Erc. Ünv. Fen Bil. Derg. 13, 1-2, (1997) 37-53

KUATERNİYONİK EĞİLİM ÇİZGİLERİ İÇİN KARAKTERİZASYONLAR

Müge Karadağ - Ali İhsan Sivridağ

İnönü Üniv. Fen-Ed. Fak. Matematik Bölümü MALATYA

ÖZET

Reel tek değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar (kuaterniyonik eğriler) için Frenet Formülleri K. Bharathi ve M. Nagaraj tarafından verilmiştir [1]. Bu formüller yardımıyla kuaterniyonik eğilim çizgileri ve harmonik eğrilikler incelenerek, harmonik eğrilikler eğrinin eğrilikleri cinsinden elde edilmiştir [2]. Ayrıca, kuaterniyonik eğrilerin bir eğilim çizgisi olması için bir de karakterizasyon verilmiştir [2]. Bu çalışmada ise kuaterniyonik eğrilerin eğilim çizgisi olması için eğrinin harmonik eğrilikleri cinsinden karakterizasyonlar verilmiştir.

CHARACTERISATIONS FOR THE QUATERNIONIC INCLINED CURVES

SUMMARY

The Serret-Frenet Formulae for quaternion valued functions of a single real variable (quaternionic curves) was derived by K. Bharathi and M. Nagaraj [1]. By the help of these formulae the quaternionic inclined curves and harmonic curvatures was studied [2]. And also a characterisation was given for the quaternionic curves to be a quaternionic

inclined curve [2]. In this paper some characterisations are given for the quaternionic inclined curves in the terms of the harmonic curvatures.

1.GİRİŞ

Önce kuaterniyon cebiri ile ilgili bazı temel tanım ve kavramlar verilecektir.

TANIM 1. Bir reel kuaterniyon sıralı dört sayının $+1$, e_1, e_2, e_3 gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır [3]. Burada $+1$ reel birim olup, diğer üç birim ise IR^3 ün standart baz vektörleri olarak alınır ve aşağıdaki özellikleri sağlar [1].

i-) $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k = -\vec{e}_j \times \vec{e}_i$, (ijk) (123) ün çift permütasyonudur.

ii-) $\vec{e}_i \times \vec{e}_i = -1$, $1 \leq i \leq 3$

buna göre bir reel kuaterniyon,

$$q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d \quad , \text{ a, b, c, d} \in IR$$

şeklindedir. Burada,

$$S_q = d\,,\ \vec{V}_q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3\,,\ q = S_q + \vec{V}_q$$

olmak üzere; S_q , q'nun skalar kısmı $\vec{V}_q$ ise vektörel kısmıdır [1]. Bundan sonra reel kuaterniyonların cümlesi Q ile gösterilecektir.

TANIM 2. p,q kuaterniyonlarının çarpımı

(1)... $$p \times q = S_p.S_q + S_p.\vec{V}_q + S_q\vec{V}_p - \langle \vec{V}_p, \vec{V}_q \rangle + \vec{V}_p \wedge \vec{V}_q$$

şeklinde tanımlanır [3]. Burada $\langle , \rangle$ *ve* $\wedge$ sırasıyla IR^3 üzerindeki iç çarpımı ve vektörel çarpımı göstermektedir.

Bir q $\in$ Q kuaterniyonunun eşleniği diye

(2)... $$\alpha\, q = S_q - \vec{V}_q$$

ile tanımlanan $\alpha\, q$ kuaterniyonuna denir [1].

TANIM 3. p, q $\in$ Q kuaterniyonları için

(3)... $$h(p,q) = \frac{1}{2}[\, px\alpha\, q + qx\alpha\, p\,]$$

ile verilen simetrik, reel-değerli, bilineer h-formu kuaterniyon iç çarpımı adını alır [1].

TANIM 4. Eğer p, q $\in$ Q kuaterniyonları için $h(p,q) = 0$ oluyorsa, p ile q'ya h-ortogonaldir denir [1].

TANIM 5. Bir q $\in$Q kuaterniyonunun normu diye

(4)... $$\| q \|^2 = h(q,q) = q\, x\, \alpha\, q$$

eşitliğini sağlayan $\|q\|$ reel sayısına denir.

TANIM 6. Eğer $q \in Q$ kuaterniyonu için

(5)... $$q + \alpha q = 0$$

oluyorsa q'ya bir uzay-kuaterniyonu denir [1].

