Erc.Ünv.Fen Bil. Derg., 7, 1, (1991), 1112-1120

TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNDE TOPOLOJİK GRUBUN OLUŞTURDUĞU GRUPLARIN DEMETİ

Cemil YILDIZ
İnönü Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi MALATYA

ÖZET

Bu çalışmada, Homotopi ve Demet Teorisi birlikte göz önüne alınarak Topolojik grup vasıtasıyla bir cebirsel yapıda demet oluşturulmuş ve neticede bazı cebirsel Topolojik karakterizasyonlar verilmiştir.

THE SHEAF OF THE GROUPS FORMED BY TOPOLOGICAL GROUP OVER TOPOLOGICAL SPACES

SUMMARY

In this paper, we consider both homotopy and sheaf theory and construct an algebraic sheaf by means of the topolocical group.Finally,we give some algebraic topological characterizations.

1.Topolojik uzaylar üzerinde topolojik gurubun oluşturduğu grupların demeti.

Tanım 1.1 X,S iki topolojik uzay ve $\pi : S \rightarrow X$ bir yerel topolojik tasvir olsun. Bu durumda (S, π) çiftine veya kısaca S ye X üzerinde bir demet denir (1).

$\mathcal{C}$ topolojik uzayların bir kategorisi ve X de bu kategoride her $x \varepsilon X$ için (X,x) ler aynı homotopi tipine sahip olsun. Bu kategoride bütün topolojik vektör uzaylarıda bulunsun.

$X \varepsilon \mathcal{C}$ bir taban cümle ve P birim elemanı taban noktası olan herhangibir topolojik grup alalım. Bu durumda (X,x) den (P,p_0) a taban noktalarını koruyan, taban noktalarına göre homotop tasvirlerin homotopi sınıflarının $[(X,x) ; (P,p_0)]$ cümlesi bir gruptur. (Burada $x \varepsilon X$ ve $p_0 \varepsilon P$,P nin birim elamanı olan taban noktasıdır.) Üstelik bu gruplar birbirinden farklıdır(2). Herbir $x \varepsilon X$, (X, x) noktalı topolojik uzay için oluşturulan $S(X) = \bigvee_{x \varepsilon X} [(X,x) ; (P,p_0)]$ cümlesi X üzerinde bir cümledir.

Şimdi ϕ: $S(X) \rightarrow X$ tasfirini aşağıdaki gibi tanımlayalım: $\sigma \varepsilon S(X)$

alındığında bir x εX noktası vardır. Öyleki $\sigma=[f]_x \; \varepsilon \; [(X,x);(P,p_0)]$. Bu durumda $\phi(\sigma)=x$. Eğer $x_0 \; \varepsilon \; X$ keyfi sabit bir nokta ise, bu durumda X de x_0 in açık bir komşuluğunu $V=V(x_0)$ olsun. $s:V \to S(X)$ tasvirini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

Eğer $x_0 \; \varepsilon \; X$ ise S(X) de bir $[(X,x_0);(P,p_0)]$ grubu vardır. $[f]_{x_0}$, $[(X,x_0);(p,p_0)]$ grubunda bir homotopi sınıfı olsun. Eğer y, V de herhangi bir nokta ise, bu durumda (X,x_0) ve (X,y) aynı homotopi tipinden olduklarından (X,y) den (X,x_0)'a bir Φ homotopi eşdeğerlilik tasviri vardır. Böylece

$$\begin{tikzcd}
(X,x_0) \arrow[r, "f"] & (P,p_0) \\
(X,y) \arrow[u, "\Phi"] \arrow[ur, "fo\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

diagramında görülen $fo\,\Phi: (X,y) \to (P,p_0)$ tasviri sürekli ve taban noktasını korur. $fo\,\Phi=h$ tasvirinin homotopi sınıfı $[h]_y \; \varepsilon \; [(X,y);(p,p_0)]$ dır. O halde $s(y)=[h]_y$ olarak tanımlayalım. Bu şekilde elde edilen s tasviri iyi tanımlıdır ve her bir y εV için $(\phi o s)(y)=\phi(s(y))=y$. O halde $\phi o s=I_V$. Böylece $s(V)=\underset{y \varepsilon V}{} [h]_y$ olarak yazılabilir. Kolayca gösterilebilirki

$$\tau=\{s(V):V=V(x) \subset X, x\varepsilon X s\varepsilon\Gamma(V,S(X))\}$$

ailesi S(X) üzerinde bir topoloji tabanıdır. Böylece S(X) bir topolojik uzaydır.

