Kocaeli Üniversitesi **Sosyal Bilimler** Enstitüsü **Dergisi** (18) 2009 / 2 : 126 - 145

M-GARCH Modellerinin Karşılaştırmalı Analizi

Hilal Bozkurt*

Özet: Tek bir değişken için zamanla değişen varyans kavramını ele alan ARCH modeli, çok sayıda içeren modeller için genişletilmiştir. Bu modellerde en önemli problem, çok sayıda parametrenin tahmin ediliyor olmasıdır. Bu çalışma Diagonal VEC, Sabit Koşullu Korelasyon (CCC) ve Diagonal BEKK gibi M-GARCH modellerini, Frobenius, Eigenvalue ve Foerstner Metric gibi metrik uzaklık teknikleri açısından karşılaştırmaktadır. Diagonal VEC, benchmark olarak düşünülmüştür. Temel bulgu, Diagonal BEKK tahminlerinin CCC modeline göre benchmark modelinin sonuçlarına daha yakın sonuçlar verdiği yönündedir.

Anahtar kelimeler: M-GARCH, metrik uzaklık.

Giriş

Makro ekonomik değişkenlerde öngörülemeyen ani artış ya da azalışlar (oynaklık), varyansın değişmesine neden olur. Literatürde ARCH yapısı tanıtılmadan önce, bu ani değişimler değişkenlik kavramı ile eşdeğerde kullanılmaktaydı. Ancak koşullu varyans kavramının ortaya atılmasıyla birlikte, serilerdeki öngörülemeyen ani değişimler, bir diğer deyişle seriye ilişkin belirsizlik, koşullu varyansla ifade edilen oynaklık (volatility) kavramı ile değerlendirilmeye başlanmıştır. Bu sayede stok fiyatları, enflasyon oranı, döviz kuru, faiz oranı vb. değişkenlerde gözlenen oynaklık (volatility), değişen varyanslı (heteroskedastik) bir yapı altında tek değişkenli (univariate) ARCH, GARCH modelleri ile tahmin edilmektedir. Birden fazla sayıda değişken olması durumunda ortak yapıyı ölçmek üzere, çok değişkenli (multivariate) GARCH (M-GARCH) modelleri kullanımaktadır.

İlk olarak Engle (1982,1983,1995) tarafından ele alınan ARCH modelinde, koşullu olmayan varyans, geleneksel ekonometri modellerinde varsayıldığı gibi sabit iken, koşullu varyans, tesadüfi değişkenin geçmiş değerlerine bağlıdır.

Bir ARCH yapısı (1) gibi düşünüldüğünde,

---

* Yrd. Doç. Dr. Hilal Bozkurt, Kocaeli Üniversitesi, İİBF, İktisat Bölümü Öğretim Üyesidir.

$$Y_t / \psi_{t-1} \sim \mathrm{N}(Y_{t-1}, \beta, h_t)$$

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \alpha_2 e_{t-2}^2 + ... + \alpha_p e_{t-p}^2 \\ e_t &= Y_t - Y_{t-1}\beta \end{aligned} \qquad (1)$$

Koşullu varyans (h_t), geçmiş dönem hata karelerinin bir fonksiyonu olarak değerlendirildiği için sabit olmayacaktır. Dolayısıyla bir ARCH yapısı, sıfır ortalamalı, koşulsuz varyansı sabit, ancak koşullu varyansı zaman içinde değişebilen bir yapıda olacaktır.

Bollerslev (1986,1987) ARCH yapısının uzantısı olarak GARCH modelini ortaya koymuştur. Model, ARCH modelinde yer alan varyans eşitliğinin ARMA yapısı ile ifade edilmesi üzerinedir. Bu şekilde daha esnek bir gecikme yapısına ve daha uzun dönem bilgisine izin verilmektedir.

GARCH (p,q) modeli (2)'de yer almaktadır:

$$E_t / \psi_{t-1} \sim \mathrm{N}(0, \sigma_t),$$

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha(L) e_t^2 + \beta(L) \sigma_t^2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Modelde koşullu varyans terimi, hem hata terimlerinin gecikmeleri, hem de varyansın kendi gecikmeleri ile ifade edilmektedir.

Drost-Nijman (1991)'de ifade edildiği gibi, tüm α ve β parametrelerinin,

$$\sigma_t^2 = \phi(L) e_t^2 = (1 - \beta(L))^{-1} \alpha(L) e_t^2$$

negatif olmaması gerekir. Serinin durağanlığı denklem köklerinin birim çember dışına düşmesi ile sağlanmaktadır.

A(1) + β(1)<1

ise, hata payı kovaryans durağan olacaktır (Milhoj:1984:99-103).

Bu durum aynı zamanda hata terimlerinin ARMA yapısı içinde ardışık bağımlı olmadığı bir durumu ifade etmektedir (Bollerslev:1992).

