Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi
2, 155-162, (1986)

PERİYODİK BİR f FONKSİYONUNUN HEMEN HEMEN RIESZ ORTALAMASI YARDIMI İLE YAKLAŞIM DERECESİ

İlhan ÖZTÜRK

E.Ü. Meslek Yüksek Okulu, KAYSERİ

ÖZET

f, 2π periyodlu, periyodik ve Lebesgue anlamında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Lip α $(0<\alpha\leq 1)$ sınıfına ait f fonksiyonunun Fourier serisinin hemen hemen Riesz ortalaması yardımı ile yaklaşım derecesi;

$$\max_{0\leq x\leq 2\pi} \left| f(x)-t_{n,p}(x) \right| = \begin{cases} O\left\{ \left(\dfrac{p_n}{P_n} \right)^{\alpha} \right\} & ; \ 0<\alpha<1 \\ O\left\{ \dfrac{p_n}{P_n} \operatorname{Log} \dfrac{P_n}{p_n} \right\} & ; \ \alpha = 1 \end{cases}$$

şeklinde verilir.

THE DEGREE OF APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTION f BY ALMOST RIESZ MEANS

SUMMARY

Let f be periodic function with period 2π and integrable in the sense of Lebesgue. The degree of approximation of a periodic function f belonging to the class of Lip α $(0<\alpha\leq 1)$ by almost Riesz means of its Fourier series is given by

$$\max_{0\leq x\leq 2\pi} \left| f(x)-t_{n,p}(x) \right| = \begin{cases} O\left\{ \left(\dfrac{p_n}{P_n} \right)^{\alpha} \right\} & ; \ 0<\alpha<1 \\ O\left\{ \dfrac{p_n}{P_n} \operatorname{Log} \dfrac{P_n}{p_n} \right\} & ; \ \alpha = 1 \end{cases}$$

1- GİRİŞ

Lorentz [1] 1948 yılında bir $\{s_n\}$ dizisinin hemen hemen yakınsaklığını tanımladı. Sharma ve Qureshi [2] de hemen hemen Riesz anlamında toplanabilme tanımını verdiler ve yakınsaklığın bir genelleştirilmesi olarak hemen hemen yakınsaklığı incelediler. Biz bu çalışmamızda [2] de incelenen periyodik bir f fonksiyonunun hemen hemen Riesz anlamında yaklaşım derecesini veren bir teoremin ifade ve ispatını ele aldık.

2- TANIMLAR

2.1-TANIM:

$\{p_n\}$ dizisi, $p_0 > 0$, $P_n = p_0+p_1+\dots+p_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ olmak üzere negatif olmayan sabitlerin bir dizisi olsun.

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k \tag{2.1}$$

yazalım. t_n ye $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olan $\{s_n\}$ dizisinin Riesz ortalaması veya kısaca (R,p_n)-ortalaması denir [3] .

2.2-TANIM:

Eğer $0 < \alpha \leq 1$ için

$$f(x+h) - f(x) = O(|h|^{\alpha}) \tag{2.2}$$

ise, f fonksiyonuna Lip α sınıfına ait bir fonksiyondur denir ve $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ şeklinde gösterilir [3].

2.3-TANIM:

Eğer p ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=p}^{n+p} s_k = s \tag{2.3}$$

ise $\{s_n\}$ dizisi, s limitine hemen hemen yakınsar denir [1].

2.4-TANIM:

$\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $\{s_n\}$ dizisi olmak üzere, eğer p ye göre düzgün olarak

$$t_{n,p} = \frac{1}{P_n} \sum_{k=o}^{n} p_k s_{k,p} \to s, \quad (n \to \infty) \tag{2.4}$$

ise, $\sum a_n$ serisi s limitine hemen hemen Riesz anlamında toplanabilirdir denir. Burada

$$s_{k,p} = \frac{1}{(k+1)} \sum_{\mu=p}^{k+p} s_\mu \tag{2.5}$$

ve $\{p_n\}$ dizisi; $p_o > 0$, $P_n = p_o + p_1 + \ldots + p_n$ olmak üzere negatif olmayan sabitlerin bir dizisidir [2].

3.TEOREM

2π periyodlu, periyodik ve Lip α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ sınıfına ait bir f fonksiyonunun Fourier serisinin hemen hemen Riesz ortalaması yardımı ile yaklaşım derecesi;

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x) - t_{n,p}(x)| = \begin{cases} 0\left\{\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}\right\} & ; \ 0 < \alpha < 1 \\ 0\left\{\left(\frac{p_n}{P_n} \operatorname{Log} \frac{P_n}{p_n}\right)\right\} & ; \ \alpha = 1 \end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada (R, p_n) -ortalaması regülerdir ve $n \geqslant n_o$ için $p_n > 0$ artandır [2].

