Erc. Ünv. Fen Bil. Derg. 13, 1-2, (1997) 23-36

TEK DEĞİŞKENLİ KUATERNİYON DEĞERLİ FONKSİYONLAR VE EĞİLİM ÇİZGİLERİ

Müge KARADAĞ - Ali İhsan SİVRİDAĞ
İnönü Üniv. Fen-Ed. Fak Matematik Bölümü MALATYA

ÖZET

3-boyutlu reel Öklid uzayı IR^3 deki bir eğrinin Serret-Frenet formülleri uzay-kuaterniyonları yardımıyla K.Bharathi ve M.Nagaraj tarafından yeniden türetilmiştir. Bulunan bu formüller yardımıyla IR^4 deki 1-değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonların (kuaterniyonik eğrilerin) Serret-Frenet formülleri elde edilmiştir [1]. Bu çalışmada ise yukarıda sözü edilen hesaplamalar temel alınarak IR^3 ve IR^4 deki kuaterniyonik eğriler için eğilim çizgisi ve harmonik eğrilik kavramları verilmiştir. Ayrıca, kuaterniyonik eğrilerin eğilim çizgisi olması için bir de karakterizasyon verilmiştir.

QUATERNION VALUED FUNCTIONS OF A SINGLE REAL VARIABLE AND INCLINED CURVES

SUMMARY

The Serret-Frenet formulae for a quaternion valued function of a single real variable (quaternionic curves) in IR^3 and IR^4 is rederived by K.Bharathi and M.Nagaraj. In this paper we define quaternionic inclined

curves and harmonic curvatures for the quaternionic curves. And we give a characterisation for a quaternionic curve to be a quaternionic inclined curve.

1.GİRİŞ

Önce IR^3, uzay-kuaterniyonlarının cümlesi ile özdeşlenerek IR^3 deki eğriler kuaterniyonik eğriler olarak gözönüne alınmış ve kuaterniyonlar yardımıyla Frenet formülleri yeniden elde edilmiştir. Daha sonra bu IR^4 e genelleştirilmiştir.

TANIM 1. Bir reel kuaterniyon sıralı dört sayının $+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır [2]. Burada +1 bir reel birim olup diğer üç birim ise,

1) $\vec{e}_1 x \vec{e}_1 = \vec{e}_2 x \vec{e}_2 = \vec{e}_3 x \vec{e}_3 = -\vec{e}_4, (\vec{e}_4 = +1)$

2) $\vec{e}_i x \vec{e}_j = \vec{e}_k = -\vec{e}_j x \vec{e}_i$, (ijk) (123) ün çift permütasyonudur.

özelliklerini sağlar. Böylece bir reel kuaterniyon ,

$$q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d$$

şeklindedir. Burada

$$S_q = d, \ \vec{V}_q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3, \ q = S_q + \vec{V}_q$$

olmak üzere ; S_q, q'nun skalar kısmı $\vec{V}_q$ ise vektörel kısmıdır [1]. Bundan sonra reel kuaterniyonların cümlesi Q ile gösterilecektir. İki kuaterniyonun kuaterniyon çarpımı ; $\forall p,q \in$ Q için

(1)... $$p x q = S_p S_q + S_q \vec{V}_p + S_p \vec{V}_q - \langle \vec{V}_p, \vec{V}_q \rangle + \vec{V}_p \wedge \vec{V}_q$$

şeklindedir. Burada $\langle\,,\rangle$ *ve* $\wedge$ sırasıyla , IR^3 üzerindeki skalar ve vektörel çarpımı göstermektedir.

TANIM 2. Bir $q \in Q$ kuaterniyonunun eşleniği diye

(2)... $$\alpha q = S_q - \vec{V}_q$$

şeklinde tanımlanan αq kuaterniyonuna denir [1].

TANIM 3. p, q $\in$ Q reel kuaterniyonları için ,

(3)... $$h: QxQ \rightarrow IR$$
$$(p,q) \rightarrow h\,(p,q)$$
$$h\,(p,q) = \frac{1}{2}(px\alpha q + qx\alpha p)$$

şeklinde tanımlanan h formu kuaterniyon iç çarpımı adını alır [1]. Reel değerli , simetrik , bilineer h formu iç çarpım aksiyomlarını sağlar [1]. Burada x kuaterniyon çarpımını göstermektedir.