1. Multivariate GARCH (M-GARCH)

Çok değişkenli ARCH-GARCH modelleri özellikle finans dünyasında kullanılan tekniklerdir. Bu tür modellerin çözümü, tek değişken içeren yalın ARCH-GARCH modellerinin tahminine göre daha karmaşık yöntemler içermektedir. Bu karmaşık yapıyı hafifletmek ve sistemin bütününe ilişkin daha basit bir yapı ortaya koymak üzere birçok teknik geliştirilmiştir.

Bu çalışmada, birtakım M-GARCH modellerine yer verilmiş, ardından bu modellerin bazılarının öngörü performansları değerlendirilmiştir.

1.1. Diagonal VEC Modeli

n değişkenden oluşan bir sistemde, tek değişkene ilişkin GARCH tahmini kullanılarak, sıfır ortalamaya sahip hata terimine ilişkin n boyutlu varyans-kovaryans matrisi elde edilmektedir.

$$E_t / \xi_{t-1} \sim \mathrm{N}(0, H_t)$$

Burada H_t, zayıf eksojen değişkenler (x), h_t 'nin p gecikmeli değerleri ve e_t 'nin karelerinin gecikmeli değerlerinden oluşacaktır.

$$\begin{aligned} h_t &= vecH_t \\ \tilde{\tilde{X}} &= vec(x_t x_t^{'}) \\ \eta_t &= vec(e_t e_t^{'}) \end{aligned} \tag{3}$$

VEC, vektör operatörü olmak üzere,

$$h_t = \beta_0 + \beta_1 X + \lambda_1 \eta_{t-1} + ... + \lambda_q \tilde{\tilde{\eta}}_{t-q} + \gamma_1 h_{t-1} + ... + \gamma_p h_{t-p} \tag{4}$$

eşitliği ile belirlenir.

$\beta_0; n^2 x\, 1$ parametre vektörü,
$\beta_1; n^2 x\, j^2$ parametre matrisi,
λ_i ve $\gamma_i; n^2 x\, n^2$ parametre matrisi

olmak üzere,

$$h_t = \begin{bmatrix} & . & . & . & & & . & . & & . & \\ \beta_0 & .\beta_1 & .\lambda_1 & .. & . & .\lambda_q & .\gamma_1 & .. & . & ..\gamma_p & . \\ & . & . & . & & & . & . & & . & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}}_t \\ \eta_{t-1} \\ h_{t-p} \end{bmatrix} \tag{5}$$

şeklinde elde edilir.

GARCH (1,1) modeli için düşündüğümüzde VEC gösterimi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$h_t = \begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \beta_{01} \\ \beta_{02} \\ \beta_{03} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1,t-1}^2 \\ e_{1,t-1}e_{2,t-1} \\ e_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

VEC gösterimi aşırı parametreleşmeyi beraberinde getireceğinden, Bollerslev, Engle ve Wooldridge (1988), kovaryans matrisinin her bir elemanının sadece kendi geçmiş değerleri ile belirleneceği diagonal (köşegen) gösterimi kullanmışlardır. Diagonal gösterim,

$$
\begin{aligned}
h_t &= \begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \beta_{01} \\ \beta_{02} \\ \beta_{03} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1,t-1}^2 \\ e_{1,t-1}e_{2,t-1} \\ e_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7}
$$

şeklindedir. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
h_{11,t} &= \beta_{01} + \lambda_{11} e_{1,t-1}^2 + \gamma_{11} h_{11,t-1} \\
h_{12,t} &= \beta_{02} + \lambda_{22} e_{1,t-1} e_{2,t-1} + \gamma_{11} h_{12,t-1} \\
h_{22,t} &= \beta_{03} + \lambda_{33} e_{2,t-1}^2 + \gamma_{22} h_{22,t-1}
\end{aligned} \tag{8}
$$

şeklindeki diagonal gösterim ile, $\frac{n(n+1)}{2}$ kadar parametre tahmin edilmiş olacaktır. Yalnız bu gösterimde h_t 'nin pozitif belirli olması gerekir. Diagonal VEC gösteriminde bu kısıtlamanın gerçekleşmesinin güçlüğünden yola çıkarak, Engle ve Kroner (1995) BEKK (Baba,Engle,Kraft,Kroner) modelini öne sürmüşlerdir.

1.2. BEKK-GARCH(1,1) Modeli

VEC gösteriminde tüm e'ler için pozitif tanımlı olma kısıtı her zaman sağlanamayacağından, Engle ve Kroner (1995) BEKK (Baba,Engle,Kraft,Kroner) –GARCH(1,1) modelini,

$$H_t = \beta_0^{*'}\beta_0^* + \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{q}\lambda_{ik}^{*'}e_{t-i}e'_{t-i}\lambda_{ik}^* + \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{q}\gamma_{ik}^{*'}H_{t-i}\lambda_{ik}^* \tag{9}$$