Şimdi gösterelim ki, $\phi:S(X) \to X$ doğal tasviri bir yerel topolojik tasvirdir. Eğer $\sigma=[h]_y \; \varepsilon S(X)$ ve $y\varepsilon X$ ise, bu durumda $\phi(\sigma)=\phi([h]_y)=y$. y yi kapsayan V açık komşuluğu için bir $s:V \to S(X)$ tasviri vardır öyleki $s(y)=\sigma$. Ayrıca $U(\sigma)=s(V)$ ve $\phi|U=\phi^*$ olarak alalım.

1. $\phi^*:U \to V$ tasviri bire-birdir. Gerçekten, herhangi $\sigma_1, \sigma_2 \; \varepsilon s(V)$ için V de sırasıyla y_1, y_2 noktaları vardır. Öyleki $\sigma_1=s(y_1)=[fo\Phi]_{y_1}$, $\sigma_2=s(y_2)=[fo\Phi']_{y_2}$. Yani

$$\begin{tikzcd} (X,x_0) \arrow[r, "f"] & (p,p_0) \\ (X,y_1) \arrow[u, "\Phi"] \arrow[ur, "fo\Phi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X,x_0) \arrow[r, "f"] & (p,p_0) \\ (X,y_2) \arrow[u, "\Phi'"] \arrow[ur, "fo\Phi'"'] & \end{tikzcd}$$

Eğer $\phi^*(\sigma_1) = \phi^*(\sigma_2)$ ise, buradan $\phi^*(s(y_1)) = \phi^*(s(y_2)) \Rightarrow \phi^*([fo\Phi]y_1) = \phi^*([fo\Phi']y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$. O halde $\Phi \sim \Phi' \Rightarrow fo\Phi \sim fo\Phi' \Rightarrow [fo\Phi]y_1 = [fo\Phi']y_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$.

2. $\phi^*: U \rightarrow V$ tasviri süreklidir. Eğer σ , U da herhangibir eleman $\phi^*(\sigma) = y \varepsilon V$ ve $W = W(y) \subset V$, y nin bir komşuluğu ise, bu durumda $s(W) \subset U$, σ nın bir komşuluğudur ve $\phi^*(s(W)) = W \subset V$. bu yüzden ϕ^* süreklidir.

3. $\phi^{*-1} = (\phi \mid U)^{-1} = s: V \rightarrow U = s(V)$ süreklidir. Eğer y,V de herhangi bir eleman, $s(y) = \sigma \varepsilon U$ ve $U' = U'(\sigma) \subset U$, σ nın bir komşuluğu ise, bu durumda $(\phi \mid U)(U') \subset V$, y nin V de bir komşuluğudur, ve $s((\phi \mid U))(U') = U' \subset U$. Bu yüzden ϕ^{*-1} süreklidir.
Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem.1.1. P topolojik grup ve $X \varepsilon \mathcal{C}$ olsun. Eğer $S(X) = \bigvee_{x \varepsilon X} [(X,x);(P,p_0)]$ ve $\phi : S(X) \rightarrow X$ doğal tasviri her $\sigma = [f]_x \varepsilon S(X)$, $x \varepsilon X$ için $\phi(\sigma) = \phi([f]_x) = x$ ise, bu durumda S(X) üzerinde bir topoloji vardır, öyleki ϕ bu topolojiye göre yerel topolojiktir. Böylece $(S(X), \phi)$ çifti X üzerinde bir demettir.

Tanım.1.2. Teorem.1.1 ile elde edilen $(S(X), \phi)$ demetine P topolojik grubun (X,x), $x \varepsilon X$ noktalı topolojik uzaylar üzerinde oluşturduğu grupların demeti denir.