İSPAT:

f fonksiyonunun Fourier serisi

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sin} nx) \tag{3.1}$$

olsun. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi $\{s_\mu(x)\}$ ise

$$s_\mu(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\mu} (a_\nu \operatorname{Cos} \nu x + b_\nu \operatorname{Sin} \nu x) \qquad (3.2)$$

yazılabilir. Diğer taraftan (3.1) ifadesinde verilen Fourier serisinin katsayıları;

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u)\,du, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \operatorname{Cos} nu\,du, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \operatorname{Sin} nu\,du$$

olduğundan, bu eşitlikleri (3.2) ifadesinde değerlendirirsek

$$s_\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\mu} \operatorname{Cos} \nu (x-u) \right\} f(u)\,du \qquad (3.3)$$

elde ederiz. Halbuki

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\mu} \operatorname{Cos} \nu u = \frac{\operatorname{Sin}(\nu + \frac{1}{2})u}{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2} u}$$

olduğundan (3.3) ifadesi

$$s_\mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Sin}(\mu + \frac{1}{2})(x-u)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(x-u)} f(u)\,du$$

şeklinde yazılabilir ve buradanda gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$s_\mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \{f(x+t) + f(x-t)\} \frac{\operatorname{Sin}(\mu + \frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} t}\,dt \qquad (3.4)$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Sin}(\mu + \frac{1}{2})\,t}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} t}\,dt \qquad [4]$$

olduğundan

$$s_\mu(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\}\ \frac{\operatorname{Sin}(\mu+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\,dt \qquad (3.5)$$

yazılabilir. Halbuki (2.5) ifadesini dikkate alırsak

$$s_{k,p}(x)-f(x)=\frac{1}{(k+1)}\sum_{\mu=p}^{k+p} s_{\mu}(x)-f(x)=\frac{1}{(k+1)}\sum_{\mu=p}^{k+p}\{s_\mu(x)-f(x)\} \qquad (3.6)$$

eşitsizliğini bulmuş oluruz. (3.5) ifadesini (3.6) eşitliğinde değerlendirirsek

$$s_{k,p}(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi(k+1)}\int_0^\pi \{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\}\sum_{\mu=p}^{k+p}\frac{\operatorname{Sin}(\mu+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t} \qquad (3.7)$$

buluruz.

$$\sum_{\mu=p}^{k+p}\frac{\operatorname{Sin}(\mu+\frac{1}{2}t)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}=\frac{\operatorname{Cos}pt-\operatorname{Cos}(k+p+1)t}{2\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}t}$$

olduğunu dikkate alır ve $\emptyset(t)=\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\}$ dersek (3.7) eşitliğini

$$s_{k,p}(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi(k+1)}\int_0^\pi \emptyset(t)\ \frac{[\operatorname{Cos}pt-\operatorname{Cos}(k+p+1)t]}{2\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}t}\,dt \qquad (3.8)$$

şeklinde ifade etmek mümkün olur. Şimdi (2.4) ifadesinden faydalanarak $f(t)-t_{n,p}(t)$ ifadesini teşkil edelim.

$$f(t)-t_{n,p}(t)=f(t)-\frac{1}{P_n}\sum_{k=o}^{n} p_k s_{k,p}(t)$$

$$=\frac{1}{P_n}\sum_{k=o}^{n} p_k\ \{f(t)-s_{k,p}(t)\}$$

dir.

(3.8) eşitliğini göz önüne alırsak

$$f(t)-t_{n,p}(t)=\frac{1}{P_n}\sum_{k=o}^{n} p_k\left\{\frac{1}{2\pi(k+1)}\int_o^{\pi}\emptyset(t)\frac{[\mathrm{Cos}(k+p+1)t-\mathrm{Cos}pt]}{2\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}t}dt\right\} \quad (3.9)$$

elde ederiz. Halbuki,

$$\mathrm{Cos}(k+p+1)t-\mathrm{Cos}pt=-2\mathrm{Sin}(k+2p+1)\frac{t}{2}\,.\,\mathrm{Sin}(k+1)\frac{t}{2}$$

olduğundan (3.9) eşitliği

$$f(t)-t_{n,p}(t)=\frac{1}{2\pi P_n}\int_o^{\pi}\emptyset(t)\sum_{k=o}^{n}\left(-\frac{p_k}{(k+1)}\,.\,\frac{\mathrm{Sin}(k+2p+1)\frac{t}{2}\ \mathrm{Sin}(k+1)\frac{t}{2}}{\mathrm{Sin}^2\frac{t}{2}}\right)dt$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi

$$|f(t)-t_{n,p}(t)|\leq\frac{1}{2\pi P_n}\int_o^{p_n/P_n}|\emptyset(t)|\left|\sum_{k=o}^{n}\frac{p_k}{(k+1)}\,.\,\frac{\mathrm{Sin}(k+2p+1)\frac{t}{2}\mathrm{Sin}(k+1)\frac{t}{2}}{\mathrm{Sin}^2\frac{t}{2}}\right|dt$$

$$+\frac{1}{2\pi P_n}\int_{p_n/P_n}^{\pi}|\emptyset(t)|\left|\sum_{k=o}^{n}\frac{p_k}{(k+1)}\,.\,\frac{\mathrm{Sin}(k+2p+1)\frac{t}{2}.\mathrm{Sin}(k+1)\frac{t}{2}}{\mathrm{Sin}^2\frac{t}{2}}\right|dt$$

$= I_1+I_2$ yazalım.

