Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi
2, 129-141, (1986)

BANACH UZAYLARINDA SINIRSIZ DÖNÜŞÜMLER VE AĞ TOPLANABİLİRLİK

Hüseyin ÇAKALLI
E.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, KAYSERİ

ÖZET

Bu çalışmanın birinci kesimi gerekli tanım ve teoremlere ayrılmış, orjinal kesimlerden biri olan ikinci kesimde de önce iki yeni tanım, sırasıyla ayrılabilir yönlendirilmiş cümle ve ayrılabilir ağ tanımları, verilmiş ve arkasından iki lemma ve iki teorem ispatlanmıştır. Son kesimde de sınırsız olabilen lineer dönüşümlerin ağlarının matrisleri ile ilgili regülerlik, L-regülerlik ve konservatiflik teoremleri verilmiştir.

UNBOUNDED OPERATORS AND NET SUMMABILITY IN BANACH SPACES

SUMMARY

The first section of this paper is devoted to known necessary definitions and theorems, and in the second section, which is one of the original sections, it has been given the definitions of seperable directed set and seperable net, respectively and then proved two lemmas and two theorems. In the last section, the theorems of regularity, L-regularity and conservativity related to matrices of nets of linear operators which may be unbounded have been given.

1- GİRİŞ

Diziden-diziye ilk önemli çalışma Toeplitz,O. tarafından 1911 yılında yapılmıştır [5]. O çalışmada reel ya da kompleks regüler üçgensel matrisleri karakterize eden bir teorem verilmiştir. 1920 de Schur [4], bu teoremi üçgensel olmayan matrislere şu şekilde genelleştirdi.

Teorem 1.1. Reel veya kompleks terimli bir $A=(a_{nk})$ matrisinin yakınsak her bir diziyi yakınsak bir diziye, aynı limitle dönüştürmesi için gerek ve yeter koşullar:

(a) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$

(c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

1950 de Robinson,A. bu teoremi tam normlu uzaylarda aşağıdaki şekilde verdi [3].

Teorem 1.2.X tam normlu bir uzay olmak üzere, X den X e sınırlı lineer dönüşümlerin diziden-diziye bir matrisi $A=(A_{nk})$ nın regüler olması için gerek ve yeter koşullar:

(1) M,n den bağımsız olmak üzere $\| A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{nk}, \ldots \| = a_n \leq M < \infty$

(2) Her $k \in N$ için, $\lim_{n\to\infty} A_{nk}=0$

(3) Her $n \in N$ için, $\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}=A_n$ mevcut,

(4) $\lim_{n\to\infty} A_n = 1$

Bu teorem aşağıdaki şekilde de ifade edilebilmektedir.

Teorem 1.3.X bir Banach uzayı olmak üzere, X den X e sınırlı lineer dönüşümlerin diziden-diziye bir matrisi $A=(A_{nk})$ nın regüler olması için gerek ve yeter koşullar:

(1') $\| \sum_{k=1}^{m} A_{nk}(x_k) \| \leq K$, $(m,n=1,2,\ldots,n \in N$ için $\| x_n \| \leq 1)$
olacak şekilde m ve n den bağımsız bir K sabiti vardır.

(2') her $k \in N$ ve her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} A_{n,k}(x)=0\,(x)=0$

(3') her $n \in N$ ve her $x \in X$ için $\sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k}(x)=A_n(x)$ mevcut,

(4') her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} A_n(x)=I(x)=x$

Bu teorem gibi uzayların farklı olması durumunda yani A_{nk} lerin bir X Banach uzayından diğer bir Y Banach uzayına sınırlı lineer dönüşümler olarak alınması halinde de L-regülerlik ve konservatiflik teoremleri ifade edilebilir.

Lorentz ve Macphail, [2] sınırsız dönüşümler ile ilgili iki teorem ispatlayıp, regülerlik kavramını A_{nk} ların sınırsız olabilen dönüşümler olabilmesi halinde vermiştir. Bu teoremleri aşağıda veriyoruz.

Teorem 1.4 X bir Banach uzayı olmak üzere X in kapalı lineer alt uzaylarının bir dizisi (L_n) olsun. Her $n \in N$ için T_n, L_n üzerinde sınırlı ve X den kendisi içine lineer bir dönüşüm olmak üzere her bir $x \in X$ için $(T_n(x))$ dizisinin X de sınırlı olduğunu varsayalım. Bu takdirde her $n \in N$ için T_n $\bigcap_{k=1}^{m} L_k$ üzerinde sınırlı olacak şekilde bir $m \in N$ vardır.

