Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi
2, 313-333, (1986)

REOLOJİK HAL DENKLEMLERİNİN TESİSİ ÜZERİNE DÜŞÜNCELER(*)
BÖLÜM 2

Yılmaz ÖZTÜRK, İhsan Turgut GÜRGÖZE
İ.T.Ü. Makina Fakültesi, İSTANBUL

ÖZET

Birinci bölümde, sürekli ortamların reolojik hal denklemlerinin konvektıd koordinat sisteminde elde edilmesi incelenmişti. Bu bölümde, sürekli ortamların invarjant hal denklemlerinin formüle edilmesi ve aynı eksenli, farklı açısal hızlarla dönen iki silindir arasındaki akışkanın iki boyutlu hareketi için invaryant hal denklemlerinin elde edilmesi yer almaktadır.

ON THE FORMULATION OF RHEOLOGICAL EQUATION OF STATE
PART II

SUMMARY

In Part I, the rheological equations of state for continuum media in the convected co-ordinate systems have been discussed. In this Part II, we will formulate the invariant equations of state of the continuum media. We will also obtain the invariant equations for the two dimentional steady flow between two coaxial cylinders rotating with different angular velocities.

(*) Bu çalışma Profesör J.G.Oldroyd'un "On the formulation of Rheological Equations of State" adlı makalesinde ileri sürdüğü fikirlerden esinlenerek hazırlanmıştır.

1- İNVARYANT HAL DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLİŞİNDE KULLANILAN METODUN TASVİRİ

Şimdi idealize edilmiş yeni bir tip sürekli malzeme için deformasyon ve akış teorisini geliştirmek üzere kapsamlı bir yol prensip olarak tesis edilebilir. Malzemeler için deneysel veya yapısal teoriye dayanan hal denklemleri, tam invaryant özelliğe sahip birinci bölüm §2 kuralı gereğince kolayca tanınabilen bir şekilde yazılmalıdır. Bu maksatla kullanılan mukayese sisteminin bir konvektıd koordinat sistemi olması arzu edilir. Sınır değer problemlerinin çözümü, hal denklemlerinin gerilme tansör alanının sabit bileşenleri cinsinden yeniden düzenlenmesi ve birinci bölüm §3 deki prensiplere uyacak şekilde yer değiştirme fonksiyonlarının bağımlı fonksiyon olarak seçilmesi; akım teorisinin ikinci safhasının geliştirilmesi için yapılacak işlerdir.

Şimdi bazı özel hallerde ortaya çıkabilecek güçlükleri göstermek üzere hal denklemlerinin tesisi ile ilgili bazı örnekler verelim: Basitleştirme maksadiyle akışkan, sıkıştırılamaz yani hacimce değişmeye çok büyük bulk elastisite modülü ile karşı koyan bir malzeme olarak kabul edilmektedir. Matematik olarak böyle bir malzemede herhangi bir noktadaki gerilmeyi iki bağımsız gerilme sisteminin süperpozisyonu şeklinde görmek uygun düşer. Bu tansörlerden ilki sabit hacimdeki bozulmayı temsil eden p'_{ik} tansörü, diğeri ise $p''_{ik} = -p'' g_{ik}$ izotropik tansörüdür. Burada p" genleşme ile ilgili mutlak bir skaleri göstermektedir.

Daha ileri seviyedeki bir kabulle, p" nün değişmesine rağmen ölçülebilen bir genleşme ortaya çıkmaz, yani herhangi bir izotropik basınç, malzemenin kinematiğinden etkilenmeden herhangi gerilme sistemi üzerine süperpoze edilir. Bundan dolayı

(Bütün p" ler için) $$e_i^{(1)i} = 0 \qquad (1)$$

ile birlikte hal denklemleri; p" için verilen denklemin ve p' ile

$e_{ik}^{(1)}$ yı birbirine bağlayan altı denklemin oluşturduğu bir takımın limit formu olarak,

$p_{ik} = p'_{ik} - p'' g_{ik}$ şeklinde elde edilir.(**) (2)

Newtonian akışkanı için birinci bölümde verilen (3) hal denklemleri $p'_{ik} = 2\mu e_{ik}^{(1)}$ şeklinde altı adet denklem olarak yazılabilir. Özellikle basit olan bu halde p'_{ik} deviotorik tansörü gösterir ($p'^{i}_{i} = 0$). Fakat genel halde p'k tansörünün deviatorik olabilmesi için p'_{ik}, $e_{ik}^{(1)}$ bağıntısı üzerinde yapılacak kısıtlama sonucu bulunacak olan bağıntının birinci bölümdeki (7) ifadeleri ile ilgili bir invaryant bağıntı olması gerekir.

Pratikte ortaya çıkan integro diferansiyel denklemlerin cinsini belirtmek üzere basit düzenleme işlemleri ve diferansiyel almalarla bir diferansiyel denklem takımına kolayca dönüşemiyen, hipotetik bir denklem takımı düşünülebilir. Bu düşünce ile ilgili olarak hal denklemleri deneysel olarak konvektıd koordinat sisteminde

$$\pi_{j\ell} = \pi'_{j\ell} - \pi'' \gamma_{j\ell}\ , \quad D\Delta/Dt = 0 \tag{3}$$

$$\pi'_{j\ell}(\xi,t) + \lambda \frac{D\pi'_{\ell j}(\xi,t)}{Dt} - \int_{-\infty}^{t} \psi(t-t')\pi'_{j\ell}(\xi,t')dt' = \mu\left\{\frac{D\gamma_{j\ell}(\xi,t)}{Dt} - \int_{-\infty}^{t} \psi(t-t') \frac{D\gamma_{j\ell}(\xi,t')}{Dt'} dt'\right\} \tag{4}$$

şeklinde invariant formunda verilebilen bir sıkıştırılamaz malzeme gözönüne alınabilir.(*)

(*) Bu formu teorik olarak da düşünmek mümkündür. Böyle bir malzeme sembolik olarak relolojik bir modelle temsil edilen makaslama hareketinde sırasıyla elastik ve viskoz element özelliklerine sahiptir. Örneğin, 1876 da Bollzmann[1] tarafından matematik olarak formüle edilen Burgers[2] in 1935 tarihli makalesine bakılabilir. Bu makalede elastik elementin etki sonunda da elastik özelliğe sahip olduğu varsayılmaktadır. Gerçekte malzeme karışık elastik özelliklere sahip bir visko-elastik akışkanıdır.

(**) Sıkıştırılamıyan bir akışkan; sadece t_o referans anında değil t_o dan sonraki anlarda da sıkıştırılamazlığını koruyan bir maddedir. Bu nedenle hal denklemleri e_{ik} şekil değiştirme tansörünü açıkça içermiyecek şekilde ifade edilebilir.

