Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi
1, 331-337, (1985)

SÜREKLİ FONKSİYONLARIN NÖRLUND ORTALAMASI YARDIMI İLE YAKLAŞIM DERECESİ

Hüseyin ALTINDİŞ

E.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, KAYSERİ

ÖZET

Bu çalışmada Lip α sınıfına ait periyodik fonksiyonların Nörlund ortalaması yardımı ile yaklaşım dereceleri incelenmiştir. f, 2π periyodlu Lebesque anlamında integrallenebilen bir fonksiyon, bunun fourier serisi de

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_o + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \operatorname{Cos} kx + b_k \operatorname{Sin} kx) \quad \text{olsun.}$$

(p_n), $P_n = p_o + p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n \to \infty$, $n \to \infty$ şartını sağlayan pozitif sabitlerin bir dizisi olsun.

$$T_n(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} s_k$$ ifadesi Fourier serisinin (N, p_n) ortalamasıdır. Lip α sınıfına ait 2π periyodlu periyodik f fonksiyonun yaklaşım derecesi

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \left| f(x) - T_n(x) \right| = 0 \left[\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{1+\alpha}} \right]$$

ile verilir.

ON THE DEGREE OF APPROXIMATION OF CONTINUOUS FUCTIONS BY NÖRLUND MEANS

SUMMARY

In this work the degree of approximation of certain functions belonging to the class Lip α by nörlund means have been determined. Let f be a periodic function with period 2π and integrable in the Lebengue sense. Let it's fourier series be given by

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_o + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \operatorname{Cos} kx + b_k \operatorname{Sin} kx)$$

Let (p_n) be a sequence of positive constants such that

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n \to \infty \quad , \quad n \to \infty$$

$$T_n(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} S_k$$ are the (N, p_n) means of the fourier series.

The degree of approximation of a periodic function f with period 2 and belonging to the class of Lip is given by

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} | f(x) - T_n(x) | = O\left[\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{1+\alpha}} \right]$$

1- GİRİŞ

Periyodik fonksiyonların yaklaşım dereceleri çeşitli araştırmacılar tarafından değişik yönleri ile incelenmiştir. İlk olarak G. Alexist [1] periyodik bir f fonksiyonunun fourier serisinin (C,δ) ortalaması yardımı ile yaklaşım derecesini incelemiştir. Daha sonra Sahney ve Goel [2] N, p_n ortalaması yardımı ile Chandra [3], (R, p_n) ortalaması yardımı ile periyodik fonksiyonların yaklaşım derecelerini incelemişlerdir.

Bu çalışmada (N, p_n) ortalaması yardımı ile 2π periyodlu Lebegue anlamında integrallenebilen Lip α sınıfına ait periyodik fonksiyonların yaklaşım dereceleri üzerinde durulmuştur. Böyle bir fonksiyonun

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \operatorname{Cos} kx + b_k \operatorname{Sin} kx)$$ şeklinde fourier

serisi teşkil edilmiş ve yaklaşım derecesinin

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} | f(x) - T_n(x) | = O\left[\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{1+\alpha}} \right]$$ olduğu

bir teoremle ispatlanmıştır.

2- TANIM VE LEMMALAR

Bu kısımda çalışmamızda geçen bazı tanım ve Lemmaları vereceğiz.

2.1- Tanım: Kısmî taplamlar dizisi (S_n) olan $\sum a_n$ sonsuz serisi verilmiş olsun. (p_n), $P_n = p_0 + p_1 + \cdots\cdots p_n \to \infty$, $n \to \infty$, olacak şekilde pozitif reel sabitlerin bir dizisini göstermek üzere $\sum a_n$ serisinin (N, p_n) ortalamasını

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} S_k$$

ile gösterelim.

Eğer $\lim\limits_{n \to \infty} T_n = S$ ise, $\sum a_n$ serisi veya bunun kısmî toplamlar dizisi olan (S_n), S değerine (N, p_n) toplanabilirdir denir [2] .

2.2- Tanım: $0 < \alpha \leqslant 1$ için $f(x + t) - f(x) = 0\,(|t|^{\alpha})$ ise f fonksiyonuna Lipα sınıfına aittir denir ve $f \in$ Lipα şeklinde gösterilir [3].

2.3- Lemma: (p_n) pozitif ve artmayan bir dizi ise $\alpha > 0$ için

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{1+\alpha}}$$

dır [2].

2.4-Lemma: (p_n) pozitif ve artmayan bir dizi $0 \leqslant t \leqslant \pi$ ve herhangi bir n,a,b için

$$\left| \sum_{k=a}^{b} p_k\, e^{i(n-k)t} \right| < A\, P_{\tau}$$

Burada A bir sabit ve $\tau = \left[\frac{\pi}{t}\right]$ dir [4].

