Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi
1, 313-319, (1985)

SONSUZ SERİLERİN MUTLAK TOPLANABİLME ÇARPANLARI

Veli KILIÇ

E.Ü. Personel Dairesi Başkanlığı

ÖZET

Bu çalışmada $|\bar{N},p_n|_k$ ve $|\bar{N},q_n|_k$ toplama metodları arasındaki bir ilişki elde edilmiştir.

ABSOLUTE SUMMABILITY FACTORS OF INFINITE SERIES

SUMMARY

In this study we have obtained a relation between the $|\bar{N},p_n|_k$ and $|\bar{N},q_n|_k$ summability methods.

1- GİRİŞ

Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir an sonsuz serisi verilmiş olsun. Ayrıca (p_n)

$$P_n = \sum_{v=0}^{n} p_v \to \infty, \; n \to \infty , \quad (P_{-1} = p_{-1} = 0) \tag{1}$$

olacak şekilde pozitif reel sabitlerin bir dizisi olsun.

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_v \, s_v , \tag{2}$$

yazalım. Eğer $\lim_{n\to\infty} T_n = s$ ise,bu takdirde $\sum a_n$ serisi s değerine $(\bar{N},p_n)$ toplanabilirdir denir (Bak.[7]). Diğer taraftan eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |T_n - T_{n-1}| < \infty \tag{3}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|\bar{N},p_n|$ toplanabilirdir denir (Bak. [6]). Şimdi $k \geq 1$ olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} \left|T_n - T_{n-1}\right|^k < \infty \tag{4}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|\bar{N},p_n|_k$ toplanabilirdir denir (Bak. [1] , [3], [4])

Ayrıca $k \geq 1$ ve $\gamma \geq 0$ olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{P_n}{p_n}\right\}^{\gamma k+k-1} \left|T_n - T_{n-1}\right| < \infty \tag{5}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|\bar{N},p_n;\gamma|_k$ toplanabilirdir denir (Bak. [5]).

2- AMAÇ

Bu çalışmanın esas amacı Bor'un [2] deki ispatladığı teoremin daha kısa bir ispatını vermektedir. Burada şu teoremi ispatlayacağız.

TEOREM. (p_n) ve (q_n) aşağıdaki şartları sağlayan iki pozitif dizi olsunlar.

$$\text{(i)} \quad \frac{p_n}{P_n} = 0\left(\frac{q_n}{Q_n}\right), \quad \text{(ii)} \quad \frac{q_n P_n \lambda_n}{p_n Q_n} = 0(1), \quad \text{(iii)} \quad P_n \Delta\lambda_n = 0(p_n) \tag{6}$$

Eğer $\sum a_n$ serisi $|\bar{N},p_n|_k$ toplanabiliyorsa, bu takdirde $\sum a_n\lambda_n$ serisi $|\bar{N},q_n|_k$ toplanabilirdir. Burada $k \geq 1$ dir.

İSPAT. $\sum a_n$ serisinin $(\bar{N},p_n)$ ortalamasını (t_n) ile gösterelim. Bu takdirde,

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_v s_v = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} (P_n - P_{v-1}) a_v \tag{7}$$

$\sum a_n$ serisinin $|\bar{N},p_n|_k$ toplanabilir olması demek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} \left|\Delta t_{n-1}\right|^k < \infty \tag{8}$$

olmasıdır. Diğer taraftan

$$\Delta t_{n-1} = -\frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} a_v, \quad n \geq 1 \tag{9}$$

den dolayı

$$P_{n-1}\, a_n = -\frac{P_n P_{n-1}}{p_n} \Delta t_{n-1} + \frac{P_{n-1} P_{n-2}}{p_{n-2}} \Delta t_{n-2} \tag{10}$$

dır. Yani

$$a_n = -\frac{P_n}{p_n} \Delta t_{n-1} + \frac{P_{n-2}}{p_{n-1}} \Delta t_{n-2} \tag{11}$$

Eğer $\sum a_n$ nin serisinin $(\bar{N}, q_n)$ ortalamasını (T_n) ile gösterirsek (7) ye benzer şekilde

$$T_n = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^{n} q_v \sum_{r=1}^{v} a_r \lambda_r = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^{n} (Q_n - Q_{v-1}) a_v \lambda_v \tag{12}$$

Buradan

$$\Delta T_{n-1} = -\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} Q_{v-1}\, a_v\, \lambda_v, \qquad n \geq 1 \tag{13}$$

yazabiliriz.