Bu denklemlerde μ ve λ sırasiyle viskozite ve zaman boyutunda mutlak skaler sabitlerdir. $\phi(\omega)$ Fonksiyonu malzemeye ait mutlak bir skalerdir, yani $\phi(\omega)$ da bulunan katsayıların tümü malzemenin mutlak fiziksel sabitlerinin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyona daha önceki herhangi bir $t-\omega$ anındaki reolojik durumun t anındaki reolojik özelikler üzerindeki etkisinin bir ölçümü olarak bakılabilir. Özellikleri (3) - (4) denklemleriyle belirtilen malzeme aşikar olarak özotropiktir. ϕ özdeş olarak sıfır olmadığı zaman (4) denklemi yeniden basit düzenleme ve diferansiyel olma işlemleriyle bir diferansiyel denkleme indirgenemez.

Hal denklemleri sabit mukayese sistemine dönüştürüldüğünde (1),(2) ile birlikte

$$p'_{ik}(x,t)+\lambda \frac{\delta p'_{ik}(x,t)}{\delta t} - \int_{-\infty}^{t} \phi(t-t')\, p'_{mr}(x',t') \frac{\partial x'^m \partial x'^r}{\partial x^i\, \partial x^k}\, dt'$$

$$= 2\mu\{e^{(1)}_{ik}(x,t) - \int_{-\infty}^{t} \phi(t-t')\, e^{(1)}_{mr}(x',t') \frac{\partial x'^m \partial x'^r}{\partial x^i \partial x^k}\, dt' \qquad (5)$$

denklemleri elde edilir. Burada

$$e^{(1)}_{ik}(x',t') = \frac{1}{2}[v_{k,i}(x',t') + v_{i,k}(x',t')]$$

ifadesinin sadece integrantların birinde bulunduğuna dikkat etmek gerekir.

Bu sebepten denklemler,önceki (x'^i) konumu civarındaki hız vektörünü, açık bir şekilde $x'^i(x,t,t')$ yerdeğiştirme fonksiyonunu ve kovaryant türev işlemi süresince x'^i civarında metrik tansörü ihtiva ederler. Ortogonal karteziyen koordinatların kullanılabilmesi hallerinde bazı basitleştirmelere gidilebilir; örneğin bu durumda kovaryant türev adi kısmi türevlere dönüşür. Hal denklemleriyle beraber, homogen sıkıştırılamıyan malzemelerde ρ= sabit, şeklinde verilen süreklilik denklemi ve üç hareket denklemi bulunur. Şüphesiz bu denklemlere her konumda ve her anda sağlanan özdeşlikler gözüyle bakılabilir. Böylece beklendiği gibi gerilme tansörünün bileşenleri ve $x'^i(x,t,t')$ fonksiyonları için, kolay sınır şartları altında bile çözümü basit olmıyan integro-diferansiyel denklemlere ulaşılmış olur. Yapısal modelle başlayıp sınır değer probleminin çözümüyle sona eren diferansiyel hal denklemlerinin oluşumunun tüm safhalarını gösterebilmek için, üzerinde kolayca işlem yapılabilin bir malzemeyi inceliyelim. 1945 da Fröhlich ve Sack [3] tarafından verilen hal denklemlerini bizim sembollerde

$$(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t})\, p'_{ik} = 2\mu(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}) e^{(1)}_{ik} \tag{6}$$

şeklinde yazıp, bununla birlikte (1) ve (2) gözönünde tutarak, sıkıştırılamıyan elastiko viskoz akışkanı inceleyelim.

Bu denklemler, Newtonian akışkanının içerisinde dağıldığı farzedilen Hookean elastik parçacıklarının kolloidal süspansüyonunun yapısal modeline dayanır. (6) Denkleminde bulunan üç sabitten birincisi μ= viskosite, ve diğerleri zaman boyutun da olan λ ve τ skalerleridir. Malzeme esasta akışkan ve fiziksel modelde $\lambda > \tau$ ise; λ nin τ ya eşit olması halinde malzemenin μ viskoziteli Newtonian bir akışkan olması gerekir. Orijinal makalenin incelenmesi halinde (6) denkleminin malzemenin stasyoner haldeki makroskopik elementi düşünülerek çıkarıldığı görülür. Burada ayrıca gerilme ve deformasyonların küçük olduğu kabulu yapılmaktadır. Keza kullanılan koordinatlar ortogonal koordinatlardır. (6) Denklemi bu haliyle genel kullanıma uygun değildir. Bundan sonra yapılacak ilk iş; (6) denklemini deformasyonun küçük olmasına gerek kalmıyacak biçimde genelleştirmektir. Orijinal türetmenin özel şartları altında (6) denklemine indirgenebilen invaryant denklemleri arıyoruz. Bu arada bu indirgemenin yapılıp yapılmayacağına belirsizliğe yer bırakmadan karar vermeliyiz.

Bir tek denklem takımında, deneyin veya yapısal teorinin verilerini tanımlama problemi, pratikte sık sık rastlanan bir meseledir.

(6) Denkleminin yapılabilecek aşikar bir genelleştirilmesi

$$(1 + \lambda \frac{\delta}{\delta t}) p'_{ik} = 2\mu(1 + \tau \frac{\delta}{\delta t}) e^{(1)}_{ik} \tag{7}$$

şeklinde verilebilir. Sembol olarak p'_{ik} ve $e^{(1)}_{ik}$ kovaryant mutlak tansörleri ve λ, μ, τ mutlak skalerleri gösterdiğine göre bu denklemin invaryant formda olduğu derhal görülür.(*)

(*) Denklemler konvektıd koordinat sistemine göre verildiğinde, denklemlerin bunun gibi basit halde yazılmasına gerek yoktur.

Konvektıd türev tamamen açık şekliyle yazıldığında (7) denklemi

$$p'_{ik}+\lambda(\partial p'_{ik}/\partial t+v^m p'_{ik,m}+v^m{}_{,i}p'_{mk}+v^m{}_{,k}p'_{im})=$$
$$2\mu e^{(1)}_{ik}+2\mu\tau(\partial e^{(1)}_{ik}/\partial t+v^m e^{(1)}_{ik,m}+v^m{}_{,i}e^{(1)}_{mk}+v^m{}_{,k}e^{(1)}_{im}) \qquad (8)$$

şeklini alır. Bu denklem (6) da bulunmayan çarpım terimlerini ihtiva eder. Fakat bu çarpım terimleri stasyoner haldeki malzemelerde, küçük şekil değiştirme hızları altında, (6)nın ilk elde edilişindeki şartlarla uyum halinde olarak ihmal edilebilirler. Fakat (6) denkleminin tek genelleştirilmiş şeklinin (7) denklemi olmadığını görmek zor değildir. Ortogonal karteziyen koordinatların kullanılması halinde; p'_{ik} kovaryant tansör bileşenleri, p'^{ik} kontravaryant ve p'^{i}_{k} karışık bileşenleri veya bunlardan herhangi birinin metrik tansörün determinantı ile çarpımından elde edilen izafi tansör şekli, (örneğin $p'_{ik}\equiv g^{1/2}p'_{ik}$ kovaryant yoğunluk tansöründe olduğu gibi), arasında bir fark yoktur. Benzer şekilde ortak tansörler kovaryant deformasyon hızları tansörünün yerine kullanılabilir. Böylece orijinal olarak verilen (6) hal denklemi, örneğin

$$g_{km}(1+\lambda\frac{\partial}{\partial t})p'^{m}_{i}=2\mu(1+\tau\frac{\partial}{\partial t})e^{(1)}_{ik} \quad \text{veya} \qquad (9)$$

$$g^{-1/2}(1+\lambda\frac{\partial}{\partial t})p'_{ik}=2\mu(1+\tau\frac{\partial}{\partial t})e^{(1)}_{ik} \qquad (10)$$

