Erc.Üniv.Fen Bil.Derg., 5, 1-2 (1989), 875-880

MODULUS FONKSİYONU İLE TANIMLANMIŞ BİR DİZİ UZAYI

Serpil Pehlivan, Akdeniz Üniversitesi, Antalya.

ÖZET

Bu çalışmada, f modulus fonksiyonu tarafından tanımlanmış $[F_o(f)]$ dizi uzayının bazı özellikleri verilmiş ve kapsama bağıntıları incelenmiştir.

SEQUENCE SPACE DEFINED BY A MODULUS FUNCTION

SUMMARY

In this study, some properties and inclusion relations of the sequence space $[F_o(f)]$ defined by a modulus function have been investigated.

1. GİRİŞ

Hemen hemen yakınsak dizilerin F uzayı G.G. Lorentz [3] tarafından tanımlanmıştır. Lorentz'in ispatına göre bir $x=(x_k)$ dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, n'e göre düzgün olarak,

$$(p+1)^{-1} \sum_{k=o}^{p} x_{n+k} \to \ell \quad (p \to \infty)$$

olmasıdır, [3, Teo.1]. Maddox [4] kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayını tanımlamıştır. $x=(x_k)$ dizisinin kuvvetli hemen hemen yakınsak olması için n'e göre düzgün olarak

$$(p+1)^{-1} \sum_{k=o}^{p} |x_{n+k} - \ell| \to 0 \quad (p \to \infty)$$

olmasıdır. Bu özelliği gerçekleyen dizilerin uzayı [F] ile gösterilir. [F] dizi uzayında özel olarak $\ell=0$ ise sıfıra kuvvetli hemen hemen yakınsak bütün dizilerin uzayı $[F_o]$ elde edilir.

Yukarıdaki dizi uzaylarının özellikleri ve bazı dizi uzayları ile matris dönüşümlerinin karakterizasyonu King [2], Duran [1], Maddox [5], Nanda [9],... tarafından incelenmiştir.

Modulus fonksiyonunun tanımı 1953 de Nakano [8] tarafından verilmiştir. Ruckle [10], A.Wilansky'nin "$\{e_1, e_2, \ldots\}$ birim vektörlerinin sınırlı kümesini bulunduran en küçük FK uzayı varmıdır?" sorusuna cevap ararken

$$L(f) = \{x = (x_k): \sum_{k=1}^{n} f(|x_k|) < \infty\}$$

dizi uzayını f modulus fonksiyonu yardımıyla tanımlamış ve bu dizi uzayınının bazı özelliklerini vermiştir. Maddox [6,7] çalışmasında f modulus fonksiyonu ile kuvvetli toplanabilir dizilerin klasik uzaylarını genelleştirmiştir.

Bu çalışmamızda, $[F_o(f)]$ uzayını tanımlayacağız ve bu dizi uzayı için bazı kapsama bağıntılarını vereceğiz.

2. TANIMLAR

Önce f modulus fonksiyonunun tanımını vereceğiz.

(i) $f(x)=0$ olması için gerek ve yeter koşul $x=0$ olmasıdır,

(ii) Her $x \geq 0$, $y \geq 0$ için $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$,

(iii) f artandır,

(iv) $\lim f(x)=0$ $(x \to 0^+)$,

yukarıdaki koşulları gerçekleyen $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ sürekli fonksiyonuna f modulus fonksiyonu denir. f modulus fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir. (Örneğin, $f(x)=x/(1+x)$ sınırlı, $f(x)=x/(1+x)^{1/2}$ sınırsız modulus fonksiyonlarıdır).

Kompleks sayıların tüm sonsuz dizilerinin lineer uzayı s ve kompleks sayıların tüm sınırlı dizileri uzayı ℓ_∞ ile tanımlansın. $[F_o]\subset[F]\subset F\subset\ell_\infty$ bağıntısı vardır.

f modulus fonksiyonu verilsin.

$$t_{p,n} = (p+1)^{-1}\sum_{k=o}^{p} f(|x_{n+k}|)$$

olmak üzere;

$$[F_o(f)] = \{x \varepsilon s : t_{p,n}(x)\to 0 \quad (p\to\infty\ ,\ n\text{'e göre düzgün})\}$$

dizi uzayını tanımlayalım. $x,y\ \varepsilon[F_o(f)]$ ve $\lambda,\mu\varepsilon\ \mathbb{C}$ $|\lambda|\ \ M_\lambda$, $|\lambda|\le N_\mu$ olmak üzere M_λ ve N_μ tamsayıları bulabiliriz. Bu durumda;

$$t_{p,n}(\lambda x+\mu y) = (p+1)^{-1}\sum_{k=o}^{p} f(|\lambda x_{n+k}+\mu y_{n+k}|)$$

f modulus fonksiyonunun tanımındaki (ii) koşulundan;

$$\le (p+1)^{-1}\left(\sum_{k=o}^{p} f(|\lambda x_{n+k}|) + f(|\mu y_{n+k}|)\right)$$

$$\le (p+1)^{-1}\left(\sum_{k=o}^{p} M_\lambda f(|x_{n+k}|) + N_\mu f(|y_{n+k}|)\right)$$

$$= M_\lambda\, t_{p,n}(x) + N_\mu\, t_{p,n}(y)$$

elde edilir. O halde $[F_o(f)]$ lineer uzaydır.

$f(x)=x$ alırsak, $[F_o(f)]$ dizi uzayının tanımından kolayca görebiliriz ki $[F_o(f)] = [F_o]$ dır.

