Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi
1, 339-348, (1985)

PERİYODİK FONKSİYONLARIN RIESZ ORTALAMASI YARDIMI İLE YAKLAŞIM DERECELERİ

İlhan ÖZTÜRK

E.Ü. Meslek Yüksek Okulu, KAYSERİ

ÖZET

Bu çalışmada Lip α $(0 < \alpha \leq 1)$ sınıfına ait periyodik bir fonksiyonun (R,p_n)-ortalaması yardımı ile yaklaşım derecesi incelenmiştir.

f, 2π periyodlu, periyodik ve Lebesgue anlamında integrallenebilen bir fonksiyon ve bunun Fourier serisi de $f(x) \sim \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sin} nx)$ olarak verilsin. Ayrıca $\{p_n\}$ dizisi, $p_o > 0$ ve $P_n = p_o + p_1 + \cdots + p_n \to \infty$, $(n \to \infty$ için$)$ olmak üzere, negatif olmayan sabitlerin bir dizisi olsun. Bu takdirde $t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=o}^{n} p_k s_k$ ifadesine, $\{s_n\}$ dizisinin Riesz ortalaması veya kısaca (R,p_n)-ortalaması denir.

Lip α $(0 < \alpha \leq 1)$ sınıfına ait periyodik bir f fonksiyonunun (R,p_n)-ortalaması yardımı ile yaklaşım derecesi

$$\max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| f(x) - t_n(x) \right| = \begin{cases} O\left\{ \left(\dfrac{p_n}{P_n} \right)^{\alpha} \right\} & ; 0 < \alpha < 1 \\[2ex] O\left\{ \dfrac{p_n}{P_n} \operatorname{Log} \dfrac{P_n}{p_n} \right\} ; & \alpha = 1 \end{cases}$$

şeklinde verilir.

THE DEGREE OF APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS BY RIESZ MEANS

SUMMARY

In this work, the degree of approximation of functions belonging to the class Lip α $(0 < \alpha \leq 1)$ by Riesz means have been determined.

Let f be a periodic function, with period 2π and integrable in the sense of Lebesgue. The Fourier series associated with f at the point x is $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sin} nx)$.

Let $\{p_n\}$ be a sequence of non-negative constants, such that $p_0 > 0$, and $P_n = p_0 + p_1 + \ldots\ldots + p_n \to \infty$, $(n \to \infty)$, $t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k$ are called the (R, p_n)-means of the sequence $\{s_n\}$.

The degree of approximation of a periodic function f belonging to the class of Lip α, by (R,p_n)-means of Fourier series is given by,

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \left| f(x) - t_n(x) \right| = \begin{cases} 0\left\{\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}\right\}; & 0 < \alpha < 1 \\ 0\left\{\frac{p_n}{P_n} \operatorname{Log} \frac{P_n}{p_n}\right\}; & \alpha = 1 \end{cases}$$

SEMBOLLER

$\{P_n\}$: P_n dizisi

Lip α : Lipschitz sınıfı

(R,p_n)-ortalaması : Riesz ortalaması

$\sum a_n$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi

$f=0(\varphi)$: $f(n)$ ve $\varphi(n)$, n nin yeteri derecede büyük değerleri için tanımlı ve K pozitif sabit olmak üzere $|f| \leqslant K\varphi$ olması demektir.

$f=0(1)$: f nin sınırlı olduğunu ifade eder.

1- GİRİŞ

Periyodik fonksiyonların yaklaşım dereceleri, değişik zamanlarda bir çok yönleri ile incelenmiştir. Biz bu çalışmamızda Lip α sınıfına ait, 2π periyodlu, periyodik bir f fonksiyonunun (R,p_n)-ortalaması yardımı ile yaklaşım derecesini inceledik. Konu ile ilgili bazı tanımları, ayrıca Lip α sınıfına ait periyodik bir f fonksiyonunun (R, p_n)-ortalaması yardımı ile yaklaşım derecesini veren bir teoremin ifade ve ispatını verdik.

2- TANIMLAR

2.1-TANIM: f fonksiyonu 2π periyodlu, periyodik ve Lebesgue anlamında integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{Cos}nx + b_n \text{Sin}nx) \tag{2.1}$$

ifadesine, f fonksiyonunun x noktasındaki Fourier serisi denir [1] .

2.2-TANIM: f fonksiyonunun Fourier serisi (2.1) ifadesindeki gibi verilirse,

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u)du \tag{2.2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u)\text{Cos}nu\, du \tag{2.3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u)\text{Sin}nu\, du \tag{2.4}$$

şeklinde verilen a_0, a_n ve b_n değerlerine Fourier serisinin katsayıları denir [2] .