şeklinde yazılabilir. Bunlar, örneğin

$$g_{km}(1+\lambda\frac{\delta}{\delta t})p'^{m}_{i}=2\mu(1+\tau\frac{\delta}{\delta t})e^{(1)}_{ik}, \qquad (11)$$

$$g^{-1/2}(1+\lambda\frac{\delta}{\delta t})p'_{ik}=2\mu(1+\tau\frac{\delta}{\delta t})e^{(1)}_{ik} \qquad (12)$$

şekillerinde genelleştirilebilir. Birinci bölümdeki, (37) Den (39)a kadar verilen kuralların tamamen açık şekilde yazılması halinde; (6)nın ilk elde ediliş şartları altında ihmal edilebilen denklemin sol tarafında bulunan $-2\lambda e^{(1)}_{km}\,p'^{m}_{i}$ veya $\lambda e^{(1)m}p'_{ik}$ terimleri yahut sağ taraftaki $-2\mu\tau e^{(1)}_{km}e^{(1)m}_{i}$ gibi terimler hariç, (11)-(12) ve diğer denklemlerin (8) denklemi ile aynı olduğu ortaya çıkar. Böylece tümü kısıtlı bir hareket tipinde geçerli olan nonivaryant denklem takımına dayanan, sonsuz sayıda olabilen bir invaryant hal denklem takımına varılır.(*) Yalnız yapısal modelin veya deneysel çalışmaların özel malzemeler için daha detaylı incelenmesi istendiğinde, bu denklem takımları, mümkün olan alternatifler arasında değişir. Muhtemelen komplike hareket modellerini veya çok hassas ölçümleri gerektiren böyle bir deneysel çalışma, hal denklemlerinin belirsizliğe meydan vermeyecek şekilde tesisine kadar devam etmelidir. Böylece özel bir problemin çözümünü vererek hal denklemlerindeki önemsiz bir değişikliğin invaryant denklemlerin ilk elde deilişinde gözönüne almadığımız şartlar altında hareket eden kül halindeki malzemede çok değişik özelliklere sebep olacağını belirtip konuyu bitireceğiz. (1),(2) ve (7) Denklemlerinin oluşturduğu (A) tipi ile (1),(2) ve

$$(1+\lambda \frac{\delta}{\delta t})p'^{ik} = 2\mu(1+\tau \frac{\delta}{\delta t})e^{(1)ik} \qquad (13)$$

denkleminin oluşturduğu (B) tipi ile verilen sıkıştırılamıyan elastik akışkanlara ait iki hipotetik denklemi mukayese edeceğiz.

İlk bakışta bu sınıflamalar (6) denklemin önemsiz farklı bir genelleştirilmesi olarak görülebilir.

$p'_{ik} = 2\mu e^{(1)}_{ik}$ veya buna denk olan $p'^{ik} = 2\mu e^{(1)ik}$ bağıntılarıyla verilen Newtonian akışkanına, λ ve τ nun limitte birbirine eşit olmaları durumunda (A) veya (B) hallerinden birinin limiti gözüyle bakılabilir. Bununla beraber $\lambda>\tau$ olduğunda (A) ve (B) malzemeleri kül halinde farklı özellikler gösterebilirler.

(*) Bu denklemlerden herhangi birini konvektıd tansör bileşenleri cinsinden ifade etmekde zorluk yoktur. İlk bakışta bu denklemlerin üniversal geçerliliği olan hal denklemleri için tam invaryans özelliğe sahip olduğu görülebilir.

2. AYNI EKSENLİ, DÖNEN İKİ SİLİNDİR ARASINDAKİ AKIŞKANIN DAİMİ VE DÜZLEMSEL HAREKETİNİN İNVARYANT HAL DENKLEMLERİ

Bu durumda z ekseni silindirlerin ekseni boyunca seçilmiş olarak, $x^i = x, y, z$ karteziyen koordinatlarını kullanmak uygun düşer. Ancak nihai sonuçları tansörlerin fiziksel bileşenleri cinsinden polar koordinatlarda $r, \emptyset, z$ ($r\cos\emptyset = x$, $r\sin\emptyset = y$) şeklinde yazmak gerekir. Yani karteziyen bileşenleri, bulunulan herhangi bir noktada yerel olarak seçilmiş polar koordinatlarla üst üste gelecek şekilde seçmek icabeder. Elastisite teorisinde polar koordinatlarda, gerilme tansörünün fiziksel bileşenleri olarak kullanılan $\widehat{rr}, \widehat{\emptyset\emptyset}, \widehat{zr}$, vesaire sembollerini burada da gerilme tansörü bileşenleri olarak aynen muhafaza etmek yararlı olur. Hız vektörünün karteziyen bileşenleri simetriden dolayı

$$v_i = v^i = [-y\omega(r)\ ,\ x\omega(r),\ 0] \qquad \text{veya}$$

$$v_1 = -x_2\ \omega(r)\ ,\ v_2 = x_1\ \omega(r)\ ,\ v_3 = 0$$ şeklinde verilir.

$e^{(1)}_{ik} = e^{(1)ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)$ Formülüne göre deformasyon hızının bazı bileşenleri aşağıda gösterildiği gibi hesaplanabilir:

$$e^{(1)}_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \quad \text{den} \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -x_2 \frac{\partial \omega(r)}{\partial x_1}\ ,\ \frac{\partial \omega(r)}{\partial x_1} = \frac{d\omega(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_1}$$ yazılır.