Teorem 1.5. X bir Banach uzayı olmak üzere her $n \in N$ için $L_n \subset L_{n+1}$ olacak şekilde X in kapalı lineer alt uzaylarının bir dizisi olmak üzere T_n' sınırlı, S_n, L_n nin dışında sıfır olsun ve her $n \in N$ için $T_n = S_n + T_n'$ özelliği sağlansın. Her $n \in N$ için $T_n = S_n + T_n'$ özelliği sağlansın. Her $x \in X$ için $(T_n(x))$ dizisi sınırlı olsun. Bu takdirde T_n ler birim yuvarın L_{n_0} tarafından kapsanmayan kısmı üzerinde sınırlı olacak şekilde bir $n_0 \in N$ vardır.

[2] de Teorem 1.4 den yararlanılarak, her bir terimi lineer dönüşüm (sınırlı olmak zorunda değil) olan diziden-diziye matrisler için regülerlik teoremi Banach uzaylarında ispatlanmıştır.

Biz yukarıdaki teoremleri ağlar için vereceğiz ve her bir terimi lineer dönüşüm (sınırlı olmak zorunda değil) olan ağdan-ağa matrislerde regülerlik, L-regülerlik ve konservatiflik teoremlerini Banach uzaylarında ispatlayacağız. Uzayların Frechet uzayları olarak alınması halinde yukarıdaki teoremlerin geçerli olup olmadığının araştırılması ise çok zor bir problem olarak karşımızda durmaktadır. Çok uğraşmama rağmen bu problemi çözmeye henüz muvaffak olamadım.

2. AĞLAR VE SINIRSIZ DÖNÜŞÜMLER

Önce ağlarla ilgili bilinen tanımları ifade edelim. D, boş olmayan bir cümle olsun. Eğer D üzerinde bir $\leq$ kısmı sınırlama bağıntısı var ve D bu sıralamaya göre tam sıralı ise $(D, \leq)$ ye yönlendirilmiş cümle diyeceğiz.

Eğer her $d \in D$ için $\{e: e \in D, e \leq d\}$ cümlesi sonlu ise $(D, \leq)$ ye sonlu başlangıç parçalarına sahip yönlendirilmiş cümle denir. Eğer bir f fonksiyonun tanım cümlesi bir $\leq$ bağıntısı ile yönlendirilmiş bir cümle ise f fonksiyonuna bir ağ denir ve $(f(d))$, $d \in D$, $\leq)$ veya karışıklık yaratmadığı sürece $(f(d), d \in D)$ veya $(f_d)_{d \in D}$ sembollerinden biri ile gösterilir.

$(f(d))$, $d \in D)$ bir ağ ve E yönlendirilmiş bir cümle olmak üzere eğer her $e \in E$ için $h(e)=f(g(e))$ ve her bir $d \in D$ için $e<p$ olduğunda $d \leq g(p)$ olacak biçimde bir $e \in E$ var olacak şekilde E den D ye bir g fonksiyonu bulunabiliyorsa, $(h(e), e \in E) = (f(g(e)), e \in E)$ ağına $(f(d), d \in D)$ ağının bir alt ağı denir.

Şimdi incelememizde sık sık kullanacağımız yukarıdaki tanımlara ek olarak yeni bir tanım vereceğiz.

Tanım 2.1. $(D,\leq)$ yönlendirilmiş bir cümle olsun. Her $d\in D$ için $m\leq n$ olduğunda $d\leq g(n)$ olacak şekilde bir $m\in N$ bulunacak şekilde N den D ye bir g fonksiyonu varsa $(D,\leq)$ ye ayrılabilir yönlendirilmiş cümle denir.

Lemma 2.2. D sonsuz bir cümle olmak üzere $(D,\leq)$ sonlu başlangıç parçalarına sahip yönlendirilmiş bir cümle ise ayrılabilir yönlendirilmiş bir cümledir.

