac{\lambda(b(c-d)(1+e\frac{aeh^\alpha}{c\alpha-d\alpha})+(c-d-e)((c-d)s_1-as_2))}{b(c-d)},$$

ve

$$K_1 = \frac{a(c-d-e)es_1(b(c-d)+a(-c+d+e)s_2)}{ab^2(c-d)e} + \frac{b(b(c-d)^3+e\frac{aeh^\alpha}{c\alpha-d\alpha}(-b(c-d)^3+ab(c-d)e+a^2e(-c+d+e)s_2))}{ab^2(c-d)e}$$

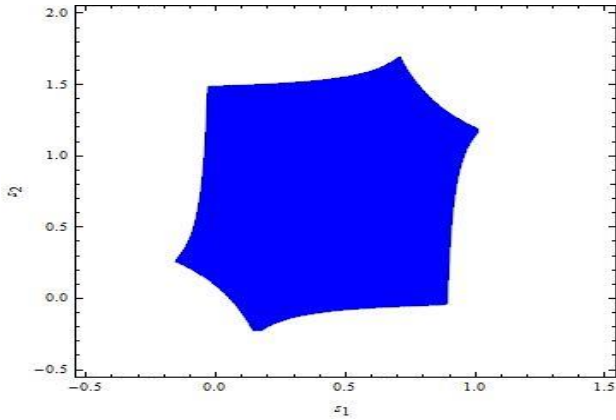
Elde edilen bu ifadeler dikkate alındığında aşağıdaki Teoreme ulaşılabilir.

Teorem 4: Sistem (13) ün (x^*, y^*) denge noktası

$$|M_1| < 1 + K_1 < 2$$

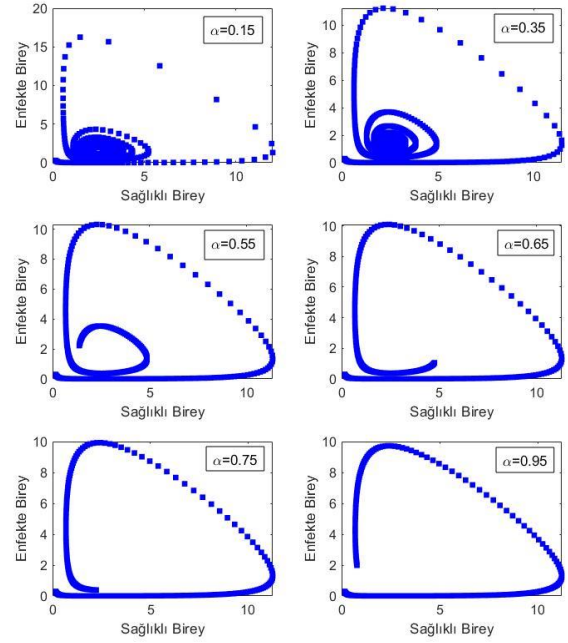
eşitsizliği sağlanması durumunda sinktir.

Bazı parametre değerleri için bu durum Şekil (5) te gösterilmiştir.

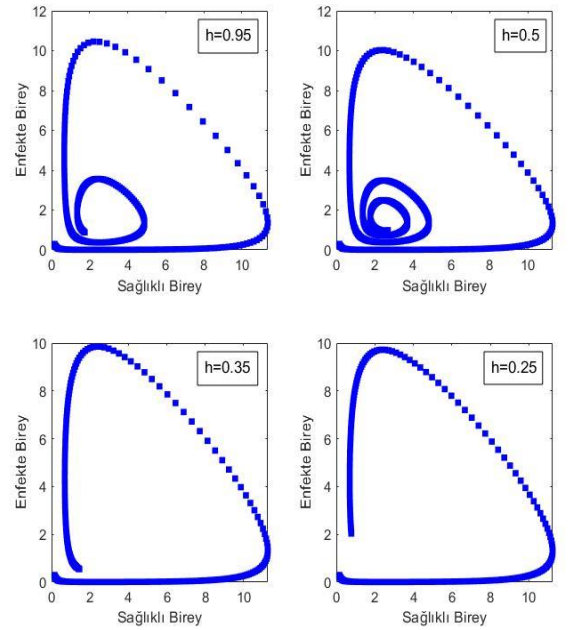


Şekil 5. $e = 0.003078$ ve diğer parametreler Şekil 1 deki gibi olmak üzere Sistem (13) için kontrol edilebilir bölge.