$x_1 = r\cos\emptyset$, $x_2 = r\sin\emptyset$, $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ bağıntılarından

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r}\ ,\ \frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r}\ ,\ \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{d\omega}{dr}\frac{x_1}{r}$$ bulunur. Buradan

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{-x_1 x_2}{r}\frac{d\omega}{dr}\ ,\ e^{(1)}_{11} = -\frac{xy}{r}\frac{d\omega}{dr}$$ elde edilir.

$$e^{(1)}_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) \quad \text{den} \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\omega - \frac{x_2^2}{r}\frac{d\omega}{dr}\ ,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \omega + \frac{x_1^2}{r}\frac{d\omega}{dr}$$ hesaplanır. Buradan

$$e_{12}^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{x_1^2-x_2^2}{r}\frac{d\omega}{dr} \quad \text{veya} \quad e_{12}^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{x^2-y^2}{r}\frac{d\omega}{dr}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer bileşenler hesaplanabilir. Böylece deformasyon hızları tansörü

$$e_{ik}^{(1)} = e^{(1)ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-xy}{r}\frac{d\omega}{dr} & \frac{x^2-y^2}{2r}\frac{d\omega}{dr} & 0 \\ \frac{x^2-y^2}{2r}\frac{d\omega}{dr} & \frac{xy}{r}\frac{d\omega}{dr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. $p'^{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi^m}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^n}\tau^{mn}$ Dönüşüm bağıntısına göre gerilme tansörünün bazı bileşenleri aşağıda gösterildiği gibi hesaplanabilir:

$\xi_1 \to r$, $\xi_2 \to \emptyset$, $\xi_3 \to z$ olduğuna göre

$$p'^{11} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi^1}\frac{\partial x^1}{\partial \xi^1}\tau^{11} + \frac{\partial x_1}{\partial \xi^2}\frac{\partial x_1}{\partial \xi^2}\tau^{22} + 2\frac{\partial x_1}{\partial \xi^1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi^2}\tau^{12} \quad \text{den}$$

$$p'^{11} = \cos^2\emptyset\tau^{11} - r^2\tau^{22}\sin^2\emptyset - 2r\tau^{12}\cos\emptyset\sin\emptyset$$

$$\tau^{11}g_1g_1 = \widehat{rr}'\vec{i}_1\vec{i}_1, \quad \vec{i}_1 = \frac{g_1}{\sqrt{g_1g_1}} ,$$

elde edilir.

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{den} \quad \tau^{11} = \widehat{rr}' ;$$

$$\tau^{22}g_2g_2 = \widehat{\emptyset\emptyset}'\vec{i}_2\vec{i}_2 \quad \text{den} \quad \tau^{22} = \frac{\widehat{\emptyset\emptyset}'}{r^2} \quad \text{ve}$$

$$\tau^{12} = \frac{1}{r}\widehat{r\emptyset}' \quad \text{bulunur. Buradan}$$

$$p'^{11} = \frac{x^2}{r^2}\widehat{rr}' - \frac{y_2}{r^2}\widehat{\emptyset\emptyset}' - \frac{2xy}{r^2}\widehat{r\emptyset}' \quad \text{elde edilir.}$$

$$p'^{22} = \frac{\partial x_2}{\partial \xi^1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi^1}\tau^{11} + \frac{\partial x_2}{\partial \xi^2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi^2}\tau^{22} + 2\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\tau^{12}$$

$$\text{den} \quad p'^{22} = \frac{y^2}{r^2}\widehat{rr}' + \frac{x^2}{r^2}\widehat{\emptyset\emptyset}' + \frac{2xy}{r^2}\widehat{r\emptyset}' \quad \text{bulunur.}$$

Benzer şekilde diğer bileşenler hesaplanabilir. Böylece gerilme tansörünün karteziyen bileşenleri

$$p'_{ik} = p'^{ik} = \begin{pmatrix} \frac{x^2\widehat{rr}' + y^2\widehat{\emptyset\emptyset}' 2xy\widehat{r\emptyset}'}{r^2} & \frac{xy(\widehat{rr}' - \widehat{\emptyset\emptyset}') + (x^2-y^2)\widehat{r\emptyset}'}{r^2} & 0 \\ \frac{xy(\widehat{rr}' - \widehat{\emptyset\emptyset}') + (x^2-y^2)\widehat{r\emptyset}'}{r^2} & \frac{y^2\widehat{rr}' + x^2\widehat{\emptyset\emptyset}' 2xy\widehat{r\emptyset}'}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{zz}' \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $\widehat{\emptyset\emptyset}', \widehat{rr}', \widehat{zz}'$ nün sadece r nin fonksiyonları olduğu kabul edilmektedir.

Bulunulan noktada, polar koordinatlar yönünde seçilmiş olan karteziyen eksenlere göre gerilmenin polar koordinatlardaki fiziksel bileşenleri

$$p'_{ik} = p'^{ik} = \begin{pmatrix} \widehat{rr}' & \widehat{r\emptyset}' & 0 \\ \widehat{r\emptyset}' & \widehat{\emptyset\emptyset}' & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{zz}' \end{pmatrix} \qquad (14)$$

şeklinde verilir. Ayrıca deformasyon hızları tansörünün polar koordinatlardaki fiziksel bileşenleri aşağıda gösterildiği gibi hesaplanabilir:

Hız alanı, $v_1 = v_r = 0$, $v_2 = v_\emptyset = \underline{r}\omega(r)$, $v_3 = v_z = 0$ olduğuna göre

$$e^{(1)}_{ik} = e^{(1)ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right) \text{ formülünden}$$

$$e^{(1)}_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0 , \quad e^{(1)}_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{2}\underline{r}\frac{d\omega}{dr} ,$$

$$e^{(1)}_{13} = 0, \quad e^{(1)}_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_\emptyset}{\partial \emptyset} = 0 , \quad e^{(1)}_{23} = 0, \quad e^{(1)}_{33} = 0 \text{ elde edilir.}$$

Burada $\underline{r}$ bulunulan noktanın sabit r koordinatını göstermektedir. Böylece, polar koordinatlarda deformasyon hızları tansörü

$$e^{(1)}_{ik} = e^{(1)ik} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r}{2}\frac{d\omega}{dr} & 0 \\ \frac{r}{2}\frac{d\omega}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ şeklinde elde edilir.

$$\frac{\delta p'_{ik}}{\delta t}, \quad \frac{\delta p'^{ik}}{\delta t}, \quad \frac{\delta e^{(1)}_{ik}}{\delta t} \quad \text{ve} \quad \frac{\delta e^{(1)ik}}{\delta t}$$

ifadelerinin polar koordinatlardaki fiziksel bileşenleri, karteziyen eksenler döndüğüne göre aşağıda gösterildiği gibi hesaplanabilir:

$$\frac{\delta b_{ik}}{\delta t} = \frac{\partial b_{ik}}{\partial t} + v^m b_{ik,m} + v^m{}_{,i} b_{mk} + v^m{}_{,k} b_{im}$$ Formülünden

$$\frac{\delta e^{(1)}_{ik}}{\delta t} = v^m e^{(1)}_{ik,m} + v^m{}_{,i} e^{(1)}_{mk} + v^m{}_{,k} e^{(1)}_{im}$$ ve

$$\frac{\delta p'_{ik}}{\delta t} = v^m p'_{ik,m} + v^m{}_{,i} p'_{mk} + v^m{}_{,k} b_{im}$$ yazılır. Buradan

$$\frac{\delta e^{(1)}_{11}}{\delta t} = v^1{}_{,1} e^{(1)}_{11} + v^2{}_{,1} e^{(1)}_{21} + v^1{}_{,1} e^{(1)}_{11} + v^2{}_{,1} e^{(1)}_{12}$$