İspat: Bir $d_1\in D$ alalım. D sonlu başlangıç parçalarına sahip olduğundan, $\text{kard}(\{e: e\leq d_1\})=k_1$ olacak şekilde bir $k_1\in N$ vardır. $g(k_1)=d_1$ diyelim. D sonsuz elemanlı olduğundan, $d_1\leq d_2$ ve $d_1\neq d_2$ olacak şekilde en az bir $d_2\in D$ vardır. Bu takdirde, $k_2\in N$ olmak üzere,

$$k_1<\text{kard}\ \{e: e\leq d_2\} =k_2$$

dir. $d_2=g(k_2)$ diyelim. Bu şekilde devam ederek, $d_1,d_2,\ldots\ldots,d_{n-1}$ $k_1,k_2,\ldots.,$ k_{n-1}, $g(k_1),g(k_2),\ldots\ldots,g(k_{n-1})$ lerin bulunduğunu kabul edelim. Bu takdirde, D sonsuz elemanlı, sonlu başlangıç parçalarına sahip yönlendirilmiş bir cümle olduğundan, $d_{n-1}\leq d_n$ ve $d_{n-1}\neq d_n$

olacak şekilde en az bir $d_n\in D$ vardır ve

$$k_{n-1}<\text{kard}\ \{e: e\leq d_n\} = k_n$$

dir. $d_n=g(k_n)$ diyelim. Böyle devam ederek elde edeceğimiz $(d_n)_{n\in N} = (g(k_n))_{n\in N}$ dizisi D de bir ağdır ve yukarıda tanımladığımız g fonksiyonu her $d\in D$ için $n\geq m$ olduğunda $g(k_n)\geq d$ olacak şekilde bir $m\in N$ nin bulunması özelliğini sağlar. O halde D ayrılabilir yönlendirilmiş cümledir. Bu lemmanın karşıtı her zaman doğru değildir. Gerçekten $D=(0,1)$ cümlesini küçük ya da eşit bağıntısı ile yönlendirilmiş bir cümle olarak gözönüne aldığımızda, D nin ayrılabilir fakat sonlu başlangıç parçalarına sahip olmayan bir yönlendirilmiş cümle olduğunu görürüz.

Lemma 2.3. $(D,\leq)$ ayrılabilir yönlendirilmiş bir cümle, X normlu bir uzay ve X den X e lineer dönüşümlerin bir ağı $(T_d,\ d\in D)$ olsun. X deki her $(x_d,\ d\in D)$ sıfır ağı için $(T_d(x_d),\ d\in D)$ ağı sınırlı ise bu takdirde, $d\geq d_0$ olduğunda T_d sınırlı olacak şekilde $d_0\in D$ vardır.

İspat: Kabul edelim ki $d>d_0$ oldukça T_d sınırlı olacak şekilde hir bir $d_0\in D$ bulunmasın. Bu takdirde, her $d\in D$ için $T_{g(d)}$ sınırsız olacak şekilde $g(d)>d$ özelliğine sahip bir $g(d)\in D$ vardır. D ayrılabilir olduğundan, D de $(I(d),$

$d\in D)=(d,\ d\in D)$ ağının altağı olan bir $(f(n),\ n\in N)$ dizisi mevcuttur. Buna göre, her n doğal sayısı için $h(n)=g(f(n))$ olmak üzere,

$$||T_{h(n)}(x_{h(n)})|| \neq 0 \text{ ve } \qquad \lim_{n\to\infty} ||T_{h(n)}(x_{h(n)})|| = \infty$$

olacak şekilde X de $||x_{h(n)}||\leq 1$ özelliğine sahip bir $(x_{h(n)})$ dizisi vardır. Şimdi,

$$y_d = \begin{cases} ||T_{h(n)}(x_{h(n)})||^{-1/2}x_{h(n)} & ,\ d=h(n) \text{ için} \\ 0 & ,\ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şekilde tanımlanan (y_d) ağını göz önüne alalım. Bu ağ X de bir sıfır ağıdır. Ancak, $d=h(n)$ için,

$$||T_d(y_d)|| = ||T_{h(n)}(y_{h(n)})|| = ||T_{h(n)}(||T_{h(n)}(x_{h(n)})||^{-1/2}x_{h(n)})||$$

$$= ||T_{h(n)}(x_{h(n)})||^{-1/2}||T_{h(n)}(x_{h(n)})|| = ||T_{h(n)}(x_{h(n)})||^{1/2}$$