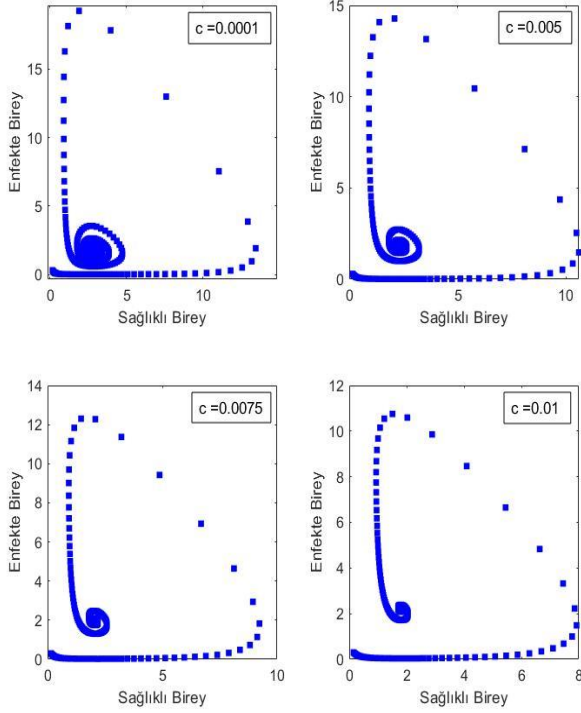
Ayrıca, kesirli mertebeye α nın ve kesiklileştirme parametresi h nin Sistem (7) üzerindeki etkisi sırasıyla Şekil 6 ve Şekil 7 de gösterilmiştir.



Şekil 6. $e = 0.005$ ve diğer parametreler Şekil 1 ile aynı olmak üzere kesirli mertebeye α nın farklı değerleri için Sistem (7) nin faz diyagramları.



Şekil 7. $e = 0.005$, $\alpha = 0.5$ ve diğer parametreler Şekil 1 ile aynı olmak üzere kesiklileştirme parametresi h nin Sistem (7) üzerindeki etkisini gösteren faz diyagramları.



Şekil 8. Diğer parametreler Şekil 1 ile aynı olmak üzere enfekte bireylerin dolaşım oranı c nin Sistem (7) üzerindeki etkisini gösteren faz diagramları.

6. Sonuç

Bu çalışmada Conformable kesirli mertebeden bir Covid-19 modelinin dinamik davranışları araştırılmıştır. Bunu yapmaya başlamadan önce, ele alınan sistem tam değer sabitlerinden yararlanmaya dayalı bir kesikleştirme sürecinden geçirilerek iki boyutlu bir fark denklem sistemi elde edilmiştir. Daha sonra bu yeni sistemin pozitif denge noktası civarında kararlı olması için gerek ve yeter şart Schur-Chon Kriteri yardımı $e > \frac{(c+d)^2 h^\alpha}{\alpha - dh^\alpha + ch^\alpha}$ olarak bulunmuştur. Ayrıca, tedavi oranı e çatallanma parametresi olarak seçildiğinde $e = e^* = \frac{(c+d)^2 h^\alpha}{\alpha - dh^\alpha + ch^\alpha}$ kritik çatallanma noktası olmak üzere sistemin pozitif denge noktası civarında Neimark-Sacker çatallanmasına uğradığı gösterilmiştir. Daha sonra sistemde ortaya çıkan Neimark-Sacker çatallanmasını kontrol etmek için sisteme iki farklı kaos kontrol yöntemi uygulanmış ve bunlar arasında üstel tip kararlılık metodunun sistem için daha uygun olduğu gösterilmiştir.

Bulunan bütün bu analitik sonuçların doğruluğunu göstermek için nümerik simülasyonlar kullanılmıştır. Bunu yaparken bütün parametre değerleri Mohammed *et al.* (2021) de kullanılan 18 Mart 2020 den 18 Kasım 2020 ye kadar olan Suudi Arabistan verileri kullanılmıştır. Bu verilere göre; sağlıklı bireylerin dolaşım oranı $a = 0.012$, hasta oranı $b = 0.01$, enfekte bireylerin dolaşım oranı $c = 0.0001$ ve ölüm oranı $d = 0.02$ dir. Parametrelerin bu değerleri için çatallanma parametresi $e^* = \frac{(c+d)^2 h^\alpha}{\alpha - dh^\alpha + ch^\alpha} = 0.003078$ olmaktadır. Bu değer dikkate alındığında e parametresinin değeri kritik çatallanma değerinden büyük olduğunda kararlı (Şekil 1), eşit olduğunda Neimark-Sacker çatallanması (Şekil 2 ve Şekil 3) ve küçük olduğunda da kararsız (Şekil 1 ve Şekil 3) (kaos) olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu verilere ek olarak Suudi Arabistan verilerine göre $e = 0.98$ değeri bizim modelimizde bulmuş olduğumuz kararlılık koşulu dikkate alındığında $e = 0.98 > e^* = 0.003078$ olup kararlı bölgede kalmaktadır (Şekil 1). Yani dikkate alınan veriler ışığında Suudi Arabistan bahsi geçen tarih aralığında salgını yenme yönünde başarıyla ilerlemiştir.