2.3-TANIM: $\{p_n\}$ dizisi, $p_0>0$ ve $P_n=p_0+p_1+\ldots+p_n\to\infty$, $(n\to\infty)$ olmak üzere negatif olmayan sabitlerin bir dizisi olsun.

$$t_n=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k s_k \tag{2.5}$$

yazalım. t_n ye $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olan $\{s_n\}$ dizisinin Riesz ortalaması veya kısaca (R,p_n)-ortalaması denir [1] .

2.4-TANIM: $\alpha>0$ için eğer

$$f(x+h)-f(x)=O(|h|^{\alpha})$$

ise, f fonksiyonuna Lip α sınıfına ait bir fonksiyondur denir ve $f\in \text{Lip}\,\alpha$ şeklinde gösterilir [1] .

3.TEOREM: Lip α $(0<\alpha\leq 1)$ sınıfına ait, 2π periyodlu, periyodik bir f fonksiyonunun Fourier serisinin (R,p_n)-ortalaması yardımı ile yaklaşım derecesi

$$\max_{0\leq x\leq 2\pi}|f(x)-t_n(x)|=\begin{cases} O\left\{\left(\dfrac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}\right\} & ;\ 0<\alpha<1 \text{ ise} \\[2ex] O\left\{\dfrac{p_n}{P_n}\operatorname{Log}\dfrac{P_n}{p_n}\right\} & ;\ \alpha=1 \text{ ise}\end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada (R,p_n)-ortalaması regülerdir ve $n\geq n_0$ için $p_n>0$ artandır [1] .

ISPAT: f fonksiyonunun x noktasındaki Fourier serisi

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \mathrm{Cos}nx + b_n \mathrm{Sin}nx) \tag{3.1}$$

olsun. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi $\{s_n(x)\}$ dizisi ise

$$s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \mathrm{Cos}kx + b_k \mathrm{Sin}kx) \tag{3.2}$$

yazılabilir. (2.2), (2.3) ve (2.4) eşitlikleri dikkate alınırsa

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)du + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_0^{2\pi} f(u)\,\mathrm{Cos}ku\mathrm{Cos}kx du$$

$$+ \int_0^{2\pi} f(u)\mathrm{Sin}ku\mathrm{Sin}kx du\Big)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{Cos}kx\mathrm{Cos}ku + \mathrm{Sin}kx\mathrm{Sin}ku)\Big\} f(u)du$$

dur. Böylece

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Cos}k\,(x-u)\Big\} f(u)du \tag{3.3}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Cos}ku = \frac{\mathrm{Sin}(n+\frac{1}{2})u}{2\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,u}$$

olduğundan, bu ifadeyi (3.3) eşitliğinde değerlendirirsek

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{Sin}(n+\frac{1}{2})(x-u)}{\sin\frac{1}{2}(x-u)}\,f(u)\,du \qquad (3.4)$$

eşitliğine ulaşmış oluruz. Ayrıca en son elde ettiğimiz (3.4) eşitliğinde u=x+t dönüşümü yapılırsa,

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{Sin}(n+\frac{1}{2})\,t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\,t}\,f(x+t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{Sin}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}f(x+t)dt+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\operatorname{Sin}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\,f(x+t)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{Sin}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\,f(x+t)dt+\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{Sin}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\,f(x-t)dt\right\}$$

elde edilir. Buradanda

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{f(x+t)+f(x-t)\right\}\frac{\operatorname{Sin}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\,dt \qquad (3.5)$$

eşitliğini bulmuş oluruz. $\{s_n(x)\}$ dizisinin (R,p_n)-ortalamasını $t_n(x)$ ile gösterirsek, (2,5) ifadesi gözönüne alınırsa;

$$t_n(x)=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_k s_k(x)$$

dir. Burada (3.5) ifadesini dikkate alarak

$$t_n(x)=\frac{1}{2\pi P_n}\int_0^{\pi}\left\{f(x+t)+f(x-t)\right\}\left(\sum_{k=o}^{n}p_k\frac{\operatorname{Sin}(k+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\right)dt \tag{3.6}$$

eşitliğini elde ederiz. Kabul edelimki her bir x için f(x)=1 olsun. Bu takdirde (3.1) ifadesinde verilen f(x) in Fourier serininin katsayıları $a_n=0$, $b_n=0$ ve $a_o=2$ olur. Dolayısıyle $n>0$ için $s_n=1$ dir. O halde (3.5) eşitliğini

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{Sin}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\,2dt \tag{3.7}$$

şeklinde ifade edebiliriz [2] .