Tanım.1.3. Her bir $x \varepsilon X$ için $[(X,x);(P,p_0)] = \phi^{-1}(x)$ grubuna demetin X üzerindeki sapı denir, ve $S(X)_x$ ile gösterilir.

Eğer $x \in X$ keyfi sabit bir nokta ve $V=V(x)$,x ın X de bir açık komşuluğu ise, S(X) ın topolojisinin inşasında tanımlanan, $s:V \to S(X)$ tasvirine S(X) ın V üzerindeki kesiti denir. S(X) ın V üzerindeki bütün kesitlerin cümlesine $\Upsilon(V,S(X))$ ile gösterelim. Kolayca gösterilebilir ki $\Upsilon(V,S(X))$ cümlesi aşağıda tanımlanan noktasal çarpım işlemi ile birlikte bir gruptur:

Herhangi $s_1,s_2 \in \Upsilon(V,S(X))$ ve $y \in V$ için

$$(s_1.s_2)(y)= s_1(y)\, s_2(y)$$

olsun. Bu çarpım işlemi iyi tanımlı ve kapalıdır. Açıkça çarpım işlemi birleşimli ve $[(X,x);(P,p_o)]$ nın birim elemanından elde edilen $I:V \to S(X)$ tasviri birim elemandır. Ayrıca herhangi $s \in \Upsilon(V,S(X))$ için invers eleman, yani $s^{-1} \in \Upsilon(V,S(X))$, P topolojik grubun invers elemanı vasıtasıyla elde edilir. O halde $\Upsilon(V,S(X))$ bir gruptur. Bu suretle $(.)$: $S(X) \oplus S(X) \to S(X)$ işlemi (yani, her $\sigma_1,\sigma_2 \in S(X)$ için $(\sigma_1,\sigma_2) \to \sigma_1.\sigma_2$) süreklidir. O halde $(S(X), \phi)$ cebirsel bir demettir.

2. Karakterizasyonlar

$X_1,X_2,\mathcal{C}$ kategorisinde topolojik uzaylar, P taban noktası birim eleman olan bir topolojik grup ve $S(X_1),S(X_2)$ sırasıyla oluşturulan demetler olsun. Gösterim olarak bunları $(X_1,S(X_1))$ ve $(X_2,S(X_2))$ çiftleri şeklinde gösterelim.

Tanım.2.1. $(X_1,S(X_1))$ ve $(X_2,S(X_2))$ çiftleri verilmiş olsun. Bu çiftler arasında aşağıdaki şartları sağlayan bir homomorfizm vardır denir, ve $F=(\alpha^*,\alpha):(X_1,S(X_1)) \leftrightarrows (X_2,S(X_2))$ şeklinde yazılır:

1. $\alpha:X_1 \to X_2$ üzerine tasviri açık ve sürekli ise,

2. $\alpha^*:S(X_2) \to S(X_1)$ tasviri açık ve sürekli ise,

3. α^* sapları korur. Yani her $S(X_2)_{\alpha(x_1)} \subset S(X_2)$ sapı için $\alpha^*(S(X_2)_{\alpha(x_1)}) \subset S(X_1)_{x_1}$ öyleki $\alpha(x_1)=x_2 \in X_2$.

4. Her $\alpha(x_1) = x_2 \in X_2$ için $\alpha^* | S(X_2)_{\alpha(x_1)}:S(X_2)_{\alpha(x_1)} \to S(X_1)_{x_1}$ kısıtlaması bir homomorfizm ise.

Tanım.2.2. $(X_1,S(X_1))$ ve $(X_2,S(X_2))$ çiftleri verilmiş olsun. Bu çiftler arasında bir izomorfizm vardır denir. Eğer $F=(\alpha^*, \alpha):(X_1, S(X_1)) \leftrightarrows (X_2, S(X_2))$ bir homomorfizm ve α^*, α topolojik tasvirler ise. Bu çiftler izomorfiktir denir ve $(X_1, S(X_1)) \overset{F}{\sim} (X_2, S(X_2))$ şeklinde gösterilir.