$I \subset IR$ olmak üzere,

$$\beta : I \to Q$$
$$\beta(s) = \sum_{i=1}^{4} \beta_i(s)\vec{e}_i \;, (\vec{e}_4 = +1)$$

ile verilen reel tek değişkenli kuaterniyon değerli β dönüşümü kuaterniyonik eğri olarak adlandırılır. Özel olarak β (I) $\subset IR^3$ ise β uzay-kuaterniyonik eğri olarak adlandırılır.

2. KUATERNİYONİK EĞRİLERİN FRENET FORMÜLLERİ

Uzay-kuaterniyonlarının cümlesi, IR^3 ile özdeşlenerek IR^3 deki her bir vektör bir kuaterniyon olarak gözönüne alınmak suretiyle IR^3 deki eğrilerin Frenet formülleri kuaterniyon cebiri yardımıyla M. Nagaraj ve K. Bharathi tarafından elde edilmiştir[1]. Daha sonra ise kuaterniyonik eğrilerin Frenet formülleri, kendileriyle ilgili olan uzay-kuaterniyonik eğrilerin Frenet formüllerinden yararlanılarak aşağıda olduğu gibi elde edilmiştir[1].

Birim hızlı bir (C) uzay-kuaterniyonik eğrisi

$$\gamma(s)=\sum_{i=1}^{3}\gamma_i(s)\vec{e}_i \ ,s\in I\ ,I\subset IR$$

parametrik denklemiyle verilsin. $\dot{\gamma}=t$ diyelim. Eğrinin birim hızlı olma şartı

$$\|t\|^2=t\,x\alpha\,t=1$$

dir. Bu ifadeden s'ye göre türev alınırsa,

$$\dot{t}\,x\alpha\ t+t\,x\alpha\ \dot{t}=0$$

veya

(6)... $$h(\dot{t},t)=0$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla, $\dot{t}$ ile t h-ortogonal olur.

(7)... $$\dot{t}=k\,n_1\ ,\ k=\|\,\dot{t}\,\|$$

diyelim. $n_2=t\,x\,n_1$ dersek t, n_1 ve n_2 ikişer ikişer h-ortogonal olur. Ayrıca,

(8)... $$\dot{n}_1=-k\,t+r\,n_2\ ve\ \dot{n}_2=-r\,n_1$$

olur [1].

Birim hızlı bir (C') kuaterniyonik eğrisi

$$\beta(s)=\sum_{i=1}^{4}\beta_i(s)\vec{e}_i \quad ,s\in I\subset IR,\vec{e}_4=+1$$

parametrik denklemiyle verilsin. $\dot{\beta}(s)=T$ olsun.

(9)... $\dot{T} = K N_1 \quad ve \quad K = \| \dot{T} \|$

diyelim. $\| T \|^2 = 1$ eşitliğinden türev alınarak (9) eşitliğinin de gözönünde bulundurulmasıyla

(10)... $N_1 x \alpha\, T + T x \alpha\, N_1 = 0$

elde edilir ki bu da $h(T, N_1) = 0$ olmasını gerektirir. Yani T, N1' e h-ortogonaldir. Ayrıca

(11)... $N_1 = t\, x T\,,\ N_2 = n_1 x T\,,\ N_3 = n_2 x T$

alınırsa T, N_1, N_2 ve N_3 ikişer ikişer h-ortogonal olur ve aşağıdaki türev formülleri geçerlidir. Burada $\{ t, n_1, n_2 \}$ (C') ile ilgili olan (C) uzay-kuaterniyonik eğrisinin Frenet 3-ayaklısıdır [1]. Ayrıca, aşağıdaki türev formülleri de geçerlidir:

(12)...
$$
\begin{aligned}
\dot{N}_1 &= -K T + k N_2 \\
\dot{N}_2 &= -k N_1 + (r - K) N_3 \\
\dot{N}_3 &= -(r - K) N_2
\end{aligned}
$$

3. KUATERNİYONİK EĞİLİM ÇİZGİLERİ VE HARMONİK EĞRİLİKLER

TANIM 7. $\beta : I \to Q$ regüler kuaterniyonik eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. u, sabit bir birim kuaterniyon olmak üzere $\forall s \in I$ için

$$h(\dot{\beta}(s),u)=\cos\varphi=st. \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2}$$

ise β eğrisine bir kuaterniyonik eğilim çizgisi denir. Özel olarak β bir uzay-kuaterniyonik eğri ise bu durumda, uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisi olarak adlandırılır.