$$\frac{\delta e^{(1)}_{11}}{\delta t} = r\frac{d\omega}{dr} \cdot \frac{r}{2}\frac{d\omega}{dr} + r\frac{d\omega}{dr} \cdot \frac{1}{2}\frac{d\omega}{dr} = r^2\left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2$$

$$\frac{\delta e^{(1)}_{12}}{\delta t} = v^1 e^{(1)}_{12,1} + v^2{}_{,1} e^{(1)}_{22} = 0$$

$$\frac{\delta e^{(1)}_{13}}{\delta t} = v^m e^{(1)}_{13,m} + v^m{}_{,1} e^{(1)}_{m3} + v^m{}_{,3} e^{(1)}_{1m} = 0$$

$$\frac{\delta e^{(1)}_{22}}{\delta t} = v^m e^{(1)}_{22,m} + v^m{}_{,2} e^{(1)}_{m2} + v^m{}_{,2} e^{(1)}_{2m} = 0$$

$$\frac{\delta e^{(1)}_{23}}{\delta t} = v^m e^{(1)}_{23,m} + v^m{}_{,2} e^{(1)}_{m3} + v^m{}_{,3} e^{(1)}_{2m} = 0$$ bulunur.

$$\frac{\delta p'_{11}}{\delta t} = v^1 p'_{11,1} + v^2{}_{,1} p'_{21} + v^2{}_{,1} p'_{12} = r \frac{d\omega}{dr} \widehat{r\emptyset}' + r \frac{d\omega}{dr} \widehat{r\emptyset}'$$

$$\frac{\delta p'_{11}}{\delta t} = 2r \frac{d\omega}{dr} \widehat{r\emptyset}'$$

$$\frac{\delta p'_{12}}{\delta t} = v^1 p'_{12,1} + v^2{}_{,1} p'_{22} + v^2{}_{,2} p'_{12} = r \frac{d\omega}{dr} \widehat{\emptyset\emptyset}'$$

$$\frac{\delta p'_{13}}{\delta t} = v^m p'_{13,m} + v^m{}_{,1} p'_{m3} + v^m{}_{,3} p'_{1m} = 0$$

$$\frac{\delta p'_{22}}{\delta t} = v^m p'_{22,m} + v^m{}_{,2} p'_{m2} + v^m{}_{,2} p'_{2m} = 0$$

$$\frac{\delta p'_{23}}{\delta t} = v^1 p'_{23,1} = 0$$

Bulunur. Böylece $\frac{\delta e^{(1)}_{ik}}{\delta t}$, $\frac{\delta p'_{ik}}{\delta t}$, nin polar koordinatlardaki fiziksel bileşenleri

$$\frac{\delta e^{(1)}_{ik}}{\delta t} = \begin{pmatrix} r^2 \left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\frac{\delta p'_{ik}}{\delta t} = \begin{pmatrix} 2r \frac{d\omega}{dr} \widehat{r\emptyset}' & r \frac{d\omega}{dr} \widehat{\emptyset\emptyset}' & 0 \\ r \frac{d\omega}{dr} \widehat{\emptyset\emptyset}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

şeklinde elde edilir.

$$\frac{\delta b^{ik}}{\delta t} = \frac{\partial b^{ik}}{\partial t} + v^m b^{ik}{}_{,m} - v^i{}_{,m} b^{mk} - v^k{}_{,m} b^{im}$$ Formülüne göre

$$\frac{\delta e^{(1)ik}}{\delta t} = v^m e^{(1)ik}_{,m} - v^i_{,m} e^{(1)mk} - v^k_{,m} e^{(1)im}$$ ve

$$\frac{\delta p'^{ik}}{\delta t} = v^m p'^{ik}_{,m} - v^i_{,m} p'^{mk} - v^k_{,m} p'^{im}$$ yazılır. Buradan

$$\frac{\delta e^{(1)11}}{\delta t} = v^m e^{(1)11}_{,m} - v^1_{,m} e^{(1)11} - v^1_{,m} e^{(1)im} = 0$$

$$\frac{\delta e^{(1)12}}{\delta t} = v^m e^{(1)12}_{,m} - v^1_{,m} e^{(1)m2} - v^2_{,m} e^{(1)1m} = 0$$

$$\frac{\delta e^{(1)13}}{\delta t} = v^m e^{(1)13}_{,m} - v^1_{,m} e^{(1)m3} - v^3_{,m} e^{(1)1m} = 0$$

$$\frac{\delta e^{(1)22}}{\delta t} = v^2_{,1} e^{(1)12} - v^2_{,1} e^{(1)21} = -r^2\left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2$$

$$\frac{\delta e^{(1)23}}{\delta t} = v^m e^{(1)23}_{,m} - v^2_{,m} e^{(1)m3} - v^3_{,m} e^{(1)2m} = 0$$ elde edilir.

$$\frac{\delta p'^{11}}{\delta t} = v^m p'^{11}_{,m} - v^1_{,m} p'^{m1} - v^1_{,m} p'^{1m} = 0$$

$$\frac{\delta p'^{12}}{\delta t} = v^1 p'^{12}_{,1} - v^1_{,1} p'^{11} = -r\,\frac{d\omega}{dr}\,\widehat{rr}'$$

$$\frac{\delta p'^{13}}{\delta t} = v^m p'^{13}_{,m} - v^1_{,m} p'^{m3} - v^3_{,m} p'^{1m} = 0$$

$$\frac{\delta p'^{22}}{\delta t} = v^1 p'^{22}_{,1} - v^2_{,1} p'^{12} - v^2_{,1} p'^{21} = -2r\,\frac{d\omega}{dr}\,\widehat{r\emptyset}'$$

$$\frac{\delta p'^{23}}{\delta t} = v^m p'^{23}_{,m} - v^2_{,m} p'^{m3} - v^3_{,m} p'^{2m} = 0$$

bulunur. Böylece $\frac{\delta e^{(1)ik}}{\delta t}$, $\frac{\delta p'^{ik}}{\delta t}$ nin polar koordinatlardaki fiziksel bileşenleri

$$\frac{\delta e^{(1)ik}}{\delta t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2\left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\delta p'^{ik}}{\delta t} = \begin{pmatrix} 0 & -r\frac{d\omega}{dr}\widehat{rr}' & 0 \\ -r\frac{d\omega}{dr}\widehat{rr}' & -2r\frac{d\omega}{dr}\widehat{r\emptyset}' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