I_1 ve I_2 ifadelerini ayrı ayrı inceleyelim.

$|\mathrm{Sin}(k+1)\frac{t}{2}|\leq(k+1)|\mathrm{Sin}\frac{t}{2}|$ ve $\frac{1}{\mathrm{Sin}\frac{t}{2}}=0(\frac{1}{t})$ [5] olduğundan

$$I_1=0\left\{\frac{1}{P_n}\int_o^{p_n/P_n}\frac{|\emptyset(t)|}{t}\sum_{k=o}^{n}\frac{p_k}{k+1}\,.\,\frac{|\mathrm{Sin}(k+2p+1)\frac{t}{2}|(k+1)|\mathrm{Sin}\frac{t}{2}|}{|\mathrm{Sin}\frac{t}{2}|}dt\right\}$$

$$=0\left\{\frac{1}{P_n}\int_o^{p_n/P_n}\frac{|\emptyset(t)|}{t}\sum_{k=o}^{n}p_k.\,|\mathrm{Sin}(k+2p+1)\frac{t}{2}|\,dt\right\}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\mathrm{Sin}(k+2p+1)\frac{t}{2} = 0(1)$ alınabileceğinden

$$I_1 = 0\left\{\frac{1}{P_n}\int_0^{p_n/P_n}\frac{|\phi(t)|}{t}\sum_{k=0}^{n} p_k\,.dt\right\} = 0\left\{\int_0^{p_n/P_n}\frac{|\phi(t)|}{t}dt\right\}$$

bulunur. Ayrıca (2.2) ifadesini dikkate alırsak $\phi(t)=0(|t|^{\alpha})$ olur. O halde $0<\alpha<1$ için

$$I_1 = 0\left\{\int_0^{p_n/P_n}\frac{t^{\alpha}}{t}dt\right\} = 0\left\{\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}\right\} \qquad (3.10)$$

elde edilir. Şimdi de I_2 ifadesini gözönüne alalım. I_1 ifadesinin ispatında olduğu gibi hareket ederek

$$I_2 = 0\left\{\frac{1}{P_n}\int_{p_n/P_n}^{\pi}\frac{|\phi(t)|}{\mathrm{Sin}\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}\left|p_k\,.\mathrm{Sin}(k+2p+1)\frac{t}{2}\right|dt\right\}$$

dir.

$$\sum_{k=0}^{n} p_k.\mathrm{Sin}(k+2p+1)\frac{t}{2} = 0\left(\frac{p_n}{t}\right) \quad [6]$$

olduğunu dikkate alırsak $0<\alpha<1$ için

$$I_2 = 0\left\{\frac{1}{P_n}\int_{p_n/P_n}^{\pi}\frac{t^{\alpha}}{t}\,.\,\frac{p_n}{t}dt\right\} \qquad (3.11)$$

$$= 0\left\{\frac{p_n}{P_n}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha-1}\right\} = 0\left\{\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}\right\} \qquad (3.12)$$

elde edilir. (3.11) ifadesinde $\alpha=1$ alalım. Bu takdirde

$$I_2 = 0\left\{\frac{1}{P_n}\int_{p_n/P_n}^{\pi}\frac{t}{t}\cdot\frac{p_n}{t}\,dt\right\} = 0\left\{\frac{p_n}{P_n}\int_{p_n/P_n}^{\pi}\frac{dt}{t}\right\}$$

$$= 0\left\{\frac{p_n}{P_n}\operatorname{Log}\frac{P_n}{p_n}\right\} \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.10), (3.12) ve (3.13) ifadeleri dikkate alınırsa

$$\operatorname*{Max}_{0\leq x\leq 2\pi}|f(x)-t_{n,p}(x)| = \begin{cases} 0\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha} & ;\ 0<\alpha<1 \\ 0\ \frac{p_n}{P_n}\operatorname{Log}\frac{P_n}{p_n} & ;\ \alpha=1 \end{cases}$$

elde edilmiş olurki, buda teoremin ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR

1- Lorentz,G.G. "A Contribution To The Theory of Divergens Series" Acta Math. 80. 167-190, (1948).

2- Sharma,P.L. and Qureshi,K. "On the Degree Of Approximation Of a Periodic Function By Almost Riesz Means" Ranchi Univ.Math.J.,11, 29-33 (1980).

3- Chandra, P. "On The Degree Of Approximation Of Functions Belonging To The Lipschitz Class" Nanta Mathematica, Vol.VIII.No.1,88-91, (1975).

4- Öztürk,İ. "Periyodik Fonksiyonların Riesz Ortalaması Yardımı İle Yaklaşım dereceleri" Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi. 1,339-348 (1985).

5- Quershi, K. "On The Degree Of Approximation Of Functions Belonging To The Lipschitz Class By Means Of a Concjugate Series" Indian J.Pure appl.Math., 12(9), 1120-1123, (1981).

6- Qureshi, K. "Error Bounds In The Approximation Of Functions" The Mathematics Education. Vol.XIV.No.4, 66-70, (1980).