şeklindeki bir gösterimle, sözü edilen kısıtı sağlamayı garanti etmişlerdir. Bu gösterim, tüm VEC gösterimlerinde pozitif belirli olmayı sağlayacak şekilde geneldir. 2 değişkenli bir sistemde, diagonal gösterimle BEKK modeli,

$$\begin{aligned} h_t &= \beta_0^{*'}\beta_0^* + \begin{bmatrix} \lambda^*_{11} & \lambda^*_{12} \\ \lambda^*_{21} & \lambda^*_{22} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} e_{1,t-1}^2 & e_{1,t-1}e_{2,t-1} \\ e_{2,t-1}e_{1,t-1} & e_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^*_{11} & \lambda^*_{12} \\ \lambda^*_{21} & \lambda^*_{22} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \gamma^*_{11} & \gamma^*_{12} \\ \gamma^*_{21} & \gamma^*_{22} \end{bmatrix}' H_{t-1} \begin{bmatrix} \gamma^*_{11} & \gamma^*_{12} \\ \gamma^*_{21} & \gamma^*_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

veya,

$$\begin{aligned} h_{11} &= \beta_{11} + \lambda^{*2}{}_{11}e_1^2 + 2\lambda_{11}^*\lambda_{21}^*e_1e_2 + \lambda_{21}^{*2}e_2^2 \\ h_{12} &= \beta_{12} + \lambda^{*2}{}_{11}\lambda_{12}^*e_1^2 + (\lambda_{21}^*\lambda_{12}^* + \lambda_{11}^*\lambda_{22}^*)e_1e_2 + \lambda_{21}^{*2}\lambda_{22}^*e_2^2 \\ h_{22} &= \beta_{13} + \lambda^{*2}{}_{12}e_1^2 + 2\lambda_{12}^*\lambda_{22}^*e_1e_2 + \lambda_{22}^{*2}e_2^2 \end{aligned} \tag{11}$$

şeklindedir. Burada β^*, λ^* ve γ^* parametre matrisleridir. Böylece n=2 değişkenli bir sistem için 18 (n^2xn^2) (sabit parametreler hariç) adet parametre tahmin edilirken, BEKK modelinde 8 adet parametre tahmin edilmiş olacaktır. BEKK gösteriminde durağanlık koşulu,

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{p}(\lambda_{ik}^* \otimes \lambda_{ik}^*) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{q}(\gamma_{jk}^* \otimes \gamma_{jk}^*) \tag{12}$$

toplamının özdeğerleri 1'den küçük olduğunda sağlanacaktır (Engle ve Kroner:1995).

1.3. CCC-GARCH(1,1) Modeli

Y_{t}, Nx1 boyutunda bir vektör ve H_t koşullu kovaryans matrisi olarak tanımlandığında,

$$\begin{aligned} y_t &= E(y_t | \psi_{t-1}) + \in_t \\ Var(\in_t | \psi_{t-1}) &= H_t \end{aligned} \tag{13}$$

H_t pozitif tanımlı olmak üzere, t-1 döneminde y_{it} ve y_{jt} arasındaki koşullu korelasyon,

$\rho_{ijt} = h_{ijt} / \sqrt{(h_{iit} h_{jjt}}, -1 \leq \rho_{ijt} \leq 1$

olarak değerlendirilebilir. Ancak koşullu kovaryanslar zamanla birlikte değiştikçe, koşullu korelasyonların da farklılaşacağı beklenir. Ancak bazı durumlarda, koşullu korelasyonların zamandan bağımsız olarak sabit kabul edilebilir. Bu sayede koşullu kovaryanslar,

$$h_{ijt} = \rho_{ijt} \sqrt{(h_{iit} h_{jjt}}, \; j = 1,...,N \quad \mathrm{i} = 1,...,\mathrm{N},$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durum hiç kuşkusuz hesaplamalarda kolaylık sağlayacaktır. ω_i, pozitif sabit bir sayı ve $\sigma_{it}^2 \rangle 0$ olmak üzere her bir koşullu varyans,

$$h_{iit} = \omega_i \sigma_{it}^2, \quad \mathrm{i} = 1,...,\mathrm{N},$$

şeklinde belirlenebilir (Bollerslev,1990).

$$H_t = D_t R D_t$$

şeklindeki tanımlamada, R sabit koşullu korelasyonlar (ρ_{ijt}) , D ise diagonal elemanları koşullu standart sapmalar olan NxN boyutlu matrisler olmak üzere, aşağıdaki gibi bir gösterime ulaşılır:

$$H_t = \begin{bmatrix} \sqrt{h_{11t}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22t}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{h_{NNt}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{h_{11t}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22t}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{h_{NNt}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} h_{11t} & \rho_{12}\sqrt{h_{11t}h_{22t}} & \cdots & \rho_{1N}\sqrt{h_{11t}h_{NNt}} \\ \rho_{21}\sqrt{h_{22t}h_{11t}} & h_{22t} & \cdots & \rho_{2N}\sqrt{h_{22t}h_{NNt}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{N1}\sqrt{h_{NNt}h_{11t}} & \rho_{N2}\sqrt{h_{NNt}h_{22t}} & \cdots & h_{NNt} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Bu haliyle koşullu kovaryanslar, sabit koşullu korelasyon varsayımı altında, koşullu standart sapmalarca belirlenmektedir (Bauwens,2003). Tse(2000), BEKK ve faktör yöntemleri ile tahmin edilen MGARCH modelinin parametrelerinin yorumlanmasının güç olduğu ve varyans-kovaryansların gelecek üzerindeki net etkilerinin görülemediğini ileri sürerek, LM (Lagrange Multiplier) testini kullanarak, sabit korelasyon hipotezi altında MGARCH modelini tahmin etmiştir. Sabit korelasyon varsayımı altında, LM testi ile parametreler üzerine konulacak kısıtlamalar yardımıyla modelin tahmin edilebileceğini göstermiştir.