olduğundan, $(T_{h(n)}(x_{h(n)}))$ dizisi sınırsızdır. Bu dizi $(T_d(x_d),\ d\in D)$ ağının bir alt ağı olduğundan, $(T_d(x_d),\ d\in D)$ ağı da sınırsız olur. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.4. $(D,\leq)$ sonlu başlangıç parçalarına sahip yönlendirilmiş bir cümle, X bir Banch uzayı ve X in kapalı lineer alt uzaylarının bir ağı $(L_d,\ d\in D)$ olsun. Her bir $d\in D$ için, T_d, L_d üzerinde sınırlı ve X i kendisi içine dönüştüren bir lineer dönüşüm olmak üzere, her bir $x\in X$ için, $(T_d(x),\ d\in D)$ ağının X de sınırlı olduğunu varsayalım. Bu takdirde her $d\in D$ için $T_d' = \bigcap_{e'\leq e} L_{e'}$ üzerinde sınırlı olacak şekilde bir $e\in D$ vardır.

ispat: Genelliği bozmaksızın $d\leq e$ özelliğini sağlayan her $d,e\in D$ için $L_d\supset L_e$ olduğunu kabul edebiliriz. Çünki, aksi takdirde her $d\in D$ için $L_d' = \bigcap_{e\leq d} L_e$, kapalı lineer alt uzaylarını ele alabiliriz.

Sonucun gerçeklenmediğini kabul edelim. Bu takdirde, her bir L_d ye karşılık, L_d üzerinde sınırlı olmayan bir T_e vardır ve $e\neq d$ dir. D ayrılabilir yönlendirilmiş bir cümle olduğundan, her $d\in D$ için, $n>m$ olduğunda $g(n)\geq d$ olacak şekilde bir $m\in N$ bulunacak biçimde N den D ye bir g fonksiyonu bulunabilir.

Şimdi $g(1)=h(1)$ diyelim. $h'(1) > h(1)$ olacak şekilde bir $h'(1) \in D$ vardır. Bu $h'(1) \in D$ için, $n \geq m_1$ oldukça, $g(n) \geq h'(1)$ olacak biçimde bir $m_1 \in N$ vardır. Buradan, $g(m_1) \geq h'(1) > h(1)$ elde edilir. $g(m_1)=h(2)$ dersek, $h(2) > h(1)$ olur. Bu $h(2) \in D$ için, $h'(2) > h(2)$ olacak şekilde bir $h'(2) \in D$ vardır. Benzer şekilde $h'(2) \in D$ için, $n \geq m_2$ oldukça, $g(n) \geq h'(2)$ olacak şekilde bir $m_2 \in N$ vardır. Buradan $g(m_2) \geq h'(2) > h(2)$ yazabiliriz. Şimdi de $g(m_2)=h(3)$ diyelim. Bu taktirde, $h(3) > h(2)$ olur. Böyle devam ederek, $h(4)$,.. ......, $h(k-1)$ elemanlarının seçilmiş olduklarını kabul edelim. $h(k-1) \in D$ için, $h'(k-1) > h(k-1)$ olacak şekilde bir $h'(k-1) \in D$ vardır. Bu $h'(k-1) \in D$ için, $n \geq m_{k-1}$ olduğunda $g(n) \geq h'(k-1)$ olacak şekilde bir $m_{k-1} \in N$ vardır ve dolayısıyle $g(m_{k-1}) > h'(k-1)$ dir. $g(m_{k-1}) = h(k)$ dersek, $h(k) \geq h'(k-1) > h(k-1)$ olur ki buradan da $h(k) > h(k-1)$ yazılabilir. Böyle devam ederek, $(g(n))_{n \in N}$ dizisinin kesin artan bir $(h(k))=(g(m_{k-1}))$ alt dizisini elde ederiz.