TANIM 4. Bir $q \in Q$ kuaterniyonunun normu

(4)... $$\|q\|^2 = h\,(q,q) = qx\alpha q$$

eşitliğini sağlayan $\|q\|$ reel sayısına denir [1].

TANIM 5. Eğer $q \in Q$ kuaterniyonu için

(5)... $$q + \alpha q = 0$$

oluyorsa q'ya bir uzay-kuaterniyonu denir [1]. Uzay-kuaterniyonlarının cümlesi 3-boyutlu vektör uzayı IR^3 e izomorftur. Eğer $q \in Q$ kuaterniyonu için

$q - \alpha q = 0$

olursa q bir temporal kuaterniyon adını alır [1]. Genel olarak , bir $q \in Q$ kuaterniyonu

(6)... $$q = \frac{1}{2}(q + \alpha q) + \frac{1}{2}(q - \alpha q)$$

şeklinde yazılabilir [1].

TANIM 6. Eğer ; p, $q \in Q$ kuaterniyonları için h (p,q) = 0 oluyorsa p ile q'ya h-ortogonaldir denir [1].

Bu çalışmamız süresince reel tek değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlardan "kuaterniyonik eğri" olarak söz edeceğiz. Yani kuaterniyonik eğri ile , $I \subset IR$ açık bir aralık olmak üzere , bir

(7)... β: I→ Q

$$\beta(s) = \gamma_1(s)\vec{e}_1 + \gamma_2(s)\vec{e}_2 + \gamma_3(s)\vec{e}_3 + \gamma_4(s) \quad , \quad \gamma_i(s) \in IR, \quad 1 \leq i \leq 4$$

reel tek değişkenli , kuaterniyon değerli β dönüşümü altında I'nın β(I) resmi kastedilecektir [3].

2. KUATERNİYONİK EĞRİLERİN SERRET-FRENET FORMÜLLERİ

3-boyutlu reel Öklid uzayı IR^3 , uzay-kuaterniyonlarının cümlesi ile özdeşlenerek IR^3 deki bir eğri bir uzay-kuaterniyonik eğri olarak gözönüne alınsın. Şimdi bir uzay-kuaterniyonik eğri için Frenet formüllerini vereceğiz.

$I \subset IR$ bir açık aralık olmak üzere, birim hızlı bir (C) uzay-kuaterniyon eğrisi

(8)... $$\gamma(s)=\gamma_1(s)\vec{e}_1+\gamma_2(s)\vec{e}_2+\gamma_3(s)\vec{e}_3$$

parametrik denklemiyle verilsin. $\dot{\gamma}(s)=t$ diyelim. Eğrinin birim hızlı olma şartı;

(9)... $$\dot{t}x\alpha t+tx\alpha\dot{t}=0$$

olmasını gerektirir. Bu son eşitlik ise $\dot{t}$ nın t 'ye ortogonal olduğunu gösterir.

(10)... $$\dot{t}=kn_1 \quad ; \quad k=\|\dot{t}\|$$

diyelim. $txn_1=n_2$ dersek , bu durumda t,n_1 ve n_2 ikişer ikişer ortogonal olur. Ayrıca

(11)... $$\dot{n}_1=-kt+rn_2 \text{ ve } \dot{n}_2=-rn_1$$

olur [1]. (10) ve (11) eşitlikleri (C) eğrisinin Serret-Frenet formülleridir.

IR^4 ün her bir elemanını bir tek reel kuaterniyon ile eşleyerek IR^4 deki bir eğriyi bir kuaterniyonik eğri olarak gözönüne alacağız. Böylece, birim hızlı bir (C') kuaterniyonik eğrisi

$$\beta(s)=\sum_{i=1}^{4}\gamma_i(s)\vec{e}_i \quad , s\in I\subseteq IR\ ,\ \vec{e}_4=+1$$

parametrik denklemiyle verilebilir. $\dot{\beta}(s)=T$ olsun.

(12)... $$\dot{T}=KN_1 \text{ ve } K=\|\dot{T}\|$$

diyelim. $\|T\|=1$ eşitliğinden türev alarak,

(13)... $$N_1x\alpha T+Tx\alpha N_1=0$$

elde edilir ki bu da $h(T,N_1)=0$ olmasını gerektirir. Yani T , N_1 'e h-ortogonaldir.