Tse ve Tsui (2002), korelasyonun zaman boyutu içinde sabit değil değişebilir olabileceği varsayımı altında, $H_t = D_t R_t D_t$ eşitliğinde MGARCH modelini tahmin etmişlerdir. Her bir koşullu varyans tek değişkenli GARCH modeli ile tahmin edilmekte ve koşullu korelasyon matrisi otoregresif hareketli ortalama formu ile ifade edilmektedir. Model VEC gösterimi üzerine kurulmuştur. Koşullu korelasyon matrisinin pozitif belirli olmasını sağlamak için sabit koşullu korelasyonlu M-GARCH (CCC-M-GARCH) yerine, korelasyonların değişebileceği varsayımı altında oluşturdukları modeli, En Çok Benzerlik (Maksimum Likelihood) yöntemi ile tahmin etmişlerdir.

$$h_{it} = \beta_{io} + \sum_{q=1}^{Q_i} \lambda_{iq} e_{i,t-q} + \sum_{p=1}^{p_i} \gamma_{ip} h_{i,t-p} \tag{15}$$

Durağanlık koşulu,

$$\sum_{q=1}^{Q_i} \lambda_{iq} + \sum_{p=1}^{p_i} \gamma_{ip} \langle 1$$

ile sağlanmaktadır.

Engle (2000) ve Engle-Sheppard (2001), MGARCH modellerinin tahminine yeni bir açılım getirerek, Bollerslev (1990)'in öne sürdüğü sabit koşullu korelasyon varsayımını geliştirmiştir. Koşullu korelasyonun zaman içinde değişebileceğini öngörerek, çok değişkenli bir yapı içinde, ilgili değişkenlerin 0 ortalama ve H_t koşullu varyansı ile normal dağılacağını göstermişlerdir.

$$r_t / F_{t-1} \sim N(0, H_t) \tag{16}$$

$$H_t = D_t R_t D_t$$

R_t ; zamana bağlı olarak değişen korelasyon matrisini ifade etmektedir. Tahmin ediciler ML yöntemi ile tahmin edilmekte ve standart GARCH modelinde olduğu gibi, katsayıların negatif olmaması ve katsayıların toplamının birden küçük olması suretiyle durağanlığın sağlanması kısıtları geçerli olmaktadır.

1.4. Ortogonal GARCH (O-GARCH)

Orijinal veri setinin birbirleri ile korelasyonsuz bileşenlere dönüşmesi varsayımı üzerine kurulan O-GARCH Modeli Alexander (2001,2002) tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir. O-GARCH Modeli, sistemde yer alan k tane değişken için N gözlemden oluşan (Nxk) GARCH kovaryans matrisinin, m sayıda temel bileşene ait tek değişkenli GARCH modelinden türetilmesine dayanır. Sistemde yer alan tüm değişkenler temel bileşenlerine ayrıştırılır ve bu surette birbirine ortogonal bileşenler oluşturulmuş olur.

Van Der Weide (2002) Genelleştirilmiş O-GARCH Modeli'nde, orijinal sistemdeki değişkenler arasında zayıf korelasyon olması halinde, matris değerlerinin ortogonal olamayabileceği fikrini ileri sürmüştür. Ortogonal matrisin değerleri, örnek kovaryans matrisinden sağlanacağı için, verilerde gözlenecek zayıf korelasyon, tanımlanan matrisin ortogonal olmasına engel olabilir. Bu düşünceden yola çıkarak, koşullu olmayan bilgiye başvurularak, $m^2 yerine \frac{m(m-1)}{2}$ rotasyon parametresi eşliğinde, m adet tek değişkenli GARCH (1,1) modeli, ML ile tahmin edilmektedir.

1.5. Temel Bileşenler (Principal Component) GARCH Yöntemi

M-GARCH modellerinin, tek değişkenli GARCH modelleri üzerinden tahmin edilmesine yönelik yöntemlerden biri de Temel Bileşenler GARCH modelidir. Modelin işleyişi birçok bakımdan O-GARCH modeline benzer. Orijinal data standartlaştırıldıktan sonra, temel bileşenler notasyonu, standartlaştırılan değerler için uygulanmaktadır. Bu haliyle GARCH modeli, en önemli temel bileşenler için tahmin edilmiş olacaktır (Burns,2005).

Temel Bileşenler Yöntemi'nde birinci adım, ilgili değişkenlerin standartlaştırılmasıdır.

$$S_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \tag{17}$$

Burada,

$x_i ; i = 1,2,....,n$ 'e kadar olan değişken,

S_i ise; x_i değişkenlerinin standartlaştırılmış değerleri,

μ_i ; ilgili değişkenin ortalaması,

σ_i ; değişkenin standart hatasıdır.