Her bir $m \in N$ için, $L_{h(m)}$ e karşılık, $s(m) > h(m)$ olmak üzere $L_{h(m)}$ üzerinde sınırsız olan bir $T_{s(m)}$ vardır. $T_{s(m)}$ in bir alt dizisine geçerek $T_{s(m+1)}$ in $L_{s(m)}$ üzerinde sınırsız olduğunu kabul edebiliriz. $T_{s(m)}$ in $L_{s(m)}$ üzerindeki sınırına $H_{s(m)}$ diyelim. Her $\mu \in N$ için,

$$\alpha_{s(\mu)} = 2^{-\mu}(1+H_{s(1)}+H_{s(2)}+\dots+H_{s(\mu)})^{-1}$$

ile tanımlanan $(\alpha_{s(\mu)})_{\mu \in N}$ dizisini göz önüne alalım. Bu takdirde, her $m \in N$ için,

$$(1) \quad H_{s(m+1)} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \alpha_{s(\mu)} < 1$$

olur. $\|x_{s(1)}\| \leq 1$ özelliğine sahip bir $x_{s(1)} \in L_{s(1)}$ alalım. $T_{s(3)}$, $L_{s(2)}$ üzerinde sınırsız olduğundan,

$$\alpha_{s(2)} \| T_{s(3)}(x_{s(2)})\| \quad 3+ \alpha_{s(1)} \|T_{s(3)}(x_{s(1)})\|$$

olacak şekilde $\| x_{s(2)}\| \leq 1$ özelliğine sahip bir $x_{s(2)} \in L_{s(2)}$ bulabiliriz. Ardışık olarak devam edersek, $m \geq 2$ için,

$$(2) \quad \alpha_{s(m)}\|T_{s(m+1)}(x_{s(m)})\| > m+1+ \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{s(i)} \|T_{s(m+1)}(x_{s(i)})\|$$

olacak biçimde $\|x_{s(m)}\| \leq 1$ özelliğine sahip bir $x_{s(m)} \in L_{s(m)}$ bulabiliriz.

$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{s(i)} x_{s(i)}$ diyelim. $(\alpha_{s(i)})_{i \in N}$ dizisinin seçilişinden dolayı $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{s(i)} x_{s(i)}$ serisi mutlak yakınsak olur. X tam uzay olduğundan, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{s(i)} x_{s(i)}$ serisi yakınsak olur ve dolayısıyla $x \in X$ dir.

(3) $T_{s(m+1)}(x) = \alpha_{s(m)} T_{s(m+1)}(x_{s(m)}) + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{s(i)} T_{s(m+1)}(x_{s(i)}) + T_{s(m+1)}(\sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha_{s(i)} x_{s(i)})$ eşitliğini yazalım. $\mu \geq m+1$ için $x_{s(\mu)} \in L_{s(m+1)}$ dir ve böylece, $L_{s(m+1)}$ kapalı bir lineer alt uzay olduğundan,

$$\sum_{\mu=m+1} \alpha_{s(\mu)} x_{s(\mu)} \in L_{s(m+1)} \text{ ve}$$

(4) $$\|T_{s(m+1)}(\sum_{i=m+1} \alpha_{s(i)} x_{s(i)})\| \leq H_{s(m+1)} \sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha_{s(i)} \leq 1$$

dir. (1),(2), (3) ve (4) bağıntılarından, $(T_{s(m)})_{m \in N}$ in sınırsız olduğunu elde etmek zor değildir. Böylece $(T_d(x))_{d \in D}$ ağının sınırsız olduğu elde edilir. Bu çelişki teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 2.5. X bir Banach uzayı ve $(D, \leq)$ de sonlu başlangıç parçalarına sahip yönlendirilmiş bir cümle olmak üzere her $d, d' \in D$ için $d < d'$ olduğunda $L_d \subset L_{d'}$ olacak şekilde X in kapalı lineer alt uzaylarının bir ağı $(L_d)_{d \in D}$ olsun. Her bir $d \in D$ için S_d, T_d ve T'_d X den X e lineer dönüşümler olmak üzere T'_d sınırlı, S_d, L_d nin dışında sıfır olsun, $T_d = S_d + T'_d$ eşitliği sağlansın ve her $x \in X$ için $(T_d(x))_{d \in D}$ ağı sınırlı olsun. Bu takdirde T_d ler birim yuvarın L_{d_0} tarafından kapsanmayan kısmı üzerinde sınırlı olacak şekilde bir $d_0 \in D$ vardır.