Teorem.2.1.$(X_1, S(X_1))$ ve $(X_2, S(X_2))$ çiftleri verilmiş olsun. Eğer $\alpha: X_1 \to X_2$ üzerine tasviri açık ve sürekli olarak verilmiş ise, bu durumda $(X_1, S(X_1))$ ve $(X_2, S(X_2))$ çiftleri arasında bir homomorfizm vardır.

İspat: $X_1 \varepsilon X_1$ keyfi sabit bir nokta olsun. Bu durumda $\alpha(x_1) \varepsilon X_2$ ve $[(X_1, x_1); (p, p_0)] = S(X_1)_{x1} \subset S(X_1)$, $[(X_2, \alpha(x_1)); (P, p_0)] = S(X_2)_{\alpha(x1)} \subset S(X_2)$ oluşan saplardır.

Şimdi P birim elemanı taban noktası olan bir topolojik grup olmak üzere, taban noktaları sırasıyla x_1 ve $\alpha(x_1)$ olan (X_1, x_1), $(X_2, \alpha(x_1))$ noktalı topolojik uzaylarını gözönüne alalım. Eğer $f_2, g_2 : (X_2, \alpha(x_1)) \to (P, p_0)$ taban noktalarını koruyan sürekli tasvirler ise, bu durumda $f_1, g_1 : (X, x_1) \to (P, p_0)$ taban noktalarını koruyan sürekli tasvirleri $f_1 = f_2 o \alpha$ ve $g_1 = g_2 o \alpha$ şeklinde tanımlayabiliriz. Ayrıca, $f_2 \sim g_2$ rel. $\alpha(x_1)$ ise, kolayca gösterilebilir ki, $f_1 \sim g_1$ rel. x_1. Bu yüzden $[f]_{\alpha(x1)} \to [fo\ \alpha]_{x1}$ eşlemesi tek anlamlıdır ve $(X_2, \alpha(x_1))$ den (P, p_0) a taban noktalarını koruyan sürekli tasvirlerin homotopi sınıflarına, (X_1, x_1) den (P, p_0) a taban noktalarını koruyan sürekli tasvirlerin homotopi sınıflarına tasvir eder. Yani, bu eşleme $[f]_{\alpha(x1)}$ elemanına bir tek $[fo\ \alpha]_{x1}$ elemanını karşılık getirir.

$x_1 \varepsilon X_1$ keyfi sabit bir nokta olarak alındığından yukarıdaki eşleme $\alpha^*: S(X_2) \to S(X_1)$ tasvirini verir, öyleki her $[f] \varepsilon S(X_2)$ için $\alpha^*([f]) = [fo\ \alpha] \varepsilon S(X_1)$.

$$\begin{array}{ccc} S(X_1) & \xleftarrow{\alpha^*} & S(X_2) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi_1 \\ X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \end{array}$$

1. α^* süreklidir. Çünkü, eğer $U_1 \subset S(X_1)$ herhangibir açık cümle ise, bu durumda gösterilebilirki, $\alpha^{*^{-1}}(U_1)=U_2 \subset S(X_2)$ bir açık cümledir. Gerçekten, eğer $U_1 \subset S(X_1)$ bir açık cümle ise, $V_i \subset X_1$, $i \varepsilon I$ açık komşuluklar ve $s^1_i: V_i \rightarrow S(X_1)$, V_i üzerinde kesitler olmak üzere $U_1 = \bigcup_{i\varepsilon I} s^1_i(V_i)$ ve $\phi_1(U_1) = \bigcup_{i\varepsilon I} V_i$ dir. O halde $\bigcup_{i\varepsilon I} V_i \subset X_1$ açıktır ve α açık tasvir olduğundan $\alpha(\bigcup_{i\varepsilon I} V_i) = \bigcup_{i\varepsilon I} \alpha(V_i) \subset X_2$ açıktır. Ayrıca, yine α açık tasvir olduğundan $\alpha(V_i)$, $i\varepsilon I$, X_2 de açık komşuluklardır ve $\exists\, s^2_i$, $i\varepsilon I$ kesitleri vardır öyleki $\bigcup_{i\varepsilon I} s^2_i(\alpha(V_i)) \subset S(X_2)$ bir açık cümledir. Gösterelim ki, $U_2 = \bigcup_{i\varepsilon I} s^2_i(\alpha(V_i))$ dır.