Standartlaştırılmış değerlerin kullanılması suretiyle elde edilecek matris $\left(\frac{S'S}{T}\right)$, asıl sistemin korelasyon matrisini ifade etmektedir. Korelasyon matrislerinin özvektörlerinden (eigen vector) oluşan matrisi W ile ifade edecek olursak, standartlaştırılmış değişkenlerin temel bileşenleri,

$$P=SW \tag{18}$$

şeklinde elde edilir.

Bu şekilde elde edilecek doğrusal dönüşüm, bileşenler arasındaki sıfır korelasyon nedeniyle ortogonal olma özelliğini temin edecektir.

P=SW eşitliğinde S=PW' haline dönüştürüldüğünde,

$$S_i = w_{i1} p_1 + w_{12} p_2 + ... + w_{ik} p_k \tag{19}$$

w'ler faktör ağırlıklarını ifade ermektedir. (2.3) eşitliğinden orijinal değerlere dönüldüğünde,

$$x_i = \mu_i + w^*_{i1} p_1 + w^*_{12} p_2 + ... + w^*_{ik} p_k + \varepsilon_i \tag{20}$$

$\omega^*_{ij} = w_i \sigma_i$ olup, ilgili değişken temel bileşenlerince ifade edilmektedir. Bu şekilde sisteme giren değişken sayısından daha az olan faktörler birbirlerine ortogonal olacaktır.

$A = (\omega_{ij})$; normalleştirilmiş faktör ağırlıklarının kxm matrisi olmak üzere, faktörlere ilişkin kovaryans matris bir köşegen matris olacaktır.

$$V = ADA' + V_\varepsilon$$
$$D = diag(V(p_1),...,V(p_r)) \text{ ve} \tag{21}$$

V_ε; hataların kovaryans matrisi, asıl sistemi temsil edecek olan temel bileşenlerin bir formudur.

$$V \approx ADA' \tag{22}$$

Bu şekilde $\frac{k(k+1)}{2}$ adet varyans ve kovaryans hesaplanması yerine, sadece r tane varyans hesaplanmış olacaktır (Alexander, 2001,2002).

Böylece çok sayıda olan değişken yerine, bu değişkenlerin daha az sayıda doğrusal bileşimlerinin oluşturulmasıyla, tahminde pratiklik sağlanmaktadır.

2. Modellerin Karşılaştırılması: Metrik Uzaklık

Literatürde, M-GARCH modellerinin performanslarını karşılaştırmak üzere az sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalardan biri Silvonnoinen ve Terasvirta (2008)'de yer bulmakta ve tahmin sonuçlarının genel fonksiyonel biçim hatası (misspecification)nın araştırılması üzerinde durulmaktadır.

Model performanslarını değerlendirmek üzere yapılan çalışmalardan bir diğeri, Laurent, Rombouts, Silvennoinen ve Violante (2006)'e aittir. Yazarların çalışmalarında metrik uzaklık yaklaşımı kullanılmıştır. Metrik uzaklık, iki vektör arasındaki uzaklığı ölçen bir ölçüdür. Verilen bir uzaydaki u ve v gibi herhangi iki vektör noktası için uzaklık, reel değerli bir fonksiyon olarak ifade edilebilir:

d=d(u,v)

Burada iki özellik vardır: 1)u vektörü v ile çakıştığı zaman uzaklık sıfırdır. 2)İki nokta arasında arasında farklılık var ise, iki vektör arasındaki uzaklık, pozitif bir reel sayı ile temsil edilir. Bir vektör uzayı, sözü edilen özelliklere sahipse, metrik uzay adını alır. d fonksiyonunun sahip olduğu özel biçimlerden biri "Öklit(Euclid)-uzayı"dır. u (a_1, a_2,….,a_n)ve v (b_1, b_2,….,b_n)vektörleri n boyutlu olduklarında, Öklit uzaklık fonksiyonu,

$$d(u,v) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2} \qquad (23)$$

Öklit uzayı iki vektörün skalar çarpımının karekökü cinsinden de ifade edilebilir:

$$d(u,v) = \sqrt{(u - v)^{'}(u - v)} \qquad (24)$$

Bu defa karekök içindeki ifade, n adet elemanın karelerinin toplamı olacaktır(Chiang, Çev.Kip ve diğ).

Modellerin performanslarını karşılaştırmak üzere üç metrik uzaklık ölçüsü ele alınmıştır. Sözü edilen uzaklık ölçülerinde, Benchmark modelinin kovaryans matrisi (H_t) ve diğer modelin kovaryans matrisi $\in_t$ simgeleriyle ifade edilmiştir.