İspat: $U = \{x : \|x\| \leq 1\}$ olsun. Sonucun gerçeklenmediğini varsayalım. Yani bütün T_d ler $U \sim L_{d_0}$ üzerinde sınırlı olacak şekilde hiç bir d_0 bulunmasın. Bu takdirde her $d \in D$ için $d \leq d'$ olmak üzere $T_{d'}$, $U \sim L_d$ üzerinde sınırsız olacak şekilde d ye bağlı bir $d' \in D$ vardır. D ayrılabilir yönlendirilmiş bir cümle olduğundan, her bir m doğal sayısı için $T_{r(m)}$, $U \sim L_{r(m)}$ üzerinde sınırsız olacak biçimde $(T_d)_{d \in D}$ nin bir $(T_{r(n)})_{n \in N}$ altağını bulabiliriz. Şimdi her $m \in N$ için

$$H_{r(m)} = \| T'_{r(m)} \|$$

diyelim ve her μ doğal sayısı için

$$\alpha_{r(\mu)} = 2^{-\mu}(1+H_{r(1)}+H_{r(2)}+,,,+H_{r(\mu)})^{-1}$$

koyalım. $\alpha_{r(\mu)} x_{r(\mu)}$ den $L_{r(\mu)}$ ye olan uzaklık

$$d_\mu = d_{r(\mu)} = g(\alpha_{r(\mu)}\, x_{r(\mu)},\, L_{r(\mu)}) > 0$$

olmak üzere her m doğal sayısı için,

$$x_{r(m)} \in U \sim L_{r(m)},\ \alpha_{r(m)} \| T_{r(m+1)}(x_{r(m+1)}) \| > m+1+\sum_{\mu=1}^{m-1} \alpha_{r(\mu)} \| T_{r(m+1)} x_{r(\mu)} \|$$

ve

$$\alpha_{r(\mu)} \| x_{r(m)} \| < \min \left\{ (1/3)\, d_{r(m-1)},\ (1/9)\, d_{r(m-2)}, \ldots, (1/3^{m-1}) d_{r(1)} \right\}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde ardışık olarak $x_{r(m)}$ leri seçelim.

$$z_m = \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \alpha_{r(\mu)} \cdot x_{r(\mu)} \qquad (m \in N)$$

olmak üzere

$$g(z_m, L_{r(m+1)}) \geq d_{r(m+1)} - \sum_{\mu=m+2}^{\infty} \alpha_{r(\mu)} \| x_{r(\mu)} \|$$

$$> d_{r(m+1)} - (1/3) d_{r(m+1)} - (1/9) d_{r(m+1)} - \ldots = (1/2) d_{r(m+1)} > 0$$

olur. Bu ise $z_{r(m)} \notin L_{r(m)}$ olduğunu gösterir. Ayrıca,

$$\| T_{r(m+1)}(z_{r(m)}) \| = \| T'_{r(m+1)}(z_{r(m)}) \| \leq H_{r(m+1)} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \alpha_{r(\mu)} \leq 1$$

dir. Bundan faydalanarak ve (3) eşitliğini kullanarak ispatı tamalamak kolaydır.

Teorem 2.4 ve Teorem 2.5, T_m lerin bir X Banach uzayından m e bağlı X_m Banach uzayları içine olması halinde de doğrudur.

3- REGÜLERLİK, L-REGÜLERLİK VE KONSERVATİFLİK

Bu çalışmada aldığımız yönlendirilmiş cümle tanımında tam sıralı olma özelliğinin bulunmasından dolayı, normlu bir X uzayının ağsal tam olmasının (D den X e her Cauchy ağı yakınsak ise X e ağsal tam diyoruz) Banach uzayı olmasına denk olduğuna dikkat ediyoruz.

Bundan sonra X normlu bir uzay olmak üzere, X deki bütün yakınsak dizilerin uzayını $c(X)$ ile bütün sıfır dizilerinin uzayını $c_0(X)$ ile göstereceğiz. Bu uzayların,

$$\| f \| = \sup_{d \in D} \|f(d)\|$$

ile normlu uzay oldukları ve X in tam olması halinde bu alt uzayların da tam olduklarını göstermek zor değildir.