Şimdi, $\sigma_2 = [f]_{\alpha(x_1)} \varepsilon U_2$ herhangi bir eleman ise, $\exists \sigma_1 = [h]_{x_1} \varepsilon U_1$ öyleki $\alpha^*(\sigma_2) = \sigma_1$ dır. $\phi_1(\sigma_1) = \phi([h]_{x_1}) = x_1$. Dolayısıyla, $\exists i\varepsilon I$ için $x_1 \varepsilon V_i$ ise $\alpha(x_1) = x_2 \varepsilon \alpha(V_i)$ ve $\sigma_2 = [f]_{x_2} \varepsilon \bigcup_{i\varepsilon I} s^2_i(\alpha(V_i))$. O halde $U_2 \subset \bigcup_{i\varepsilon I} s^2_i(\alpha(V_i))$.

Diğer taraftan $\sigma_2 \varepsilon \bigcup_{i\varepsilon I} s^2_i(\alpha(V_i))$ herhangi bir eleman ise, $\exists i\varepsilon I$ için $\sigma_2 \varepsilon s^2_i(\alpha(V_i))$ dır. Buradan $\sigma_2 = [f]_{x_2}$ ise, $\phi_2(\sigma_2) = x_2$ ve $x_1 \varepsilon V_i$, $\alpha(x_1) = x_2$ olmak üzere, $f o \alpha : (X_1, x_1) \rightarrow (p, p_o)$ tasviri sürekli ve taban noktasını korur. Dolayısıyla $[f o \alpha]_{x_1} = \alpha_1 \varepsilon U_1$. Buradan $\sigma_2 \varepsilon U_2$ dır. O halde $\bigcup_{i\varepsilon I} s^2_i(\alpha(V_i)) \subset U_2$. Netice olarak $U_2 = \bigcup_{i\varepsilon I} s^2_i(\alpha(V_i))$ ve α^* süreklidir.

2. α^* açık tasvirdir. Gerçekten, $U_2 \subset S(X_2)$ herhangi bir açık cümle

ise, gösterelim ki, $\alpha^*(U_2) = U_1 \subset S(X_1)$ bir açık cümledir. $U_2 \subset S(X_2)$ bir açık cümle ise, $W_i \subset X_2$, $i\varepsilon I$ açık komşuluklar ve $s^2_i : W_i \to S(X_2)$ kesitler olmak üzere $U_2 = \bigcup_{i\varepsilon I} s^2_i\ (W_i)$ ve $\phi_2\ (U_2) = \bigcup_{i\varepsilon I} W_i$ dir. Bu yüzden, $\bigcup_{i\varepsilon I} W_i \subset X_2$ açıktır ve α sürekli olduğundan $\alpha^{-1}\ (\bigcup_{i\varepsilon I} W_i) = \bigcup_{i\varepsilon I} \alpha^{-1}\ (W_i) \subset X_1$ açıktır. Yine α sürekli olduğundan $\alpha^{-1}\ (W_i)$, $i\varepsilon I$, X_1 de açık komşuluklardır ve $\exists\ s^1_i$, $i\varepsilon I$ kesitleri vardır Öyleki $\bigcup_{i\varepsilon I} s^1_i\ (\alpha^{-1}\ (W_i))$ $S(X_1)$ bir açık cümledir. Gösterelim ki $U_1 =_{i\varepsilon I} s^1_i\ (\alpha^{-1}\ (W_i))$

Eğer $\sigma_1 = [h]_{x_1} \varepsilon\ U_1$ herhangi bir eleman ise, $\exists \sigma_2 = [f]_{\alpha(x_1)} \varepsilon\ U_2$ öyleki $\alpha^*(\sigma_2) = \sigma_1$ dır, ve $\phi_2\ (\sigma_2) = \phi_2\ ([f]_{\alpha(x_1)}) = \alpha(x_1) = x_2$. O halde $\exists i\varepsilon I$ için $\alpha(x_1) = x_2\ \varepsilon W_i$ ise, $x_1 \varepsilon\ \alpha^{-1}\ (W_i)$ ve $\sigma_1 = [fo\alpha]_{x_1} \varepsilon \bigcup_{i\varepsilon I} s^1_i\ (\alpha^{-1}\ (W_i))$.
Buradan $U_1 = \bigcup_{i\varepsilon I} s^1_i\ (\alpha^{-1}\ (W_i))$.