2.1.Frobenius Metrik

Öklit uzayında, iki vektör arasındaki uzaklığı ölçmek için ele alınan bakış açısına benzer bir formda hesaplanan bir ölçüdür.

$$d_t = \sqrt{\sum_{i,t} (\in_{ij,t} - H_{ij,t})^2} \qquad (25)$$

Bu ölçünün hesaplanmasında, iki tahmin modelinin kovaryans matrisinin farklarının karelerinin toplamı, karekök içinde değerlendirilmektedir (Laurent vd,:2006)

2.2. Özdeğer (Eigenvalue) Metrik

Özdeğer metrik, temel bileşenler yöntemine benzer bir yapı üzerine kurulmuştur. $\in_t$ ve H_t iki tahmin modelinden elde edilen kovaryans matrisleri simetrik ve reel değerler içermek üzere, iki matris arasındaki fark Hermitian[†] olacaktır. Bu nedenle iki kovaryans matrisi arasındaki fark aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$d_t = \sqrt{\lambda_{\max}^{1}(\in_t, H_t)} \qquad (26)$$

Burada $\lambda_{\max}^{1}(\in_t, H_t)$, $(\in_t - H_t)$ matrisinin transpozesi ile çarpımından oluşan matrisin en büyük özdeğerine eşittir $(\in_t - H_t)\,(\in_t - H_t)'$.

Kovaryans matrisleri simetrik ve yarı pozitif belirli olduğu için, temel bileşenler analizi, matrislerin arasındaki farka ilişkin en büyük özdeğerin pozitif ve matrisler arasındaki en büyük fark şeklinde elde edilmesini sağlayacaktır (Laurent vd,:2006).

2.3. Foerstner ve Moonen Metrik

İki simetrik ve yarı-pozitif belirli matrisler arasındaki uzaklık, özdeğerlerin logaritmik karelerinin toplamı ile ifade edildiğinde aşağıdaki formülle ulaşılmaktadır:

$$d_t = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \ln^2(\lambda_{\max}^{1}(\in_t, H_t))} \qquad (27)$$

Kovaryans matrisleri simetrik ve yarı-pozitif belirli olduğu için, özdeğerlerin pozitif olması sağlanacaktır (Laurent vd,:2006).

Çalışmada elde edilen tahmin sonuçları, gerek misspesifikasyon testleri gerekse metrik uzaklık yardımıyla yorumlanacaktır.

[†]Hermitian matris; transpozesinin eşleniği kendisine eşit olan matristir.

3. Data ve Ampirik Sonuçlar

Çalışmanın ampirik kısmında, Türkiye ekonomisine ilişkin tefe (toptan eşya fiyat indeksi), gecelik faiz oranı (r ve reel döviz kuru (exc) değişkenlerinin 1990-2008 dönemi haftalık (n=988) logaritmik değerleri kullanılmıştır. Sözü edilen serilerin tanımlayıcı istatistikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 1: Tanımlayıcı İstatistikler

	LOGEXC	LOGP	LOGR
Mean	4.747720	15.18042	3.856438
Median	4.728272	15.70048	4.082356
Maximum	5.073297	17.75505	7.363059
Minimum	4.400603	10.94179	2.583998
Std. Dev.	0.140530	2.242894	0.649423
Skewness	0.280214	-0.476736	-0.185570
Kurtosis	2.629117	1.800412	3.811400
Jarque-Bera	17.65136	91.77230	31.11483
Probability	0.000147	0.000000	0.000000
Sum	4453.361	14239.24	3617.339
Sum Sq. Dev.	18.50447	4713.649	395.1804
Observations	988	988	988

Tabloda yer alan değerler incelendiğinde, her üç değişkende de normallikte sapma gözlenmektedir. Kurtosis değerlerine göre, faiz oranı sivri, tefe ise basık bir görünüme sahiptir.

Tablo 2: ADF Test Sonuçları

p (Sabit+trent)	1.954	Δp	-4.434
r (Sabit+trent)	-7.046	Δr	-10.196
exc (Sabit+trent)	-3.245	Δexc	-15.099

%1 ve %5 kritik değerler sırasıyla -3.967 ve -3.414, p için ise -3.437 ve -2.864'tür.

Tablo 2 sonuçlarına göre, p ve exc birinci farkları ile, r ise seviyesinde durağandır. Bundan sonraki aşamada, seriler durağan oldukları mertebede modele dahil edilmişlerdir. Tahminde, AR(5)-GARCH(1,1) süreci izlenmiştir. Her üç modele ilişkin tahmin sonuçları Ek 2'de yer almaktadır. Tahmin sonuçları fonksiyonel biçim açısından değerlendirildiğinde Tablo 3'de yer alan sonuçlara ulaşılmaktadır.