X ve Y normlu uzaylar olmak üzere, X den Y ye bütün lineer dönüşümlerin cümlesini $L(X,Y)$ ile bütün sınırlı lineer dönüşümlerin cümlesini $B(X,Y)$ ile göstereceğiz. Y=X özel halinde ise $L(X,X)$ yerine $L(X)$ ve $B(X,X)$ yazacağız. Ayrıca bundan sonra D ile sonsuz elemanlı sonlu başlangıç parçalarına sahip yönlendirilmiş bir cümleyi göstereceğiz. Eğer $e' \leq e$ için $A(e') \in L(X)$ ise,

$$\sum_{e' \leq e} A(e')(f(e')) = A_e(f)$$

toplamı $c(X)$ den X e bir lineer dönüşümdür ve $A(e')$ ler sınırlı ise bu da sınırlı lineer dönüşümdür ve bu dönüşümün normunun $B = \{ x \in X : \|x\| \leq 1 \}$ olmak üzere

$$\|A_e\| = \|(A(e'))_{e' \leq e}\| = \sup_{f(e') \in B} \Big\| \sum_{e' \leq e} A(e')(f(e')) \Big\|$$

olduğu görülebilir.

Eğer $\lim_e \sum_{e' \leq e} A(e')f(e') = A(f)$ ise, A nın normu,

$$\|A\| = \sup_e \Big\| \sup_{f(e') \in B} \Big\| \sum_{e' \leq e} A(e')f(e') \Big\|$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1. X tam normlu bir uzay ve DXD den $L(X)$ içine bir A fonksiyonu verilsin. $c(X)$ in her $f = (f(e'))$ elemanı için,

$$\text{(i)}\quad h_{(e)} = \sum_{e' \leq e} A(d,e')f(e')$$

ağı X de yakınsak ve D nin her d elemanı için,

$$\text{(ii)}\quad A(f)(d) = \lim_e h_{(e)}$$

şekilde tanımlanan $(A(f)(d))_{d \in D}$ ağıda X de $\lim_{e'} f(e')$ limitine yakınsı - yorsa DXD-A matrisine regülerdir denir.

Teorem 3.2.X tam normlu bir uzay olmak üzere bir DXD-A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşullar;

$$\text{(iii) Her } d \in D \text{ için } \|(A(d,e'))_{e' \geq e_0}\| \leq K < \infty$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı ve bir $e_0 \in D$ vardır.

(iv) $f \in c(X)$ ve $d \in D$ ise,

$$h_{(e)} = \sum_{e' \leq e} A(d,e')\, f(e')$$

şeklinde tanımlanan $(h_{(e)})$ ağı X de yakınsaktır.

(v) $f \in c_0(X)$ ve $d \in D$ ise, $d_0 \in D$ için,

$$g(d_0) = \sum_{e' \leq d} A(d_0, e')\, f(e')$$

ile tanımlanan ağ X de sıfıra yakınsar,

(vi) Eğer $x \in X$ ise, $d \in D$ için,

$$k(d) = \lim \sum_{e' \leq e} A(d,e')\, x$$

ile tanımlanan ağ x noktasına yakınsar.

İspat: DxD-A matrisinin regüler olduğunu varsayalım. Önce (3) ün gerekliliği- ni gösterelim. Her bir $f = (f(e'))_{e' \in D} \in c(X)$ için,

$$A(d)(f) = \lim_e \sum_{e' \leq e} A(d,e')f(e')$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanırsa, c(x) in kapalı bir $L_{g(d)}$ lineer altuza- yının varlığı elde edilir. Yani A(d) nin sınırlı olduğu

$$L_{g(d)} = \{ f = (f(e'))_{e' \in D} : \ f \in c(x),\ e' \leq g(d) \ \text{için} \ f(e') = 0 \}$$

cümlesi vardır. Gerçekten; her $f \in c(x)$ için $A(d)(f)$ tanımlı ise, her $f \in c(x)$ için $(A(d,e')\ f(e'))_{e' \in D}$ ağı sınırlıdır. Lemma 2.2 den D ayrılabilir yönlendirilmiş cümledir ve dolayısıyle, Lemma 2.3 den dolayı, $e' > g(d)$ olduğunda $A(d,e')$ sınırlı olacak şekilde en az bir $g(d) \in D$ vardır. Bu takdirde, $L_{g(d)}$ üzerinde,

$$A(d)(f)=\lim_e \sum_{e' \leq e} A(d,e')\ f(e')=\lim_e \sum_{g(d)<e' \leq e} A(d,e')f(e')$$

olur. D sonlu başlangıç parçalarına sahip olduğundan her bir

$$\sum_{g(d)< e' \leq e} A(d,e')$$

dönüşümü lineer ve sınırlıdır ve dolayısıyle $A(d)$ dönüşümü $L_{g(d)}$ üzerinde sınırlı ve lineerdir. Her bir $L_{g(d)}$ lineer alt uzayların kapalı olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece Teorem 2.4 ün hipotezleri gerçeklenmiş olur. Teorem 2.4 den, her $d \in D$ için,