şeklinde elde edilir. (7) Denkleminden

$$P'_{11} + \lambda \frac{\delta p'_{11}}{\delta t} = 2\mu e^{(1)}_{11} + 2\mu\tau \frac{\delta e^{(1)}_{11}}{\delta t} \quad ,$$

$$\widehat{rr}' + 2\lambda r \frac{d\omega}{dr} \widehat{r\emptyset}' = 2\mu\tau r^2\left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 \quad ,$$

$$p'_{12} + \frac{\delta p'_{12}}{\delta t} = 2\mu e^{(1)}_{12} + 2\mu\tau \frac{\delta e^{(1)}_{12}}{\delta t} \quad ,$$

$$\widehat{r\emptyset}' + \lambda r \frac{d\omega}{dr} \widehat{\emptyset\emptyset}' = 2\ r \frac{d\omega}{dr} \quad ,$$

$$p'_{22} + \lambda \frac{\delta p'_{22}}{\delta t} = 2\mu e^{(1)}_{22} + 2\mu\tau \frac{\delta e^{(1)}_{22}}{\delta t} \quad , \quad \widehat{\emptyset\emptyset}' = 0 \quad ,$$

$$p'_{33} + \lambda \frac{\delta p'_{23}}{\delta t} = 2\mu e^{(1)}_{33} + 2\mu\tau \frac{\delta e^{(1)}_{33}}{\delta t} \quad ,$$

$\widehat{ZZ}' = 0$ değerleri hesaplanır. Böylece kovaryant bileşenlere göre verilmiş olan (A) tipine ait hal denklemleri

$$(A) \left\{ \begin{aligned} & \widehat{rr}' + 2\lambda r \frac{d\omega}{dr} \widehat{r\emptyset}' = 2\mu\tau r^2\left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 , \\ & \widehat{r\emptyset}' + \lambda r \frac{d\omega}{dr} \widehat{\emptyset\emptyset}' = \mu r \frac{d\omega}{dr} \quad , \\ & \widehat{\emptyset\emptyset}' = \widehat{ZZ}' = 0 \quad , \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

şeklinde elde edilir.(13 Denkleminden

$$p'^{11} + \lambda \frac{\delta p'^{11}}{\delta t} = 2\mu e^{(1)11} + 2\mu\tau \frac{\delta e^{(1)11}}{\delta t} , \quad \widehat{rr}' = 0 ,$$

$$p'^{12} + \lambda \frac{\delta p'^{12}}{\delta t} = 2\mu e^{(1)12} + 2\mu r \frac{\delta e^{(1)12}}{\delta t}$$

$$= \widehat{r\emptyset}' - \lambda r \frac{d\omega}{dr} \widehat{rr}' = 2\mu r \frac{d\omega}{dr} ,$$

$$p'^{22} + \lambda \frac{\delta p'^{22}}{\delta t} = 2\mu e^{(1)22} + 2\mu r \frac{\delta e^{(1)22}}{\delta t} = -2\mu\tau r^2 \left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 ,$$

$$p'^{13} + \lambda \frac{\delta p'^{33}}{\delta t} = 2\mu e^{(1)33} + 2\mu\tau \frac{\delta e^{(1)33}}{\delta t} = \widehat{ZZ}' = 0 ,$$

hesaplanır. Böylece kontravaryant bileşenlere göre verilmiş olan (B) tipine ait hal denklemleri

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} \widehat{\emptyset\emptyset}' - 2\lambda r \dfrac{d\omega}{dr} \widehat{r\emptyset}' = -2\mu\tau r^2 \left(\dfrac{d\omega}{dr}\right)^2 , \\[2ex] \widehat{r\emptyset}^1 - \lambda r \dfrac{d\omega}{dr} rr^1 = \mu r \dfrac{d\omega}{dr} , \\[2ex] \widehat{rr}' \; \widehat{ZZ}' = 0 \end{array} \right\} \qquad (18)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıda verilen hız alanı için (2) denklemi otomatik olarak sağlanır. Ayrıca süreklilik denklemi ρ yoğunluğunun sabit olmasını gerektirir. Hareket denkleminin açık ifadesi

$$\frac{\partial p^{ki}}{\partial x_k} + \left\{ {k \atop k\;r} \right\} p^{ri} + \left\{ {i \atop k\;r} \right\} p^{kr} + \rho F^i = \rho \dot{v}_i$$

şeklinde verilir. Buradan Polar koordinatlarda sıfır olmayan Christoffel Semboller

$$\left\{ {1 \atop 2\;2} \right\} = -r, \quad \left\{ {2 \atop 1\;2} \right\} = \left\{ {2 \atop 2\;1} \right\} = \frac{1}{r} \quad \text{olduğuna göre}$$

$$\frac{\partial p^{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} p^{11} - r\, p^{22} = \rho \dot{v}_1 \quad \text{yazılır.}$$

$$p^{11} = \widehat{rr}', \quad p^{12} = \frac{1}{r} \widehat{r\emptyset}', \quad p^{22} = \frac{\widehat{\emptyset\emptyset}'}{r^2} \quad \text{den}$$

hareket denklemlerinin ilki

$$\frac{\partial \widehat{rr}'}{\partial r} + \frac{\widehat{rr}' - \widehat{\emptyset\emptyset}'}{r} = -\rho r \omega^2 + \frac{\partial p^{11}}{\partial r}$$ şeklinde bulunur.

$$\frac{\partial p^{k2}}{\partial x_k} + \left\{ {r \atop k\ r} \right\} p^{r2} + \left\{ {2 \atop k\ r} \right\} p^{kr} = \rho \dot{v}_2$$ den

$$\frac{\partial p^{12}}{\partial x_1} + \frac{1}{r} p^{12} + \frac{1}{r} p^{12} + \frac{1}{r} p^{21} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\widehat{r\emptyset}'\right) + \frac{1}{r^2}\widehat{r\emptyset}' + \frac{1}{r^2}\widehat{r\emptyset}' + \frac{1}{r^2}\widehat{r\emptyset}' = 0$$ yazılır. Buradan

$$\frac{\partial \widehat{r\emptyset}'}{\partial r} + \frac{2\widehat{r\emptyset}'}{r} = 0$$ elde edilir.

$$\frac{\partial p^{k3}}{\partial x_k} + \left\{ {k \atop k\ r} \right\} p^{r3} + \left\{ {3 \atop k\ r} \right\} p^{kr} = \rho \dot{v}_3$$ den $$\frac{\partial p^{33}}{\partial Z} = \rho \bar{g}$$

yazılır. $p^{ik} = p'_{ik} - p'' g^{ik}$ Formülünden, $g^{33} = 1$

olduğuna göre $$\frac{\partial p^{33}}{\partial Z} = \frac{\partial p'^{33}}{\partial Z} - \frac{\partial p''}{\partial Z}$$ hesaplanır. Buradan

$p'^{33} = \widehat{ZZ}'$ olduğuna göre $$\frac{\partial \widehat{ZZ}'}{\partial Z} = \frac{\partial p''}{\partial Z} + \rho \bar{g}$$ elde edilir.

Burada $\bar{g}$ yerçekim ivmesini göstermektedir. Z ekseni yukarı doğru yönlenmiştir. ω nın her iki silindir üzerinde verilen değerelri aldığı, sınır şartları altında; hareket denklemleri ile (17) veya hareket denklemleri ile (18) den oluşan yedi adet denklem r'nin fonksiyonu olarak verilen altı adet

$\widehat{rr}'$, $\widehat{\emptyset\emptyset}'$, $\widehat{ZZ}'$, $\widehat{r\emptyset}'$, ω, p''

bilinmeyenlerine göre çözülebilir.