Tablo 3: Koşullu Korelasyonlar Arasındaki Korelasyonlar ve Log-Likelihood, Model Seçim Kriterleri

	Diagonal VEC	Diagonal BEKK	CCC
Diagonal VEC	1.000		
Diagonal BEKK	-0.878	1.000	
CCC	-0.023	0.077	1.000
Log-Likelihood	28006.71	28591.22	26055.90
AIC	-57.455	-58.309	-52.995
SW	-57.025	-58.064	-52.421
HQ	-57.108	-58.216	-52.776

Tablodan elde edilen bilgilere göre, Diagonal VEC ve Diagonal BEKK modelinin koşullu korelasyon değerleri, birbirleri ile yüksek derecede korelasyona sahiptir. CCC modeli ile, diğer iki modelden elde edilen koşullu korelasyonlar arasındaki ilişki oldukça zayıftır. Diğer taraftan Log-likelihood ve AIC; SW ve HQ kriterleri birlikte değerlendirildiğinde, en iyi sonucu veren model Diagonal BEKK modelidir. Model performansını değerlendirmek üzere standartlaştırılmış hatalara ilişkin otokorelasyonu araştırmak için kullanılan birtakım testler mevcuttur. Bu testlerden bir bölümü Ljung-Box üzerine inşa edilmiş ve çoklu GARCH yapısı için modifiye edilmiş testlerdir (Li and McLeod (1981)). Ancak bu testlerin güvenilirliği konusunda farklı fikirler mevcuttur.

Model performansları değerlendirmek üzere kullanılan tekniklerden diğeri metrik uzaklıktır. Bu amaçla hesaplanan üç yöntemden elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir:

Tablo 4: Metrik Uzaklık Ölçüleri

Frobenius Metrik	$\in_t - H_{t,BEKK}$	9.068
	$\in_t - H_{t,CCC}$	690.272
Özdeğer Metrik	$\in_t - H_{t,BEKK}$	30.050
	$\in_t - H_{t,CCC}$	690.271
Forstner Metrik	$\in_t - H_{t,BEKK}$	135.964
	$\in_t - H_{t,CCC}$	312.320

M-GARCH modelleri literatüründe, ilk ortaya atılan test olması bakımından Diagonal VEC modeli bencmark modeli olarak belirlenmiştir. Tablodan elde edilen sonuçlara dayanarak, her üç ölçüye göre Diagonal BEKK modelinin, Diagonal VEC modeline daha yakın sonuçlar verdiği söylenebilir. Elde edilen bu sonuç, iki modelin koşullu korelasyonları arasındaki yüksek korelasyon bilgisi ile tutarlıdır.

Ek 2'de yer alan model tahmin sonuçlarına göre, Diagonal BEKK modelinin tahmin edilmesi neticesinde elde edilen ARCH ve GARCH katsayıları anlamlıdır. Aynı zamanda $\lambda +$ γ <1 şartı sağlanmaktadır.

Sonuç

Literatürde M-GARCH modellerinin tahmin sonuçlarının karşılaştırılmasına ilişkin az sayıda çalışma mevcuttur. Bu çalışmaların bir bölümü metrik uzaklık, bir bölümü ise fonksiyonel biçim üzerine yoğunlaşmıştır. Bu çalışmada, referans gösterilen çalışmalar ışığında, bazı M-GARCH modellerinin tahmin performansları değerlendirilmiştir. Öncelikle M-GARCH modelleri, teorik açılımları ile ele alınmış, ardından Diagonal VEC, Diagonal BEKK ve CCC modellerinin tahmin performansları değerlendirilmiştir.

Karşılaştırmada metrik uzaklığa yönelik olarak kullanılan üç teknik, Frobenius metrik, Özdeğer Metrik ve Foerstner ve Moonen Metrik kriterleridir. Benchmark modeli olarak Diagonal VEC seçildiğinde, her üç tekniğe göre Diagonal BEKK modelinin CCC modeline göre daha yakın sonuçlar verdiği söylenebilir. Bu sonuç, Diagonal BEKK ve

Diagonal VEC modellerinin koşullu korelasyonları arasında gözlenen yüksek korelasyon ile ilintilidir.

Diğer taraftan modeller, fonksiyonel biçim açısından değerlendirildiğinde, Diogonal BEKK modelinin daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmektedir. Diagonal BEKK tahmininden elde edilen koşullu korelasyonlar değerlendirildiğinde p ile r, p ile exc değişkenleri arasında (gecikmeleri de hesaba katıldığında) korelasyon ilişkisinin olduğu görülmektedir. Bu durum, enflasyona ilişkin koşullu korelasyonun, diğer iki değişken üzerinde etkili olduğu sonucuna işaret etmektedir.

The Comparative Analysis Of M-GARCH Models

Abstract: The ARCH model in capturing time-varying variance of economic data in the univariate case has been extended to the multivariate case. An important problem with these models is the a large number of parameters that have to be estimated. This paper compares different M-GARCH type models, namely The Diagonal VEC, Constant Conditional Correlation (CCC) and Diagonal BEKK in terms of their matrix distance metrics. apply three distance metrics, namely Frobenius, Eigenvalue ve Foerstner Metric. The Diagonal VEC is considered as the bencmark. The main finding is that Diagonal BEKK estimation gives more close results with the bencmark than CCC.

Keywords: M-GARCH, metric distance.

Kaynaklar

Alexander, C. (2001) "Orthogonal GARCH" in Mastering Risk Volume *2*, FT Prentice Hall, pp. 21-38.

Alexander, C. (2002) "Principal component Models for Generating Large GARCH Covariance Matrices", Economic Notes, 31(2), pp. 337-359.