(14)... $N_1 = t\,x\,T,\ N_2 = n_1\,x\,T,\ N_3 = n_2\,x\,T$

şeklinde tanımlansın. Burada t, n_1, n_2 vektörleri (8) ile verilen uzay-kuaterniyon eğrisinin Frenet vektörleridir. Bu durumda; T, N_1, N_2, N_3 ikişer ikişer h-ortogonaldirler [1]. Ayrıca,

(15)... $\dot{N}_1 = -K\,T + k\,N_2$

(16)... $\dot{N}_2 = -k\,N_1 + (r-K)\,N_3$

(17)... $\dot{N}_3 = -(r-K)\,N_2$

türev formülleri geçerlidir. Dolayısı ile (C') eğrisinin Serret-Frenet formüllerinin matrisel ifadesi,

(18)...

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N}_1 \\ \dot{N}_2 \\ \dot{N}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & (r-K) \\ 0 & 0 & -(r-K) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$$

biçimindedir [1].

3. KUATERNİYONİK EĞİLİM ÇİZGİLERİ VE HARMONİK EĞRİLİKLER

Bu kısımda IR^3 ile uzay-kuaterniyonlarının cümlesi özdeşlenerek IR^3 deki bir eğriye karşılık gelen uzay-kuaterniyon eğrisinin bir eğilim çizgisi olması için bir karakterizasyon verilecektir.

TANIM 7. IR^3 deki birim hızlı bir (C) eğrisi ile eşlenen $\gamma(I)$, I $\subseteq$IR uzay-kuaterniyon eğrisini gözönüne alalım. Sabit bir uzay-kuaterniyonu u olmak üzere, $\forall s \in$I için ,

(19)... $$h(\dot{\gamma}(s),u)=\cos\varphi=st. \quad ,\varphi\neq\frac{\pi}{2}$$

ise (C) eğrisine bir uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisi denir.

Diğer yandan , $\forall$ s $\in$ I için ,

$$h(\dot{\gamma}(s),u)=h(t(s),u)\ ,\ t(s)=\dot{\gamma}(s)$$
$$=\langle t(s),u\rangle$$

(20)... $$h(t(s),u)=\cos\varphi$$

olduğundan aşağıdaki sonuç verilebilir:

SONUÇ 1. IR^3 deki bir eğri reel anlamda eğilim çizgisi ise bu eğri ile eşlenen uzay-kuaterniyonik eğri de eğilim çizgisidir. Bunun karşıtı da doğrudur [3].

Bir uzay-kuaterniyon eğrisinin harmonik eğriliği aşağıdaki şekilde tanımlanır:

TANIM 8. $\gamma: I \to IR^3$ bir regüler kuaterniyon eğrisi s-yay parametresi ile verilsin. IR^3 ün birim ve sabit bir vektörü u ve $\{t(s),n_1(s),n_2(s)\}$ γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı olsun. Bu takdirde $\dot{\gamma}(s)$ ve u arasındaki açı $\varphi=\varphi(s)$ olmak üzere,

(21)... $$\mathrm{H}: \mathrm{I} \to \mathrm{IR}$$
$$h(n_2(s),u)=\mathrm{H}(s)\cos\varphi$$

içiminde tanımlanan H fonksiyonuna γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasında u'ya göre harmonik eğriliği denir. Şimdi, uzay-kuaterniyonik eğilim çizgilerinin harmonik eğriliğini eğrilikler cinsinden ifade eden şu teoremi verebiliriz:

TEOREM 1. $\gamma\ : \mathrm{I} \to \mathrm{IR}^3$ s-yay parametresi ile verilen bir uzay-kuaterniyon eğilim çizgisi olsun. γ eğrisinin γ (s) noktasındaki eğrilikleri k (s), r (s) ve harmonik eğriliği H (s) olmak üzere,

(22)... $$\mathrm{H}(s) = \frac{k(s)}{r(s)}$$

dir.