$\frac{\partial \widehat{r\emptyset}'}{\partial r} + \frac{2\widehat{r\emptyset}'}{r} = 0$ dan $\frac{d\widehat{r\emptyset}'}{\widehat{r\emptyset}'} = -2\,\frac{dr}{r}$ yazılır. Bu bağıntının integrali alındığında

$\widehat{r\emptyset}' = c_1 r^{-2}$ bulunur. $\widehat{r\emptyset}' + \lambda r \frac{d\omega}{dr}\,\widehat{\emptyset\emptyset}' = \mu r \frac{d\omega}{dr}$ den ,

$\widehat{\emptyset\emptyset}' = 0$ olduğuna göre $-\frac{d\omega}{dr} = \frac{\widehat{r\emptyset}'}{r\mu}$ elde edilir. İntegre ederek

$$\omega = \int \frac{c_1 r^{-2}}{\mu r}\,dr + c_2 \,,$$

$\omega = -\frac{c_1}{2\mu} r^{-2} + c_2$ hesaplanır. $c_2 = a$, $\frac{c_1}{2\mu} = b$ olması halinde

$\omega = a - br^{-2}$ elde edilir. $\widehat{rr}' + 2\lambda r \frac{d\omega}{dr}\,\widehat{r\emptyset}' = 2\mu\tau r^2 \left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2$ denkleminden

$$\widehat{rr}' + 2\lambda r \frac{d\omega}{dr}\,\mu r \frac{d\omega}{dr} = 2\mu\tau r^2 \left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2$$

$\widehat{rr}' = -2\mu(\lambda-\tau) r^2 \left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2$, $\frac{d\omega}{dr} = 2br^{-3}$ yazılır. Buradan

$$\widehat{rr}' = -8\mu(\lambda-\tau) r^{-4}$$

bulunur. $\widehat{ZZ}' = 0$ olduğuna göre $\frac{\partial \widehat{ZZ}'}{\partial Z} = \frac{\partial p''}{\partial Z} + \rho \bar{g}$ denleminden

$\frac{\partial p''}{\partial Z} + \rho \bar{g} = 0$ elde edilir. Buradan

$p'' = -\rho \bar{g} z + f(r)$, $\frac{\partial p''}{\partial r} = \frac{df}{dr}$ hesaplanır. $\widehat{\emptyset\emptyset}' = 0$ olduğundan

$\frac{d\widehat{rr}'}{dr} + \frac{\widehat{rr}' - \widehat{\emptyset\emptyset}'}{r} = \frac{\partial p''}{\partial r} - r\omega^2$ denkleminden

$\frac{df}{dr} = \frac{d\widehat{rr}'}{dr} + \frac{\widehat{rr}'}{r} + \rho r \omega^2$ yazılır. Buradan

$$f = \widehat{rr}' + \int \frac{\widehat{rr}'}{r}\,dr + \int \rho r \omega^2 dr + c \,,$$

$$f = -8\mu(\lambda-\tau) b^2 r^{-4} + \int \frac{-8\mu(\lambda-\tau) b^2 r^{-4}}{r}\,dr + \int \rho r (a - br^{-2})^2 dr + c$$

$$f = -6\mu\,(\lambda-\tau) b^2 r^{-4} + \rho\left(\frac{1}{2}\,a^2 r^2 - 2ab\log r - \frac{1}{2}\,b^2 r^{-2}\right) + C$$ bulunur.

$p'' = -\rho\bar{g}z + f$ denkleminden

$$p'' = -\rho\bar{g}z - 6\mu(\lambda-\tau) b^2 r^{-4} + \rho\left(\frac{1}{2}\,a^2 r^2 - 2ab\log r - \frac{1}{2} b^2 r^{-2}\right) + C$$

elde edilir. Böylece (A) tipi ile ilgili denklemler toplu halde

$$(\mathrm{A})\begin{cases} \widehat{rr}' = -8\mu(\lambda-\tau) b^2 r^{-4}\,, \quad \widehat{\emptyset\emptyset}' = 0\,, \quad \widehat{ZZ}' = 0 \\ \widehat{r\emptyset}' = 2\mu b r^{-2}\,, \quad \omega = a - b\,r^{-2}\,, \\ p'' = \rho\left(\frac{1}{2}\,a^2 r^2 - 2ab\log r - \frac{1}{2}\,b^2 r^{-2}\right) - 6\mu(\lambda-\tau) b^2 r^{-4} - \bar{g}\rho Z + Ç \end{cases} \qquad (19)$$

şeklinde verilir.

(B) Tipi ile ilgili çözümler aşağıda gösterildiği gibi verilebilir:

$$\frac{\partial \widehat{r\emptyset}'}{\partial r} + \frac{2\widehat{r\emptyset}'}{r} = 0$$ dan $\widehat{r\emptyset}' = 2\mu b r^{-2}$ bulunur. $\widehat{rr}' = 0$ olduğuna göre

$\widehat{r\emptyset}' - \lambda r \dfrac{d\omega}{dr}\,\widehat{rr}' = \mu r \dfrac{d\omega}{dr}$ denkleminden $\widehat{r\emptyset}' = \mu r \dfrac{d\omega}{dr}$ yazılır.

Buradan $\omega = a - br^{-2}$ bulunur. $\widehat{r\emptyset}' - \lambda r \dfrac{d\omega}{dr}\, rr' = \mu r \dfrac{d\omega}{dr}$

denkleminden $\widehat{r\emptyset}' = \mu r \dfrac{d\omega}{dr}$ bulunduğuna göre

$\widehat{\emptyset\emptyset}' - 2\lambda r \dfrac{d\omega}{dr}\,\widehat{r\emptyset}' = -2\mu\tau r^2 \left(\dfrac{d\omega}{dr}\right)^2$ denkleminden

$\widehat{\emptyset\emptyset}' = 8\mu(\lambda-\tau) r^{-4}$ elde edilir.