TANIM 8. Bir β regüler kuaterniyonik eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. u birim ve sabit bir uzay-kuaterniyonu ve $\{T(s),N_1(s),N_2(s),N_3(s)\}$ β eğrisinin β (s) noktasındaki Frenet 4-ayaklısı olsun. Bu taktirde, T(s) ile u arasındaki açı φ olmak üzere;

$$H_i : I \to IR$$
$$h(N_{i+1}(s),u) = H_i(s)\cos\varphi$$

şeklinde tanımlı H_i fonksiyonuna β kuaterniyonik eğrisinin u'ya göre β (s) noktasındaki i-yinci harmonik eğriliği denir ve $H_0 = 0$ olarak tanımlanır.

TEOREM 1. Bir kuaterniyonik eğrinin harmonik eğrilikleri için

$$H_1(s)=\frac{k_1(s)}{k_2(s)}=\frac{1.eğrilik}{2.eğrilik}$$
$$H_2(s)=\dot{H}_1(s)\sigma_3(s)\ ,\ \sigma_3(s)= 1/k_3(s)$$

dir [2].

Özel olarak bir γ uzay-kuaterniyonik eğrisinin harmonik eğriliği ise şöyle tanımlanır: γ s -yay parametresiyle verilmiş olsun. u birim ve sabit bir uzay-kuaterniyonu ve $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ de γ nın γ (s) noktasındaki Frenet 3-ayaklısı olmak üzere,

$$H: I \to IR$$
$$h(n_2(s), u) = H(s)\cos\varphi$$

biçiminde tanımlanan H fonksiyonuna γ eğrisinin γ (s) noktasındaki u'ya göre harmonik eğriliği denir. Burada φ , t (s) ile u arasındaki açıdır.

TEOREM 2. γ bir uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisi ise γ nın H harmonik eğriliği için

$$H(s) = \frac{k(s)}{r(s)} = \frac{1.e\breve{g}rilik}{2.e\breve{g}rilik}$$

eşitliği sağlanır [4].

4. KUATERNİYONİK EĞİLİM ÇİZGİLERİ İÇİN KARAKTERİZASYONLAR

4.1. Uzay-Kuaterniyon Eğilim Çizgileri İçin Bir Karakterizasyon:

TEOREM 3. γ , s yay-parametresiyle verilen bir uzay-kuaterniyonik eğri olsun. γ (s) noktasındaki harmonik eğrilik H (s) ve γ ' nın Frenet 3-ayaklısı $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ olmak üzere , γ nın uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter şart $H^2(s)$ = sabit olmasıdır.

İSPAT: $(\Rightarrow)$ γ uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisi ise her s parametresi için

(13)... $$h\,(\dot{\gamma}(s), u) = \cos\varphi = st.$$

olacak şekilde sabit bir u birim uzay-kuaterniyonu vardır. u , uzay-kuaterniyon eğrisinin γ (s) noktasındaki $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ bazı cinsinden

(14)... $$u = h\,(t(s), u)\,t(s) + \sum_{i=1}^{2} h\,(n_i(s), u)\; n_i(s)$$

olacak şekilde yazılabilir. u birim olduğundan

(15)... $$\|u\|^2 = 1 \quad \Rightarrow u\,x\alpha\; u = 1$$

dir. (14) ün (15) de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= h(u,u) = u\,x\,\alpha\,u \\ 1 &= [h(t(s),u)\,t(s) + \sum_{i=1}^{2} h(n_i(s),u)\,n_i\,(s)]\;x\,\alpha\,[h(t(s),u)\,t(s) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2} h(n_i(s),u)\,n_i\,(s)] \\ &= [h(t\,(s),u)\,t\,(s) + h(n_2(s),u)\,n_2\,(s)]\;x\,\alpha\,[h(t\,(s),u)\,t\,(s) \\ &\qquad + h(n_2(s),u)\,n_2\,(s)] \end{aligned}$$

elde edilir. γ nın uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisi olduğu da göz önüne alınırsa

$$1 = [\cos\varphi\, t(s) + H(s)\cos\varphi\, n_2(s)]\, x\, \alpha\, [\cos\varphi\, t(s) + H(s)\cos\varphi\, n_2(s)]$$

$$= [\cos^2\varphi \| t(s)\|^2 + H(s)\cos^2\varphi\, t(s)\, x\, \alpha\, n_2(s) + H(s)\cos^2\varphi\, n_2(s)\, x\, \alpha\, t(s) + H^2(s)\cos^2\varphi \| n_2(s)\|^2]$$

$$1 = [\cos^2\varphi - H(s)\cos^2\varphi\, t(s)\, x\, n_2(s) - H(s)\cos^2\varphi\, n_2(s)\, x\, t(s) + H(s)\cos^2\varphi]$$

bulunur. Burada $t(s)x n_2(s) = -n_1(s)$ ve $n_2 x t(s) = n_1(s)$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$H^2(s)\cos^2\varphi = 1 - \cos\varphi$$

$$H^2(s) = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = tg^2\varphi = st.$$

bulunur.