İSPAT : $\gamma\ : \mathrm{I} \to \mathrm{IR}^3$ uzay-kuaterniyon eğilim çizgisinin teğet vektörünün u vektörü ile yapmış olduğu açı φ olsun. γ (s) noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ olmak üzere,

$$h(t(s), u) = \cos\varphi = \text{st.}$$

yazabiliriz. Buradan s'ye göre türev alınırsa,

$$h(\dot{t}(s), u) + h(t(s), \dot{u}) = 0$$

veya

$$h(\dot{t}(s), u) = 0$$

elde edilir. Burada (10) ifadesini yerine koyarak,

$h(k(s)n_1(s),u)=0$
$k(s)h(n_1(s),u)=0$

bulunur. k (s) $\neq 0$ olacağından

$$h(n_1(s),u)=0$$

dır. Bu son ifadeden türev alınırsa,

$$h(\dot{n}_1(s),u)+h(n_1(s),\dot{u})=0$$

veya

$$h(\dot{n}_1(s),u)=0$$

elde edilir. (11) denkleminin burada yerine konulmasıyla,

$$h(-k(s)t(s)+r(s)n_2(s),u)=0$$
$$-k(s)h(t(s),u)+r(s)h(n_2(s),u)=0$$

bulunur. Bu eşitlikte (20) ve (21) ifadelerinin kullanılmasıyla,

$$-k(s)\cos\varphi+r(s)H(s)\cos\varphi=0$$

elde edilir. Buradan,

$$\text{H (s)} = \frac{k(s)}{r(s)}$$

elde edilir.

Bir kuaterniyonik eğri için eğilim çizgisi ve harmonik eğrilik kavramları öncelikle IR^4 ile Q kuaterniyonlar kümesi özdeşlenerek verilecektir.

TANIM 9. $\beta : I \to Q$ regüler kuaterniyon eğrisi s-yay parametresi ile verilsin. Birim ve sabit bir uzay-kuaterniyonu u olmak üzere, $\forall s \in I$ için ,

(23)... $$h(\dot{\beta}(s),u)=\cos\varphi=st.$$

ise β eğrisine Q da bir kuaterniyonik eğilim çizgisidir denir.

TEOREM 2. $\gamma : I \to IR^3$ e bir uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisi olsun. $\gamma(s)=\gamma_1(s)\vec{e}_1+\gamma_2(s)\vec{e}_2+\gamma_3(s)\vec{e}_3$ olmak üzere γ 'dan türetilen her $\beta(s)=\gamma_1(s)\vec{e}_1+\gamma_2(s)\vec{e}_2+\gamma_3(s)\vec{e}_3+\gamma_4(s)$ kuaterniyonik eğrisi de bir kuaterniyonik eğilim çizgisidir [3].

İSPAT : $\beta : I \to Q$ s-yay parametresi ile verilen bir eğri olsun. u, γ eğilim çizgisi ile belli sabit doğrultuyu gösteren birim uzay-kuaterniyonu ve β'nın β(s) noktasındaki Frenet 4-ayaklısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} h(\dot{\beta}(s),u) &= h(T(s),u) \quad , \; T(s)=S_{T(s)}+\vec{V}_{T(s)} \\ &= \frac{1}{2}[T(s)x\alpha u+ux\alpha T(s)] \\ &= \frac{1}{2}[(S_{T(s)}+\vec{V}_T(s))x\alpha u+ux\alpha(S_{T(s)}+\vec{V}_{T(s)}] \end{aligned}$$

bulunur. Burada u bir uzay-kuaterniyonu olduğundan $S_u=0$ *ve* $\alpha u=-u$ dur. Dolayısıyla (1) gözönüne alınarak bu son eşitlikten

$h(\,T(s)\,,u\,) =$

$\frac{1}{2}[-S_{T(s)}.u+\langle\vec{V}_{T(s)},u\rangle-\vec{V}_{T(s)}\wedge u+S_{T(s)}.u+\langle\vec{V}_{T(s)},u\rangle-u\wedge\vec{V}_{T(s)}]$

(24)... $$\mathrm{h}\,(\mathrm{T(s),u}\,) = \frac{1}{2}[2\langle\vec{V}_{T(s)},u\rangle] = \langle\vec{V}_{T(s)},u\rangle = \cos\varphi = \mathrm{st.}$$

elde edilir. Bu ise β eğrisinin kuaterniyonik eğilim çizgisi olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

TANIM 10. β regüler kuaterniyon eğrisi s-yay parametresi ile verilsin. u birim ve sabit bir uzay-kuaterniyonu ve $\{\,T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\,\}$ de β eğrisinin β(s) noktasındaki Frenet 4-ayaklısı olsun. Bu taktirde T(s) ve u arasındaki açı φ olmak üzere

(25)... $$H_i : I \rightarrow IR$$
$$\mathrm{h}\,(\,N_{i+1}(s),u\,) = H_i \cos\varphi(s)$$