Diğer taraftan, eğer $\sigma_1\ \varepsilon_{i\varepsilon I}\ s^1_i\ (\alpha^{-1}\ (W_i))$ herhengi bir eleman ise, $\exists i\varepsilon I$ için $\sigma_1\ \varepsilon\ s^1_i\ (\alpha^{-1}\ (W_i))$ dır. $\sigma_1 = [fo\alpha]_{x_1}$ ise $\phi_1\ (\sigma_1) = x_1$ dır. $\alpha(x_1) = x_2\ \varepsilon W_i$ olmak üzere $f: (X_2, \alpha(x_1)) \to (P, p_o)$ tasviri sürekli ve taban noktasını korur. Dolayısıyla, $[f]_{\alpha(x_1)} = \sigma_2\ \varepsilon U_2$ dır. Buradan $\sigma_1\ \varepsilon U_1$ ve $\bigcup_{i\varepsilon I} s^1_i\ (\alpha^{-1}\ (W_i)) \subset U_1$ dır. Sonuçta $U_1 = \bigcup_{i\varepsilon I} s^1_i\ (\alpha^{-1}\ (W_i))$ ve α^* açık bir tasvirdir.

3. α^* sapları korur. Gerçekten, her $[f]_{x_2} \varepsilon S(X_2)_{x_2}$ için $\alpha^*([f]_{x_2}) = [fo\alpha]_{x_1} \varepsilon S(X_1)_{x_1}$ ve $\alpha(x_1) = x_2$. O halde $\alpha^*(S(X_2)_{x_2} \subset S(X_1)_{x_1}$ öyleki $\alpha(x_1) = x_2$.

4. $\alpha(x_1) = x_2\ \varepsilon\ X_2$ için $\alpha^* \mid S(X_2)_{x_2} : S(X_2)_{x_2} \to S(X_1)_{x_1}$ bir homomorfizmdir. Gerçekten, $\alpha(x_1) = x_2\ \varepsilon\ X_2$ için $f_2, g_2 : (X_2, x_2) \to (P, p_o)$ taban noktalarını koruyan sürekli tasvirler ve bunlara karşı gelen ta-

ban noktalarını koruyan sürekli tasvirler $f_1=f_2o\alpha, g_1=g_2o\alpha:(X_1,x_1)\rightarrow(P,p_0)$ ise, bu durumda $[f]_{x2}, [g]_{x2}\varepsilon S(X_2)_{x2}$, $[fo\alpha]_{x1},[go\alpha]_{x1}\varepsilon S(X_1)_{x1}$ dır.

$$\alpha^*([f]_{x2}[g]_{x2}) = \alpha([fg]_{x2}) = [(fg)o\alpha]_{x1} = [(fo\alpha)(go\alpha)]_{x1}$$

$$= [fo\alpha]_{x1}\,[go\alpha]_{x1}) = \alpha^*([f]_{x2})\alpha^*([g]_{x2}).$$

Sonuç olarak $F=(\alpha^*,\alpha)$ ikilisi bir homomorfizmdir.

Teorem.2.2. $(X_1,S(X_1))$, $(X_2,S(X_2))$, $(X_3,S(X_3))$ çiftleri ve $\alpha_1:X_1\rightarrow X_2$, $\alpha_2:X_2\rightarrow X_3$, üzerine tasvirleri açık ve sürekli olarak verilmiş olsun. Bu durumda $F=(\alpha^*,\alpha):(X_1,S(X_1,)\leftrightarrows(X_3,S(X_3)$ homomorfizmi vardır öyleki $\alpha=\alpha_2o\alpha_1$, $\alpha^*=\alpha_1{}^*o\,\alpha_2{}^*$ dır .