($\Leftarrow$) : Karşıt olarak, γ uzay-kuaterniyonik eğrisi için $H^2(s) = a$ $(st.)$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $tg^2\varphi = a$ olacak şekilde bir φ açısı vardır. O halde,

(16)... $$u = \cos\varphi\; t(s) + H(s)\; n_2(s)\cos\varphi$$

olacak şakilde bir u uzay-kuaterniyonu tanımlayalım.

1) u uzay-kuaterniyonunun sabit olduğunu gösterelim: (16) nın s'ye göre türevi alınarak,

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{du}{ds} = \dot{t}(s) + \dot{H}(s)\, n_2(s) + H(s)\, \dot{n}_2(s)$$

eşitliği elde edilir. Burada (7), (8) eşitlikleri ve $\dot{H}(s) = 0$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{du}{ds} = k(s)\, n_1(s) + \dot{H}(s)\, n_2(s) + H(s)\,(-r(s)\, n_1(s))$$

bulunur. Teorem 2' nin kullanılmasıyla,

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{du}{ds} = k(s)\, n_1(s) + \frac{k(s)}{r(s)}(-r(s)\, n_1(s))$$

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{du}{ds} = 0$$

elde edilir. O halde u sabit bir uzay-kuaterniyonudur.

2) u uzay-kuaterniyonunun birim olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= h\,(u,u) = u \times \alpha\; u \\ &= (\cos\varphi\; t(s) + H(s)\cos\varphi\; n_2(s)) \times \alpha\; (\cos\varphi\; t(s) + H(s)\cos\varphi\; n_2(s)) \\ &= \cos^2\varphi + H^2(s)\cos^2\varphi \\ &= \cos^2\varphi\; (1+H^2(s)) \\ &= \cos^2\varphi\; (1+tg^2\varphi) \\ &= 1\end{aligned}$$

buradan

$$\|u\| = 1$$

eşitliğine ulaşılır. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
h(t(s),u) &= \frac{1}{2}(t(s)\,x\,\alpha\,u + u\,x\,\alpha\,t(s)) \\
&= \frac{1}{2}[\,t(s)\,x\,\alpha(\cos\varphi\, t(s) + H(s)\,n_2(s)\cos\varphi) \\
&\quad + (\cos\varphi\, t(s) + H(s)\,n_2\ \cos\varphi)\,x\,\alpha\,t(s)] \\
&= \frac{1}{2}[\cos\varphi\|\,t(s)\,\|^2 + H(s)\cos\varphi\, t(s)\,x\,\alpha\,n_2(s) \\
&\quad + \cos\varphi\|\,t(s)\,\|^2 + H(s)\cos\varphi\, n_2(s)\,x\,\alpha\,t(s)\,] \\
&= \frac{1}{2}[\,2\cos\varphi - H(s)\cos\varphi\, t(s)\,x\,n_2(s) \\
&\quad - H(s)\cos\varphi\, n_2(s)\,x\,t(s)\,]
\end{aligned}
$$

burada $t(s)x n_2(s) = -n_1(s)$, $n_2(s)x t(s) = n_1(s)$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$h(t(s),u) = \cos\varphi = st.$$

elde edilir. Dolayısıyla, γ bir uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisidir.

4.2. Kuaterniyonik Eğilim Çizgileri İçin Bir Karakterizasyon

TEOREM 4. $\beta : I \to Q$ s-yay parametresi ile verilen bir kuaterniyonik eğri olsun. β (s) noktasındaki Frenet 4-ayaklısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ ve i-yinci harmonik eğriliği H_i (s), i = 1,2 olmak üzere;

$$\beta \text{ bir eğilim çizgisidir} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2} H_i^2(s) = st.$$

İSPAT : ($\Rightarrow$) $\beta : I \to Q$ kuaterniyonik eğrisinin bir eğilim çizgisi olduğunu kabul edelim. Öyleyse β eğrisi için

(17)... $$h(\dot{\beta}(s), u) = \cos\varphi = st.\,, \ \forall s \in I$$

olacak şekilde birim ve sabit bir u kuaterniyonu vardır. Bu kuaterniyonu β eğrisinin β (s) noktasındaki bazı cinsinden