$\widehat{ZZ}' = 0$ olduğuna göre $\dfrac{\partial \widehat{ZZ}'}{\partial Z} = \dfrac{\partial p''}{\partial Z} + \rho\bar{g}$ hareket denkleminden

$\dfrac{\partial p''}{\partial Z} + \rho\bar{g} = 0$,

$p'' = -\rho\bar{g}Z + h(r)$ elde edilir. $\widehat{rr}' = 0$ olduğuna göre

$$\frac{\partial \widehat{rr}'}{\partial r} + \frac{\widehat{rr}' - \widehat{\emptyset\emptyset}'}{r} = \frac{\partial p''}{\partial r} - \rho r \omega^2$$

hareket denkleminden

$$-\frac{\widehat{\emptyset\emptyset}'}{r} = \frac{\partial p''}{\partial r} - \rho r\omega^2 = \frac{dh(r)}{dr} - \rho r\omega^2 ,$$

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{\widehat{\emptyset\emptyset}'}{r} + \rho r\omega^2 = \frac{-8\mu(\lambda-\tau)b^2r^{-4}}{r} + \rho r\omega^2$$

$$h = \rho(\frac{1}{2}a^2r^2 - 2ab\log r - \frac{1}{2}br^{-2}) ,$$

$$p'' = -\rho\bar{g}Z + 2\mu(\lambda-\tau)b^2r^{-4} + \rho(\frac{1}{2}a^2r^2 - 2ab\log r - \frac{1}{2}b^2r^{-2}) + C$$

elde edilir. Böylece çözümler toplu halde

$$\text{(B)} \quad \left\{ \begin{array}{lll} \widehat{rr}^1 = 0 , & \widehat{\emptyset\emptyset}^1 = 8\mu(\lambda-\tau)b^2r^{-4}, & \widehat{ZZ}^1 = 0 \\ \widehat{r\emptyset}^1 = 2br^{-2} , & \omega = a - br^{-2} , & \\ \multicolumn{3}{l}{p'' = \rho(\frac{1}{2}a^2r^2 - 2ab\log r - \frac{1}{2}b^2r^{-2}) + 2\mu(\lambda-\tau)b^2r^{-4} - \bar{g}\rho Z + C} \end{array} \right\} \quad (20)$$

şeklinde verilir. Burada a, b, c her iki tip için de sabitleri göstermektedir. b Sabiti $\omega_2-\omega_1$ izafi açısal hızı ve silindirlerin $r_1, r_2 (r_2>r_1)$ yarıçapları cinsinden sıfırdan farklı bir büyüklük olarak $b = \frac{r_1^2 \, r_2^2(\omega_2-\omega_1)}{r_2^2 - r_1^2}$ şeklinde hesaplanabilir. Bu arada fikirleri pekiştirmek üzere ω_2 nin sıfır olduğu hal düşünülebilir. Eğer malzeme yeteri kadar viskoz ve $\lambda>\tau$ ise, yani daha açık olarak $\mu(\lambda-\tau)$ terimi r_2^2 ye göre yeteri kadar büyük ise, p" ifadesindeki merkezsel ivmeden dolayı ortaya çıkan terimler, viskositeyi içeren terimler yanında ihmal edilebilirler. Yatay bir düzlem içerisinden geçerek düzleme etkiyen kuvvetler hareketi daimi tutmaya çalışırlar. Bu kuvvetler (A) malzemesinde

$$-\widehat{ZZ} = -\widehat{ZZ}' + p'' = -6\mu(\lambda-\tau)b^2r^{-4} + \text{sabit}$$

(B) malzemesinde ise,

$$-\widehat{ZZ} = 2\mu(\lambda-\tau)b^2r^{-4} + \text{sabit}$$

normal basınçları olarak verilirler. Birinci halde basınç r ile artar, ikincisinde ise r arttığında basınç azalır. Bu sebepten daimi iki boyutlu hareket yapan bir akışkanda ani olarak bir serbest yüzey verildiğinde, serbest yüzey (A) malzemesinde dış silindir civarında yükselir, iç silindir civarında alçalır. (B) Malzemesinde ise iç silindir civarında tırmanma dış silindir civarında alçalma gibi tamamen ters etkiler meydana gelir.

Malzemelerin kül halindeki davranışlarında önceden seçilebilen hal denklemlerindeki bir şekil değişiminden doğan bu çeşit bir fark özel bir malzeme için genelleştirilmiş çeşitli hal denklemleri arasından birini deney yoluyla seçmekte kullanılabilir.

Örneğin, şimdiden (7) veya (13) denklemlerinden birinin belirli bir sıkışamaz akışkana uygulanması biliniyorsa couette viskozimetresi ile yapılan basit bir deney bu iki alternatiften hangisinin doğru olduğunu gösterecektir. Böyle bir etkinin varlığı (1947,1948) de Weissemberg[4],[5] tarafından çeşitli akışkanlar kullanılarak deney yoluyla gösterildi.

Ayrıca onun tarafından ($\widehat{\emptyset\emptyset}$'>0,(B) malzemesinde olduğu gibi) akım çizgileri doğrultusunda germe gerilmelerini doğuran bu etkinin, viskoz ve elastik özelliklerin bir terkibinden ileri geldiğine işaret edildi.

(1948. 1949) da Reiner[6],[7], Weissenberg tarafından müşahade edilen etkiye malzemeye bir basit kesme gerilmesi uygulandığında tüm doğrultularda elastik birim şekil değiştirmeler doğuracak şekilde bir malzeme sabiti kullanan, Cross elastisitesinin bir tezahürü gözü ile baktı.

Diğer taraftan Rivlin 1948 [8] de aynı olayın elastik özellik göstermiyen non-Newtonien bir akışkanda nasıl meydana geldiğini detaylarıyla gösterdi. Fakat elastik özelliklerin yardımcı sebep olmalarından ötürü Rivlin hata yapmaktadır. Onun düşüncesi, bir elastik akışkana ait hal denklemlerinde mevcut olan gerilme bileşenlerinin zamana göre türevlerinin hareketin daimi olması halinde sıfır olması sebebiyle hal denklemlerinin bir elastik olmıyan akışkana ait hal denklemleriyle aynı olması varsayımına dayanıyordu.

Gerçekte, visko-elastik davranışı tasvir eden hal denkleminin deformasyon hızları tansörünü, gerilme tansörünü ve gerilme tansörünün konvektıd türevini birbirlerine bağlıyan bir denklem olması gerekir. Bir daimi halde Eucled mukayese sisteminde zamana göre kısmı türevler sıfır olur, fakat gerilme tansörünün konvektıd türevi sıfır olmadığı gibi, gerilmelerin ve deformasyon hızları tansörünün bir cebrik konbinezonuna indirgenemez. Bu sebepten, daimi halle ilgili deneylerde, bir visko-elastik akışkan, elastik olmayan viskoz akışkandan farklı bir genel davranış içerisinde bulunur.

KAYNAKLAR

[1] Boltzmann, L. 1876 Ann. Phys, chem. (Poggendorft), Egazungsband 7, 624.

[2] Burgers, J.M. 1935 First raport on viscosity and plasticity, chap. 1, Royal Netherlands Academy of Sciences.

[3] Fröhlieh, H. & Sack, R. 1946 Proç. Roy.Soc.C.A, 185, 415

[4] Weissenberg, K. 1947 Nature, 159, 310.

[5] Weissenberg, K. 1948 Proc.Int.Rheological conr. Holland, 1,29

[6] Reiner, M. 1948 Amer. J.Math. 70, 433

[7] Reiner M. 1949 Dofermation and flow, pp.321-325 London:Lewis.

[8] Rivlin, R.S. 1948 Proc.Roy.Soc.A, 193,260.