Bauwens, L. (2003), "Multivariate GARCH models", Université catholique de Louvain, yayınlanmamış ders notu http://zonecours.hec.ca/documents/A2004-1-190733.mgarch-slides-LB-print.pdf (21.04.2004)

Bollerslev, T., 1986. Generalised autoregressive conditional heteroscedasticity. Journal of Econometrics 31, 307–327.

Bollerslev, T., 1990. Modelling the coherence in short-run nominal exchange rate: a multivariate generalized ARCH approach. Review of Economics and Statistics 72, 498–505.

Bollerslev, T., Engle, R. F., Wooldridge, J. M. (1988). A capital asset p

ricing model withtime varying covariance. Journal of Political Economy, 96, 116–131.

Bollerslev, Tim, 1987. A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. The Review of Economics and Statistics 23, 542-547.

Burns, Patrick, 2005. Multivariate GARCH with only univariate estimation., March-2005, 1-5.

Chiang, Alpha, C.(1986), "Matematiksel İktisadın Temel Yöntemleri",Çev:Ergun Kip, Muzaffer Sarımeşeli, Osman aydoğuş, Teori Yayınları, Ankara.

Drost, Feike C. and Nijman, Theo E.1991. Temporal aggregation of GARCH processes", Econometrica 61/4, 909-1027.

Engle, R.F. and Sheppard, K. 2001. Therotical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate GARCH. Discussion Paper, September 2001-15.

Engle, R.F., Kroner, K.F., 1995. Multivariate simultaneous generalized ARCH. Econometric Theory 11, 122–150.

Engle, R.F., 1982. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. Econometrica 50, 987–1007.

Engle, R.F. 2000. Dynamic conditional correlation –a simple class of multivarıate garch models. Discussion Paper, May, 09.

Engle, R.F.,1983. Estimates of the variance of U.S. inflation based upon the ARCH model. Journal of Money, Credit and Banking 15, 286-301.

Engle, R.F. (ed.)1995. ARCH. Selected Readings. Oxford University Pres, Oxford.

Laurent, S. J.V.K. Rombouts, Annastiina Silvennoinen and Francesco Violante (2006), "Comparıng And Rankıng Covarıance Structures Of M-Garch Volatılıty Models", Ox-Metrics News Programme, October 4, 2006, London.

Li, W.K., McLeod, A.I. (1981). Distribution of the residual autocorrelations in multivariate ARMA time series models. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 43,2, 231-239.

Milhoj, Anders, 1987. A conditional variance model for daily deviations of an exchange rate. Journal of Business and Economic Statistics 5, 1, 99-103.

Silvennoinen, A., Terasvista, T., 2008, Multivariate GARCH models. SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance, 669.

Tse, Y.K., Tsui, A.K.C., 2002.A multivariate generalized autoregressive conditional eteroscedasticity model with time-varying correlations. Journal of Business and Economic Statistics 20, 351–362.

Tse, Y.K. 2000. A test for constant correlations in a multivariate GARCH model. Journal of Econometrics, 98, 107-127.

Weide, Van Der R., 2002. GO-GARCH:A multivariate generalized orthogonal GARCH model. Journal of Applied Econometrics 17, 549-564.

Ek 1: Diagonal BEKK Modelinden Elde edilen Koşullu korelasyonlar

	exc	p	r	exc(-1)	p(-1)	r(-1)	exc(-2)	p(-2)	r(-2)	exc(-3)	p(-3)	r(-3)
exc	1.00											
p	-0.03	1.00										
r	-0.05	0.20	1.00									
exc (-1)	-0.00	-0.18	-0.04	1.00								
p (-1)	-0.01	0.06	0.17	-0.03	1.00							
r (-1)	-0.07	0.23	0.96	-0.05	0.18	1.00						
exc (-2)	-0.00	-0.01	-0.05	-0.00	-0.18	-0.05	1.00					
p (-2)	-0.01	-0.22	0.20	-0.01	0.07	0.19	-0.03	1.00				
r (-2)	-0.01	0.22	0.95	-0.08	0.21	0.96	-0.06	0.19	1.00			
exc (-3)	-0.00	-0.01	-0.06	-0.00	-0.01	-0.05	-0.00	-0.18	-0.05	1.00		
p (-3)	-0.01	-0.19	0.35	-0.01	-0.27	0.34	-0.01	0.03	0.34	-0.03	1.00	
r (-3)	-0.02	0.20	0.94	-0.02	0.20	0.95	-0.08	0.23	0.96	-0.06	0.34	1.00

Ek 2:Diagonal-VEC, CCC ve Diagonal BEKK Tahmin Sonuçları

Tahmin Modelleri	β	λ	γ
Diagonal-VEC	0.7238(89.9875)*	0.000048(0.9645)	0.3052(11.1636)*
CCC	0.1004(1.1814)	0.000073(0.5357)	0.9637(6.3397)*
Diagonal BEKK	0.8505(179.815)*	0.000047(0.9399)	0.043(22.3139)*

(*) ve (**),%1 ve %5 anlamlılığa işaret etmektedir. Parantez içindeki değerler, t istatistiklerini göstermektedir.