Son olarak enfekte bireylerin dolaşım oranı " c " nin değişiminin sistem üzerindeki etkisi incelenmiş ve enfekte bireylerin dolaşımı arttıkça kaos ortaya çıktığı Şekil (8) de gösterilmiştir. Bu sonuç salgın döneminde karantina uygulamasının (enfektelerin dolaşımının kısıtlanmasının) salgınla olan mücadeledeki önemini göstermiştir.

7. Kaynaklar

Andraus, M., Thorpe, J., Tai, X. Y., *et al.* 2021. Impact of the COVID-19 pandemic on people with epilepsy: Findings from the Brazilian arm of the COV-E study. *Epilepsy & Behavior*, **123**, 108261.

Mogensen, I., Hallberg, J., Björkander, *et al.* and BAMSE COVID-19 Study Group. 2022. Lung function before and after COVID-19 in young adults: A population-based study. *Journal of Allergy and Clinical Immunology: Global*.

- Apergis, N. 2021. COVID-19 and cryptocurrency volatility: Evidence from asymmetric modelling. *Finance Research Letters*, 102659.
- Omame, A., Abbas, M., Onyenegecha, C. P. 2021. A fractional-order model for COVID-19 and tuberculosis co-infection using Atangana–Baleanu derivative. *Chaos, Solitons & Fractals*, **153**, 111486.
- Inc, M., Acay, B., Berhe, H. W., Yusuf, A., Khan, A., Yao, S. W. 2021. Analysis of novel fractional COVID-19 model with real-life data application. *Results in Physics*, **23**, 103968.
- Ayris, D., Imtiaz, M., Horbury, K., Williams, B., Blackney, M., See, C. S. H., Shah, S. A. A. 2022. Novel deep learning approach to model and predict the spread of COVID-19. *Intelligent Systems with Applications*, **14**, 200068.
- Lee, H., Jang, G., Cho, G. 2022. Forecasting COVID-19 cases by assessing control-intervention effects in Republic of Korea: a statistical modeling approach. *Alexandria Engineering Journal*, **61(11)**, 9203-9217.
- Mohammed, W. W., Aly, E. S., Matouk, A. E., Albosaily, S., & Elabbasy, E. M. 2021. An analytical study of the dynamic behavior of Lotka-Volterra based models of COVID-19. *Results in physics*, **26**, 104432.
- Elaydi, S. N. 2007. *Discrete chaos: with applications in science and engineering*. Chapman and Hall/CRC.
- Kartal, Ş., Gurcan, F. 2019. Discretization of conformable fractional differential equations by a piecewise constant approximation. *International Journal of Computer Mathematics*, **96(9)**, 1849-1860.
- Ott, E., Grebogi, C., Yorke, J. A. 1990. Erratum: "Controlling chaos" [Phys. Rev. Lett. 64, 1196 (1990)]. *Physical Review Letters*, **64(23)**, 2837.
- Din, Q. 2018. A novel chaos control strategy for discrete-time Brusselator models. *J. Math. Chem.* **56(10)**, 3045–3075.
- Pérez, J. E. S., Gómez-Aguilar, J. F., Baleanu, D., Tchier, F. 2018. Chaotic attractors with fractional conformable derivatives in the Liouville–Caputo sense and its dynamical behaviors. *Entropy*, **20(5)**, 384.
- Balcı, E., Öztürk, İ., Kartal, S. 2019. Dynamical behaviour of fractional order tumor model with Caputo and conformable fractional derivative. *Chaos, Solitons & Fractals*, **123**, 43-51.
- Kaya, G., Kartal, S., Gurcan, F. 2020. Dynamical analysis of a discrete conformable fractional order bacteria population model in a microcosm. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **547**, 123864.
- Kaya, G., Kartal, S. 2020. Conformable Kesirsel Mertebeden Tam Deger Fonksiyonlu Lojistik Modelin Kararlılık ve Catallanma Analizi, Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, **9 (3)**, 1080-1090.