Şimdi (3.6) eşitliğinin sağ tarafına

$$\frac{1}{\pi P_n}\int_0^{\pi}f(x)\left(\sum_{k=o}^{n}p_k\frac{\operatorname{Sin}(k+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\right)dt$$

ifadesini ekleyip çıkararak, $\sum_{k=o}^{n}p_k=P_n$ olduğunu dikkate alır ve (3.7) eşitliğinide gözönünde bulundurursak

$$t_n(x)=\frac{1}{2\pi P_n}\int_0^{\pi}\left\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right\}\left(\sum_{k=o}^{n}p_k\frac{\operatorname{Sin}(k+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\right)dt+f(x) \tag{3.8}$$

eşitliğini bulmuş oluruz.

$$\emptyset(t)=\frac{1}{2}\left\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right\} \tag{3.9}$$

diyelim. Böylece (3.8) ve (3.9) ifadeleri dikkate alınırsa

$$t_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi P_n}\int_0^{\pi}\emptyset(t)\left(\sum_{k=o}^{n}p_k\frac{\operatorname{Sin}(k+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\right)dt \qquad (3.10)$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan da;

$$|f(x)-t_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi P_n}\int_0^{p_n/P_n}\frac{|\emptyset(t)|}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\left|\sum_{k=o}^{n}p_k\operatorname{Sin}(k+\frac{1}{2})t\right|dt$$

$$+\frac{1}{\pi P_n}\int_{p_n/P_n}^{\pi}\frac{|\emptyset(t)|}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\left|\sum_{k=o}^{n}p_k\operatorname{Sin}(k+\frac{1}{2})t\right|dt$$

$$= I_1+I_2 \quad \text{yazabiliriz.}$$

Şimdi I_1 ve I_2 ifadelerini ayrı ayrı ele alıp inceleyelim. Önce I_1 ifadesini ele alalım. $\operatorname{Sin}(k+\frac{1}{2})t=0(1)$ olduğundan

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} I_1=0\left\{\frac{1}{P_n}\int_0^{p_n/P_n}\frac{|\emptyset(t)|}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\left|\sum_{k=o}^{n}p_k\right|dt\right\}$$

$$=0\left\{\int_0^{p_n/P_n}\frac{|\emptyset(t)|}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}dt\right\} \qquad (3.11)$$

dir. Diğer taraftan $\emptyset(t)=0(|t|^{\alpha})$ ve $\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}=0(\frac{1}{t})$ [3] olduğundan

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} I_1=0\left\{\int_0^{p_n/P_n}\frac{t^{\alpha}}{t}dt\right\}=0\left\{\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}\right\} \qquad (3.12)$$

elde etmiş oluruz.

Şimdi de I_2 ifadesini ele alalım. $\emptyset(t)=0(|t|^{\alpha})$ ve

$$\sum_{k=o}^{n} p_k \mathrm{Sin}(k+\frac{1}{2})t=0(\frac{p_n}{t}) \quad [4]$$

olduğundan, $0<\alpha<1$ için

$$\underset{0 \leq x \leq 2\pi}{\mathrm{Max}} \quad I_2=0\left\{\frac{1}{P_n}\int_{p_n/P_n}^{\pi}\frac{t^{\alpha}}{t}\cdot\frac{p_n}{t}.dt\right\} \tag{3.13}$$

$$=0\left\{\frac{p_n}{P_n}\int_{p_n/P_n}^{\pi} t^{\alpha-2}\,dt\right\}$$

$$=0\left\{\frac{p_n}{P_n}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha-1}\right\}$$

$$=0\left\{\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}\right\} \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.13) eşitliğinde $\alpha=1$ alalım. Bu takdirde

$$\underset{0 \leq x \leq 2\pi}{\mathrm{Max}} \quad I_2=0\left\{\frac{p_n}{P_n}\int_{p_n/P_n}^{\pi} t^{-1}\,dt\right\}$$

$$=0\left\{\frac{p_n}{P_n}\left(-\mathrm{Log}\,\frac{p_n}{P_n}\right)\right\}$$

$$=0\left\{\frac{p_n}{P_n}\operatorname{Log}\frac{P_n}{p_n}\right\} \tag{3.15}$$

eşitliğini elde ederiz. (3.12), (3.14) ve (3.15) ifadelerini gözönüne alırsak

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}\left|f(x)-t_n(x)\right| = \begin{cases} 0\left\{\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}\right\} & ; \quad 0<\alpha<1 \text{ ise} \\ 0\left\{\frac{p_n}{P_n}\operatorname{Log}\frac{P_n}{p_n}\right\} & ; \quad \alpha=1 \end{cases}$$

sonucunu elde etmiş oluruz ki, bu da teoremin ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR

1- Chandra,P. "On the degree of approximation of functions belonging to the Lipschitz class. "Nanta Mathematica, Vol.VIII.No.I, (1975), 88-91.

2- Titchmarsh,E.C., "The theory of functions", Oxford (1939)

3- Qureshi,K., "On the degree of approximation of functions belonging to the Lipschitz class by means of conjugate series" Indian J.Pure appl.Math.12(9),(1981), 1120-1123.

4- Qureshi,K., "Error bounds in the approximation of functions" The Mathematics Education.Vol.XIV,No,4, (1980), 66-70.