Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi
2, 399-407, (1986)

(J,p_n) TOPLANABİLİRLİĞİ İÇİN TAUBER TEOREMİ

Yusuf Ali TANDOĞAN
E.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, KAYSERİ

ÖZET:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n$$ serisi (0,1) aralığında yakınsak ve

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{p_s(x)}{p(x)} = s$$

ise, $\sum a_n$ serisi veya (s_n) dizisi s ye (J,p_n) toplanabilirdir denir.
Burada

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

kuvvet sesinin yakınsaklık yarıçapı 1 kabul edilerek, (J,p_n) toplanabilirliği için bir Tauber Teoremi ifade ve ispat edildi.

THE TAUBER THEOREM FOR (J,p_n) SUMMABILITY

SUMMARY:

Let $$\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n$$ series is convergent in the open interval (0,1) and if

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{p_s(x)}{p(x)} = s,$$

we say that the series $\sum a_n$ or the sequence (s_n) is summable (J,p_n) to s.
Where that the radius of convergence of power series

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

is 1. In this work we proved the Tauber Theorem for (J,p_n) summability.

1- GİRİŞ

Tauber Teoremleri'nin tarihçesi hakkında bilgi ve burada vereceğimiz (J,p_n) toplanabilirliği için Tauber Teoremi ile ilgili tanımlar daha önce [4] da verilmişti. Bu çalışmada Littlewood'un [3] , birinci Tauber Teoremi'indeki $n\ a_n = O(1)$ şartı yerine koyduğu $n\ a_n = O(1)$ şartı ile ilgili (J,p_n) toplanabilirliği için Tauber Teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

2- TEOREM

$$(p_n),\ P_n = \sum_{v=0}^{n} p_v \to \infty \quad , (n \to \infty), \quad (P_{-1} = 0,\ p_{-1} = 0) \text{ olacak şekilde}$$

pozitif sabitlerin bir dizisi olsun. $p_n > 0$ olmak üzere

$$n\ p_n = O(1) \tag{2.1}$$

olduğunu kabul edelim Yine ayrıca $\sum a_n$ serisinin s ye (J,p_n) toplanabilir olduğunu ve

$$a_n P_n = o(p_n) \tag{2.2}$$

şartının sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde $\sum a_n$ serisi s ye yakınsar [2] .

İSPAT:

$n\ p_n = O(1)$ ve $P_n\ a_n = o(p_n)$ den dolayı öyle bir m seçebiliriz ki, $n > m$ için

$$n.p_n \leqslant M \tag{2.3}$$

ile birlikte, ε istediğimiz kadar küçük pozitif bir sayı olmak üzere

$$|a_n| \leqslant \varepsilon \frac{p_n}{P_n} \tag{2.4}$$

dir.

İlk önce (2.1) şartının

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1-\frac{1}{m})^n} = O(1), \quad m \to \infty \text{ için} \tag{2.5}$$

ifadesini gerektirdiğini ispat edelim, daha önce bunu böyle almıştık [4].

$$n.p_n \leqslant M$$

den dolayı

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} p_n(1-\frac{1}{m})^n = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n} . n.p_n(1-\frac{1}{m})^n$$

$$\leqslant M \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n} (1-\frac{1}{m})^n$$

yazalım. $n > m$ den $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$ olduğunu gözönüne alırsak

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} p_n(1-\frac{1}{m})^n \leqslant \frac{M}{m} \sum_{n=m+1}^{\infty} (1-\frac{1}{m})^n = \frac{M}{m} . m = M$$

elde ederiz. Buradan da $0 < x < 1$, $0 < p_n(1-x^n) < (1-x)\ n.p_n$ için

$$\left|\sum_{n=0}^{m} p_n - \sum_{n=0}^{\infty} p_n\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{m} p_n\right| + \left|\sum_{n=0}^{\infty} p_n\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right|$$

$$\leqslant \left|\sum_{n=0}^{m} p_n\right| + \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} . n\, p_n\right| + M$$

$$\leqslant M + \frac{1}{m}\left|\sum_{n=0}^{m} n\, p_n\right|$$

$$= M + \frac{p_1 + 2p_2 + \ldots . + m\, p_m}{m}$$

dir. $n.p_n = 0(1)$ kabulümüzden dolayı

$$\sum_{m=1}^{m} n.p_n = 0(m)$$

olduğunu göz önüne alalım [1] . Bu nedenle, m yi yeterince büyük seçmek şartıyle

$$\left|\sum_{n=0}^{m} p_n - \sum_{n=0}^{\infty} p_n\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right| \leqslant M$$

elde ederiz.

Bu hesaplamalardan kolayca elde ederiz ki, limit tanımına göre

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\left(1-\frac{1}{m}\right)^n$$

buradan

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{m} p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1-\frac{1}{m})^n} = 1$$

ve aynı zamanda

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1-\frac{1}{m})^n} = O(1), \quad m\to\infty$$

elde ederiz.