$L(f)$ uzayı için $M(L(f))=\{a=(a_k)\varepsilon s : ax=(a_k x_k)\ L(f),\ V_x=(x_k)\varepsilon L(f)\} = \ell_\infty$ ile tanımlanmıştır, [10].

Benzer şekilde $M([F_o(f)])=\{a=(a_k)\in s: ax\in[F_o(f)],\ \forall x\in[F_o(f)]\}$ tanımlanır. Φ de sonlu sayıda sıfırdan farklı elemanı bulunan kompleks terimli diziler uzayını göstersin. Şimdi yukarıda tanımlanan dizi uzayları arasındaki bazı kapsama bağıntılarını verelim.

3. TEOREM A

Herhangi bir f modulus için $\ell_\infty \subset M([F_o(f)])$ dir.

İspat : $x\in[F_o(f)]$ olsun. Bu durumda n'e göre düzgün olarak,

$$t_{p,n}(x) = (p+1)^{-1}\sum_{k=n}^{n+p} f(|x_k|) \to 0 \qquad (p\to\infty)$$

dır. $a=(a_k)\in\ell_\infty$ olsun. Her k için $|a_k| < 1+[\![T]\!]$ olacak şekilde tam değeri $[\![T]\!]$ olan $T>0$ vardır. O halde n'e göre düzgün olarak;

$$t_{p,n}(ax) = (p+1)^{-1}\sum_{k=n}^{n+p} f(|a_k x_k|)$$

$$\leq (p+1)^{-1}\sum_{k=n}^{n+p}(1+[\![T]\!])\, f(|x_k|)$$

$$(1+[\![T]\!])\,(p+1)^{-1}\sum_{k=n}^{n+p} f(|x_k|)$$

elde edilir. $p\to\infty$ için $t_{p,n}(ax)\to 0$ olacağından teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Bu dizi uzayına örnek için; $f(x)=\log(1+x)$ alalım. Yukarıdaki tanımda (i)-(iv) koşullarını sağladığından bir sınırsız modulus fonksiyonudur. $(x_k)=(1/k)$ olsun. $f(x_1)=\log(2)$; $f(x_2)=\log(1+1/2)$, $f(x_3)=\log(1+1/3),\ldots$ $f(x_n)=\log(1+1/n),\ldots$ elde edilir. Her $n\geq 1$ için,

$$t_{p,n}(x) = (p+1)^{-1}\sum_{k=n}^{n+p} f(|x_k|) = \frac{\log((n+p+1)/n)}{p+1} \to 0 \quad (p\to\infty)$$

olduğundan $x=(x_k)\varepsilon[F_o(f)]$ dir.

TEOREM B

f sınırlı modulus fonksiyonu olsun. $x=(x_k)\varepsilon[F_o(f)]$ oldukça $\sum_k a_k x_k$ nın yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $a=(a_k)\varepsilon\Phi$ olmasıdır.

İspat : Yeterlik için f sınırlı olsun. Her $x\geq 0$ için $f(x) < K$ olacak şekilde K vardır. $a=(a_k)\varepsilon\Phi$ olduğunda her $x\varepsilon[F_o(f)]$ için $\sum_k a_k x_k$ sonlu toplama dönüştüğünden sonuç açıktır.

Şimdi kabul edelimki $a\not\varepsilon\Phi$ olsun. Bu durumda $|a_{b_{p(k)}}|>0$ olacak şekilde pozitif tamsayıların $b_{p(1)}<b_{p(2)}<\ldots$ bir alt dizisi vardır. Şimdi p peryotlu bir $x=(x_k)$ dizisi tanımlayalım. k=ip için $x_k=1/a_{b_{p(i)}}$ $(i\geq 1)$ ve k=ip için $x_k\neq 0$ olsun. Yani

$(0,0,\ldots, 1/a_{b_{p(1)}},0,\ldots.0, 1/a_{b_{p(2)}},0,\ldots.)$p. yerde $1/a_{b_{p(1)}}$, 2p. yerde $1/a_{b_{p(2)}}\ldots$ ile tanımlansın. O zaman her $n\geq 1$ için;

$$(p+1)^{-1}\sum_{k=n}^{n+p} f(|x_k|)\leq (p+1)^{-1}K$$

elde edilir. Böylece $p\to\infty$ için $x\varepsilon[F_o(f)]$ olduğu kolayca görülür. Fakat $\sum_k a_k x_k$ ıraksaktır. Böylece bir çelişki elde ederiz. Dolayısı ile $a=(a_k)\varepsilon\Phi$ olmalıdır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR

[1] Duran, J.P., Infinite matrices and almost convergence, Math. Zeit 128 (1972), 75-83.

[2] King, J.P., Almost summable sequences, Proc.Amer.Math. Soc., 17 (1966), 1219-1225.

[3] Lorentz, G.G., A contribution to the theory of divergent sequences, Acta.Math., 80 (1948), 167-190.

[4] Maddox, I.J., A new type of convergence, Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 83 (1978), 61-64.

[5] ______, On strong almost convergence, Math.Proc.Camb.Philos. Soc., 85(1979), 345-350.

[6] ______, Sequence spaces defined by a modulus, Math.Proc.Camb. Philos. Soc., 100(1986), 161-166.

[7] ______, Inclusions between FK spaces and Kuttner's theorem, Math.Proc.Camb.Philos.Soc., 101 (1987) 523-527.

[8] Nakano, H., Concave modulars, J.Math.Soc.Japan, 5(1953), 29-49.

[9] Nanda, S., Strongly almost summable and strongly almost convergent sequences, Acta Math.Hung., 49(1987), 71-76.

[10] Ruckle, W.H., FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded, Can.J.Math., 25 (1973), 973-978.