şeklinde tanımlı H_i fonksiyonuna β kuaterniyon eğrisinin u' ya göre β(s) noktasındaki i-yinci harmonik eğriliği denir. $H_0 = 0$ olarak tanımlanır. Kuaterniyonik eğrilerin eğrilikleri ile harmonik eğrilikleri arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir:

TEOREM 3. β : I $\rightarrow$ Q s-yay parametresi ile verilen bir kuaterniyonik eğilim çizgisi olsun. β(s) noktasındaki i-yinci eğrilik k_i(s), i-yinci eğrilik yarıçapı $\sigma_i(s) = \frac{1}{k_i}(s)$, $1 \le i \le 3$ ve harmonik eğrilikleri H_i (s) , i = 1,2 olsun. Bu taktirde;

(26)... $$H_1(s) = \frac{1.eğrilik}{2.eğrilik}$$

$$H_2(s) = \dot{H}_1(s)\ \sigma_3(s)$$

dir.

İSPAT : $\beta : I \rightarrow Q$ regüler kuaterniyon eğrisi verilsin. u birim ve sabit bir uzay-kuaterniyonu ve $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ olmak üzere,

$$h(T(s),u) = \cos\varphi = st.$$

yazabiliriz. Bu ifadenin s'ye göre türevi alınırsa,

$$h(\dot{T}(s),u) + h(T(s),\dot{u}) = 0$$

veya

$$h(K(s)N_1(s),u) = 0$$

bulunur. Burada $K(s) \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$h(N_1(s),u) = 0$$

olur. Yeniden s'ye göre türev alınarak,

$$h(\dot{N}_1(s),u) + h(N_1(s),\dot{u}) = 0$$
$$h(\dot{N}_1(s),u) = 0$$

elde edilir. (15) ün kullanılmasıyla,

$$h(-K(s)T(s)+k(s)N_2(s),u)=0$$
$$-K(s)h(T(s),u)+k(s)h(N_2(s),u)=0$$

bulunur. Ayrıca bu son eşitlikte (25) denkleminden i = 1 için elde edilen;

(27)... $$h(N_2(s),u)=H_1(s)\cos\varphi$$

ile (24) ün birlikte göz önüne alınmasıyla,

$$-K(s)\cos\varphi+k(s)H_1(s)\cos\varphi=0$$

ya da

$$H_1(s)=\frac{K(s)}{k(s)}=\frac{1.\,eğrilik}{2.\,eğrilik}$$

elde edilir. Bu sonuç diferensiyel geometriden reel eğriler için bilinen harmonik eğrilik kavramıyla tam bir benzerlik arz etmektedir [4].

Ayrıca, (27) dan s'ye göre türev alınarak,

$$h(\dot{N}_2(s),u)+h(N_2(s),\dot{u})=\dot{H}_1(s)\cos\varphi$$

veya

(28)... $$h(\dot{N}_2(s),u)=\dot{H}_1(s)\cos\varphi$$

bulunur. Burada (16) in gözönüne alınmasıyla,

$$h(-k(s)N_1(s)+(r-K)(s)N_3(s),u)=\dot{H}_1(s)\cos\varphi$$
$$-k(s)h(N_1(s),u)+(r-K)(s)h(N_3(s),u)=\dot{H}_1\cos\varphi$$

eşitliğine ulaşılır. Burada her iki tarafın $\cos\varphi$ ile bölünüp tanım (10) un da kullanılmasıyla,

$$-k(s)H_0(s)+(r-K)(s)H_2(s)=\dot{H}_1(s)$$

elde edilir. Böylece,

$$H_2(s) = \dot{H}_1(s)\frac{1}{(r-K)(s)}$$

ya da

$$H_2(s) = \dot{H}_1(s)\,\sigma_3(s)$$

olur.

KAYNAKLAR

[1] Bharathi, K. and Nagaraj, M. Quaternion Valued Function of a Real Variable Serret-Frenet Formulae. Indian J. Pure. 18 (6) : 507-511, une 1987.

[2] Hacısalihoğlu, H.H. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniv. Fen-Edb. Fak.Yayınları 1983

[3] Karadağ, M. Kuaterniyon Değerli Fonksiyonların Serret-Frenet ektörleri ve Eğilim Çizgileri nönü Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü 1992

[4] Hacısalihoğlu, H.H. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniv. Fen-Edb. Fak. Yayınları 1983