İspat: $\alpha_2o\alpha_1: X_1\rightarrow X_3$ tasviri üzerine açık ve sürekli olduğundan Teorem 2.1. den $F=(\alpha^*,\alpha=\alpha_2o\alpha_1):(X_1,S(X_1)\leftrightarrows(X_3,S(X_3))$ bir homomorfizmdir. Bunun için $\alpha^*=\alpha_1{}^*o\,\alpha_2{}^*$ olduğunu göstermemiz ispat için yeterlidir. Herhangi bir $[f]\,\varepsilon(X_3)$ için $\alpha^*([f]) = (\alpha_1{}^*o\,\alpha_2{}^*)([f])$ olduğunu gösterelim.

$$\alpha^*([f]) = [fo\alpha]=[\,fo(\alpha_2o\,\alpha_1)] = [(fo\alpha_2)o\,\alpha_1] =\alpha_1{}^*([fo\alpha_2)])$$

$$= \alpha_1{}^*(\,\alpha_2{}^*([f])= (\alpha_1{}^*o\,\alpha_2{}^*)([f]) \Rightarrow \alpha^*=\alpha_1{}^*o\,\alpha_2{}^*.$$

Şimdi aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem.2.3. Topolojik uzaylar ve üzerine, açık ve sürekli tasvirlerin $\mathcal{C}$ kategorisinden, Demetler ve demet homomorfizmler kategorisine bir kontravaryant funktor vardır.

Teorem.2.4. $(X_1,S(X_1))$ ve $(X_2,S(X_2))$ çiftleri verilmiş olsun. Eğer, $\alpha:X_1\rightarrow X_2$ bir topolojik tasvir ise, bu durumda $(X_1,S(X_1))$ ve $(X_2,S(X_2))$ çiftleri arasında bir izomorfizm vardır.

İspat: Teorem.2.1. den dolayı $(X_1,S(X_1))$ ve $(X_2,S(X_2))$ çiftleri arasında $F=(\alpha^*,\alpha)$ homomorfizmi vardır. Teoremin ispatı için α^* bire bir ve α^{*-1} in sürekli olduğunu göstermemiz yeterlidir. α bir topolojik tasvir olduğundan α^{-1} süreklidir. Bu durumda teorem 2.1.

den dolayı $F=(\alpha^*,\alpha)$ ve $F^{-1}=((\alpha^{-1})^*, \alpha^{-1})$ homomorfizmleri vardır.

Diğer yandan, herhangi iki $[f_2]$, $[g_2] \varepsilon S(X_2)$ elemanı için $\alpha^*([f_2])=\alpha^*([g_2]) \Rightarrow [f_1]=[g_1] \Rightarrow (\alpha^{-1})^*([f_1])=(\alpha^{-1})^*([g_1])$. Burada $(\alpha^{-1})^*(\alpha^*([f_2])=(\alpha^{-1})^*(\alpha^*([g_2]))$ dır. $(\alpha^{-1})^* o(\alpha)^*=(\alpha o^{-1})_*$ ve $\alpha o \alpha^{-1}=I_{X2}$, $(\alpha o \alpha^{-1})^*=I_{S(X2)}$ olduğundan $\alpha^*([f_2])=\alpha^*([g_2]) \Rightarrow [f_2])=[g_2]$.

$\alpha_*^{-1}=(\alpha^{-1})_*$ olduğundan α_*^{-1} süreklidir. O halde $F=(\alpha^*,\alpha)$ bir izomorfizmdir.

REFERANSLAR

[1]. Grauert, H., Fritzshe, K., Several Complex Variables, Springer-Verlag, (1976)

[2]. Spanier, E. H., Algebraic Topology. Mc Graw-Hill Publishing Company Theory, (1966)

[3]. Gray, B., Homotopy Theory, Acedemic preas New York San Francisco London (1975)

[4]. Whitehead, G. W., Elements of Homotopy Theory, Springer-Verlag (1978)

[5]. Sze-Tsen Hu. Structure of the homotopy groups of mapping spaces, American Journal of Mathematics, Vol. LXXI, no:3,pp.574-586, (1949)

[6]. Baues, H. J., Commutator Calculus and Groups of Homotopy Classes, Cambridge, (1981)

[7]. James, I. M., Quart. J.of Math. Oxford (2) 11 (1960) 161-179