3.TEOREM: Lip α sınıfına ait 2π periyodlu periyodik f fonksiyonunun yaklaşım derecesi

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} | f(x) - T_n(x) | = 0 \left[\frac{1}{P_k} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{1+\alpha}} \right]$$

olarak verilir [2].

Burada $T_n(x)$ Fourier serisinin (N, p_n) ortalaması ve (p_n) pozitif reel sabitlerin bir dizisidir.

ISPAT:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \text{ Coskx} + b_k \text{ Sinkx}) \tag{3.1}$$

serisinin kısmi toplamler dizisinin genel terimi $S_n(x)$ olsun.

$$S_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \text{ Coskx} + b_k \text{ Sinkx}) \tag{3.2}$$

Burada

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u)\,du, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \text{ Cosku}\,du, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \text{ Sinku}\,du$$

değerleri yerine yazılır ve gerekli düzenleme yapılırsa

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \text{Cosk}\,(u-x) \right\} f(u)\,du \text{ olur.}$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \text{Cosk}\,(u-x) = \frac{\text{Sin}(n + \frac{1}{2})(u-x)}{2\text{Sin}\,\frac{1}{2}(u-x)}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Sin}(n+\frac{1}{2})(u-x)}{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(u-x)} f(u)\,du$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\mathrm{Sin}\,(n+\frac{1}{2})\,t}{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,t} [f(x+t) + f(x-t)]\;dt$$

2.1- Tanımdan dolayı

$$T_n(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\; Sk$$

$$T_n(x) - f(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, Sk - f(x)$$

$$= \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, (Sk - f(x))$$

$$= \frac{1}{\pi P_n} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \right] \right\} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \frac{\mathrm{Sin}(k+\frac{1}{2})t}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,t}\,dt$$

olur.

Ayrıca

$$\frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\right] = \emptyset(t) \quad \text{diyelim.}$$

$$\left| f(x) - T_n(x) \right| \leqslant \frac{1}{\pi P_n} \int_0^{\pi/n} \frac{|\emptyset(t)|}{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}\,t} \left| \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, \mathrm{Sin}(k+\frac{1}{2})\,t \right| dt$$

$$+ \frac{1}{\pi P_n} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{|\emptyset\,(t)|}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}t} \left| \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, \mathrm{Sinkt} \right| dt$$

$$+ \frac{1}{\pi P_n} \int_{\pi/n}^{\pi} \left| \emptyset(t) \right| \left| \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \, \mathrm{Coskt} \right| dt \text{ olur.}$$

$$\left| f(x) - T_n(x) \right| \leqslant I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi P_n} \int_{0}^{\pi/n} \frac{|\emptyset(t)|}{\mathrm{Sin}\frac{1}{2} t} \left| \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \, \mathrm{Sin}(k + \frac{1}{2}) \, t \right| dt$$

$$\max I_1 \leqslant K \int_{0}^{\pi/n} \frac{t^{\alpha}}{t} \, dt \qquad (K \ \text{sbt})$$

$$= 0 \left[\frac{1}{n^{\alpha}} \right]$$

Burada 2.3 lemma gözönüne alınırsa

$$I_1 = 0 \left[\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{1+\alpha}} \right] \tag{3.3}$$

elde edilir.

$$I_2 = \frac{1}{\pi P_n} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{|\emptyset(t)|}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2} t} \left| \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \, \mathrm{Sinkt} \right| dt$$

2.4 Lemma gözönüne alınırsa

$$\max I_2 \leqslant \frac{C}{P_n} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{t^{\alpha}}{t} \, p_{\tau} \, dt \qquad (C \ \text{sbt})$$

$$= 0\left[\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{P_u}{u^{1+\alpha}}\,du\right]$$

$$I_2 = 0\left[\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{u^{1+\alpha}}\right] \tag{3.4}$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi P_n}\int_{\pi/n}^{\pi}\left|\emptyset(t)\right|\left|\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\,\mathrm{Coskt}\right| dt$$

$$I_3 = 0\left[\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{k^{1+\alpha}}\right] \tag{3.5}$$

I- SONUÇ

(3.3), (3.4) ve (3.5) Birlikte düşünülürse

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}\left|f(x) - T_n(x)\right| = 0\left[\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{k^{1+\alpha}}\right]$$

Bulunurki bu da teoremin ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR

1- G.Alexist, "Convergence problems of ortogonal series" Pergamon Press. London (1961).

2- B.N. Sahney and D.S. Goel "On the degree of Approximation of Continuons Functions" Ranchi Univ. Math.Jour Vol.4 50-53 (1973).

3- P.Chandra "On the degree of Approximation of functions belonging to the Lipschitz class" Nanta Math.8, 88-91 (1975).

4- L.Mc.Fadden "Absolute Nörlund summability" Duke Math. J.9 168-207 (1942).