Şimdi (13) deki a_v yerine (11) deki değerini koyalım.

$$\Delta T_{n-1} = -\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} Q_{v-1} \lambda_v \left\{ -\frac{P_v}{p_v} \Delta t_{v-1} + \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}} \Delta t_{v-2} \right\}$$

$$= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} \frac{P_v}{p_v} Q_{v-1} \lambda_v \Delta t_{v-1} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}} Q_{v-1} \lambda_v \Delta t_{v-2}$$

$$= \frac{q_n P_n \lambda_n}{p_n Q_n} \Delta t_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\Delta t_{v-1}}{p_v} \left\{ P_v Q_{v-1} \lambda_v - P_{v-1} Q_v \lambda_{v+1} \right\}$$

Diğer taraftan

$$P_v Q_{v-1}\lambda_v - P_{v-1}Q_v\lambda_{v+1} = -q_v\lambda_v P_v + Q_v P_v \Delta\lambda_v + Q_v p_v \lambda_{v+1}$$

olduğundan

$$\Delta T_{n-1} = \frac{q_n P_n \lambda_n}{p_n Q_n} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} q_v \lambda_v \Delta t_{v-1}$$

$$+ \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} Q_v \Delta\lambda_v \Delta t_{v-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_v \lambda_{v+1} \Delta t_{v-1}$$

$$= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4}, \quad \text{diyelim} \tag{14}$$

Teoremi ispat etmek için, Minkowski eşitsizliğinden dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} \left|T_{n,r}\right|^k < \infty \,, \qquad r = 1,2,3,4 \tag{15}$$

olduğunu göstermek yeter. Bunun içinde $T_{n,1}$, $T_{n,2}$, $T_{n,3}$ ve $T_{n,4}$ ü ayrı ayrı ele almamız gerekir. Burada (6.i) ve (6.ii) den dolayı λ_n nin sınırlı olduğuna dikkat edilmelidir.

Şimdi ilk olarak $T_{n,1}$ i ele alalım.

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} \left|T_{n,1}\right|^k = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^k \frac{q_n}{Q_n} |\lambda_n| \, |\lambda_n|^{k-1} \, |\Delta t_{n-1}|^k$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^k |\lambda_n| \frac{q_n}{Q_n} |\Delta t_{n-1}|^k ,$$

(6.ii) den dolayı $\dfrac{q_n}{Q_n} |\lambda_n| = O\left(\dfrac{p_n}{P_n}\right)$ olduğundan

Şu halde (8) den dolayı

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} \left|T_{n,1}\right|^{k} = O(1) \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} \left|\Delta t_{n-1}\right|^{k} = O(1) \quad \to \infty$$

Şimdi $T_{n,2}$ yi ele alalım ve Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} \left|T_{n,2}\right|^{k} \leqslant$$

$$\sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{k} |\lambda v|^{k} q_v |\Delta t_{v-1}|^{k} \times \left\{\frac{1}{Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} q_v\right\}^{k-1}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{k} q_v |\lambda_v| \, |\lambda_v|^{k-1} |\Delta t_{v-1}|^{k} \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{k} \frac{q_v}{Q_v} |\lambda_v| \, |\Delta t_{v-1}|^{k}$$

Yine burada (6.ii) yi ve (8) i göz önüne alırsak $T_{n,1}$ de olduğu gibi

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} |T_{n,2}|^{k} = O(1) \sum_{v=1}^{m} \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{k-1} |\Delta t_{v-1}|^{k} = O(1), \; m \to \infty$$

elde edilir.

$T_{n,3}$ için (6.iii) den dolayı $P_v \Delta\lambda_v = O(p_v)$ olduğunu göz önüne alırsak

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}|T_{n,3}|^k = O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\left\{\frac{Q_v}{q_v}\right\}^k q_v|\Delta t_{v-1}|^k \times \left\{\frac{1}{Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}q_v\right\}^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{Q_v}{q_v}\right)^{k-1}|\Delta t_{v-1}|^k$$

elde ederiz. (6.i) den dolayı $\frac{Q_v}{q_v} = O\left(\frac{P_v}{p_v}\right)$ olduğundan

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}|T_{n,3}|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{k-1}|\Delta t_{v-1}|^k = O(1),\ m\to\infty$$

bulunur.

Son olarak $T_{n,4}$ için diğerlerine benzer şekilde

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}|T_{n,4}|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{k-1}|\Delta t_{v-1}|^k = O(1),\ m\to\infty$$

elde edebiliriz. O halde biz

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}|T_{n,r}|^k = O(1),\ m\to\infty \quad,\quad r=1,2,3,4$$

olduğunu göstermiş olduk. Bu da teoremin ispatını tamamlar

KAYNAKLAR

1- H.Bor, On $|\bar{N},p_n|_k$ summability factors of infinite series, J.Univ. Kuwait Sci. (10)(1983), 37-42

2- H.Bor, On $|\bar{N},p_n|_k$ summability factors of infinite series, Tamkang Journal of Math., 16.1 (1985), 13-20

3- H.Bor, On two summability methods, Math.Proc.Camb.,Phil.,Soc.,97 (1985), 147-149

4- H.Bor, On $|\bar{N},p_n|_k$ summability factors, Proc.Amer. Math. Soc., 94 (1985), 419-422

5- H.Bor, A note on $|\bar{N},q_n|_k$ summability factors, Pure and Applied Mathematika Sciences. Vol.24 (Baskıda).

6- E.C. Daniel, On $|\bar{N},p_n|$ summability of infinite series, Math.Univ. Jabalpur, 2 (1966), 39-48

7- G.H.Hardy, Divergent Series, Oxford (1973).