$$\sup_{\substack{f \in L_{e_0} \\ ||f|| \leq 1}} ||A(d)(f)|| = \sup_{f \in L_{e_0},\ ||f|| \leq 1} \Big\|\lim_e \sum_{e' \leq e} A(d,e')f(e')\Big\|$$

$$=\sup_{||f(e')|| \leq 1} \Big\| \lim_e \sum_{e_0 < e' \leq e} A(d,e')\Big\| = ||(A(d,e'))_{e' \geq e_0}|| \leq K < \infty$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısının ve bir $e_0 \in D$ nin varlığı elde edilir. (iii) in gerekliliği elde edilmiş oldu. Diğer koşulların gerekliliği [2] dekine benzer şekilde yapılabilir.

Yeterliliğin ispatını ise 1 deki Teorem 2 yi kullanarak elde edebiliriz. Şimdi X ve Y normlu uzaylar ve $L \in B(X,Y)$ olsun. Uzayların farklı olması halinde aşağıdaki iki teoremi veriyoruz.

Teorem 3.3. X ve Y tam normlu uzaylar olmak üzere, X den Y ye bir DXD-A matrisinin L-regüler olması için gerek ve yeter koşullar:

(vi) Her $d \in D$ için $||(A(d,e'))_{e' \geq e_0}|| \leq K < \infty$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı ve bir $e_0 \in D$ vardır.

(vii) $f \in c(X)$ ve $d \in D$ ise,

$$h_{(e)} = \sum_{e' \leq e} A(d,e')f(e')$$

şeklinde tanımlanan $(h_{(e)})$ ağı Y de yakınsaktır.

(viii) $f \in c_0(X)$ ve $d \in D$ ise, $e \in D$ için,

$$g(e) = \sum_{e' \leq d} A(e,e')f(e')$$

ile tanımlanan ağ Y de sıfıra yakınsar.

(ix) Eğer $x \in X$ ise, $d \in D$ için

$$k(d) = \lim_e \sum_{e' \leq e} A(d,e')x$$

ile tanımlanan ağ Y de $L(x)$ e yakınsar.

Teorem 3.4. X ve Y tam normlu uzaylar olmak üzere X den Y ye bir DXD-A matrisinin konservatif olması için gerek ve yeter koşul Teorem 3.3 ün (vi) ve (vii) koşullarının sağlanması ve aşağıdaki iki koşulun gerçeklenmesidir.

(x) $f \in c_0(X)$ ve $d \in D$ ise, $e \in D$ için,

$$g(e) = \sum_{e' \leq d} A(e,e')f(e')$$

şeklinde tanımlanan ağ Y de yakınsaktır.

(xi) Her $x \in X$ için, $d \in D$ için,

$$k(d) = \lim_e \sum_{e' \leq e} A(d,e')x$$

ile tanımlanan ağ Y de yakınsaktır.

Bu çalışmadaki lemma ve teoremlerde özel olarak D=N alınırsa [2] deki teoremler elde edilir.

Lineer dönüşümler sürekli olarak alınır ve D=N konursa Teorem 3.2, [3] deki Teorem 4 i verir, ek olarak X=C kompleks sayılar cümlesi olarak alınırsa, Teorem 3.4, meşhur Silverman-Toeplitz teoremini, Teorem 3.4 ise konservatiflik teoremini verecektir.

KAYNAKLAR

1- Cox, R ".. and Powel, R.E.: Regularity of Net Summability Transforms on Certain Lineer Topological Spaces, Proc, Amer Math.Soc 21 471-476 (1969)

2- Lorentz, G.G. and Macphail, M.S: Unbounded Operators and a Theorem of A. Robinson, Trans.Roy.Soc. Canada Sect. III (3) 46,33-37 (1952)

3- Robinson, A: On Functional Transformations and Summability, Proc. London Math. Soc. (second series) 52,132-160 (1950)

4- Schur, I.: Über lineere Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, J.f. reine u, angew. Math., 151, 79-111, (1921).

5- Toeplitz, O: Über allegemeine lineare Mittelbildungen, Prace mat.fiz., 22, (1911)