Şimdi de $\sum a_n$ serisinin kısmî toplamlar dizisi (s_n)'in s ye yakınsadığını gösterelim. $0<x<1$ için

$$s_m - \frac{p_s(x)}{p(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_m p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (s_m-s_n)\, p_n\, x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n}$$

$$s_m - \frac{p_s(x)}{p(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{m-1} (s_m-s_n)\, p_n\, x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} - \frac{\sum_{n=m+1}^{\infty} (s_m-s_n)\, p_n\, x^n}{\sum_{r=0}^{\infty} p_n x^n}$$

$$= I + J$$

diyelim. Eğer $x = 1-\frac{1}{m}$ seçilirse (2.2) ve (2.5)'den

$$|I| \leqslant \frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1} | s_m-s_n | p_n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(1-\frac{1}{m})^n}$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(1-\frac{1}{m})^n} \{ |s_m - s_o| p_o + | s_m - s_1| p_1+\ldots\ldots+|s_m-s_{m-1}|p_{m-1} \}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(1-\frac{1}{m})^n} \{ p_1 \frac{|a_1| p_o}{P_1} + p_2 \frac{|a_2| (p_o + p_1)}{P_2} + \ldots\ldots + p_m \frac{|a_m| (p_o + p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_{m-1})}{P_m} \}$$

$$= \frac{P_m}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(1-\frac{1}{m})^n} \cdot \frac{1}{P_m} \{ p_1 \frac{|a_1| P_o}{P_1} + p_2 \frac{|a_2| P_1}{P_2} + \ldots\ldots + p_m \frac{|a_m| P_{m-1}}{P_m} \}$$

$$= \frac{P_m}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(1-\frac{1}{m})^n} \cdot \frac{1}{P_m} \{ o(1) + o(1) + \ldots\ldots + o(1) \}$$

$$I = o(1) \quad \frac{\sum_{n=0}^{m} p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n\left(1-\frac{1}{m}\right)^n} \cdot \frac{1}{P_m} = o(1).O(1) = o(1)$$

böylece

$$I = o(1), \quad m \to \infty \tag{2.6}$$

elde edilir.

Şimdi biz J yi hesaplayalım. (2.4)'den

$$|s_m - s_n| \leqslant |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_n|$$

$$\leqslant \varepsilon \left\{ \frac{p_{m+1}}{P_{m+1}} + \frac{p_{m+2}}{P_{m+2}} + \dots + \frac{p_n}{P_n} \right\}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{P_m} \{ p_{m+1} + p_{m+2} + \dots + p_n \}$$

$$= \frac{\varepsilon}{P_m} \left\{ \frac{(m+1)\, p_{m+1}}{m+1} + \frac{(m+2)\, p_{m+2}}{m+2} + \dots + \frac{n\, p_n}{n} \right\}$$

(2.3)'den de

$$|s_m - s_n| \leqslant \frac{\varepsilon M}{P_m} \cdot \left\{ \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \dots + \frac{1}{n} \right\}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon M}{P_n} \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} \right\}$$

ve böylece

$$|s_m - s_n| \leqslant \frac{\varepsilon M}{P_m} \cdot \frac{n}{m} \tag{2.7}$$

bulunur. Buradan da $x = 1- \frac{1}{m}$ olduğunda

$$|J| \leqslant \frac{\sum_{n=m+1}^{\infty} |s_m - s_n| \, p_n \, x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \, x^n}$$

ifadesi (2.7)'den

$$|J| \leqslant \frac{\varepsilon \frac{M}{P_m} \cdot \frac{1}{m} \sum_{n=m+1}^{\infty} n.p_n (1- \frac{1}{m})^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n (1- \frac{1}{m})^n}$$

(2.3)'den de

$$|J| \leqslant \frac{P_m \frac{\varepsilon M^2}{P_m^2} \cdot \frac{1}{m} \sum_{n=m+1}^{\infty} (1- \frac{1}{m})^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n (1- \frac{1}{m})^n}$$

olur. Yeterince büyük m için (2.5)'den

$$|J| < O(1). \ \varepsilon \frac{M^2}{m.P_m^2} \sum_{n=0}^{\infty} (1- \frac{1}{m})^n$$

dir, buradan $\sum_{n=0}^{\infty} (1-\frac{1}{n})^n = m$ alırsak,

$$|J| \leq \varepsilon \frac{M^2}{m.P_m^2} . m$$

ve yine $\frac{m^2}{P_m^2} = O(1)$ den

$$|J| \leq \varepsilon \frac{M^2}{m^2} \leq \varepsilon \qquad (2.8)$$

elde edilir.

m'yi sonsuza götürürsek (2.6) ve (2.8)'den

$$s_m - \frac{p_s(x)}{p(x)} \leq o(1) + \varepsilon$$

olur, buradan da

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{x\to 1^-} \frac{P_s(x)}{p(x)} = s$$

olur ki, bu da teoremin ispatıdır.

KAYNAKLAR

1- E.W. Hobson, "The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series", vol. 2,7, Cambridge (1926)

2- K. Ishiguro, "Two Tauberian Theorem for (J,p_n) summability", Proc. Japan Acad. 41,40-45, (1965)

3- J.E. Littlewoud, "The Converse of Abel's Theorem on power series", P.London, Math. Soc. (2), 434-448, (1911)

4- Y.Ali Tandoğan, "(J,p_n) Toplanabilirliği için bir Tauber Teoremi" E.Ü. Fen Bilimleri Dergisi, Kayseri, cilt 1, sayı 2, 321-329, (1985)