(18)... $$u = h(T(s), u)\, T(s) + \sum_{i=1}^{3} h(N_i(s), u)\, N_i(s)$$

biçiminde ifade edilebilir. $\|T(s)\| = \|N_1(s)\| = \|N_2(s)\| = \|N_3(s)\| = \|u\| = 1$ olduğu gözönüne alınırsa; (18) in de kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= h(u, u) = u \times \alpha u \\ &= [\,h(T(s), u)\, T(s) + \sum_{i=1}^{3} h(N_i(s), u)\, N_i(s)\,] \times \alpha [\,h(T(s), u)\, T(s) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{3} h(N_i(s), u)\, N_i(s)\,]\end{aligned}$$

bulunur. Burada (11), (12), (17) ve Tanım 8 in de gözönüne alınmasıyla

$$\begin{aligned}&= \cos^2\varphi + H_1^2(s)\cos^2\varphi + H_2^2(s)\cos^2\varphi - H_1(s)\cos^2\varphi\, n_1(s) \\ &\quad - H_2(s)\cos^2\varphi\, n_2(s) + H_1(s)\cos^2\varphi\, n_1(s) - H_1(s)H_2(s)\cos^2\varphi\, t(s) \\ &\quad + H_2(s)\cos^2\varphi\, n_2(s) + H_2(s)H_1(s)\cos^2\varphi\, t(s)\end{aligned}$$

$$1 = \cos^2\varphi + H_1^2(s)\cos^2\varphi + H_2^2(s)\cos^2\varphi$$
$$1 = \cos^2\varphi + (H_1^2(s) + H_2^2(s))\cos^2\varphi$$

$$1 - \cos^2\varphi = (H_1^2(s) + H_2^2(s))\cos^2\varphi$$
$$\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \sum_{i=1}^{2} H_i^2(s)$$

buradan ,

$$\sum_{i=1}^{2} H_i^2(s) = tg^2\varphi = st.$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $\beta : I \to Q$ kuaterniyon eğrisi için $\sum_{i=1}^{2} H_i^2(s) = a\ (st.)$ olduğunu kabul edelim . Bu taktirde $tg^2\varphi = a$ olacak şekilde bir φ açısı vardır. Buna göre,

(19)... $$u = \cos\varphi\ T(s) + \sum_{i=2}^{3} H_{i-1}(s)\cos\varphi\, N_i(s)$$

biçiminde bir kuaterniyon tanımlayalım.

1) Gösterelim ki u sabittir: (19) eşitliğinden s' ye göre türev alarak,

(20)... $$\begin{aligned}\frac{1}{\cos\varphi}\frac{du}{ds} &= \dot{T}(s) + \sum_{i=2}^{3} \dot{H}_{i-1}(s)\, N_i(s) + \sum_{i=2}^{3} H_{i-1}(s)\, \dot{N}_i(s) \\ &= \dot{T}(s) + \dot{H}_1(s)\, N_2(s) + \dot{H}_2(s)\, N_3(s) \\ &\quad + H_1(s)\, \dot{N}_2(s) + H_2(s)\, \dot{N}_3(s)\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan, Tanım 8 de i = 2 için

$$h(N_3(s),u) = H_2(s)\cos\varphi$$

yazılıp bu eşitliğin s'ye göre türevinin alınmasıyla

$$\begin{aligned}
&h(\dot{N}_3(s),u) + h(N_3(s),\dot{u}) = \dot{H}_2(s)\cos\varphi + 0\\
&h(\dot{N}_3(s),u) = \dot{H}_2(s)\cos\varphi\\
&h(-(r-K)(s)N_2(s),u) = \dot{H}_2(s)\cos\varphi\\
&-(r-K)(s)\,h(N_2(s),u) = \dot{H}_2(s)\cos\varphi
\end{aligned}$$

(21)... $$\dot{H}_2(s) = -(r-K)(s)\,H_1(s)$$

elde edilir. (9), (12), (21) ifadelerinin ve Teorem 1'in (21)'de gözönüne alınmasıyla;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos\varphi}\frac{du}{ds} &= K(s)N_1(s) + (r-K)(s)H_2(s)N_2(s)\\
&\quad -(r-K)(s)H_1(s)N_3(s) + \frac{K(s)}{k(s)}(-k(s)N_1(s) + (r-K)(s)N_3(s))\\
&\quad + \dot{H}_1(s)\frac{1}{(r-K)(s)}(-(r-K)(s)N_2(s)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{du}{ds} = 0$$

bulunur . O halde u sabittir.

2) u 'nun birim olduğunu gösterelim:

$$\|u\|^2 = h(u,u) = u\,x\,\alpha\,u$$

$$= [\cos\varphi T(s) + \sum_{i=2}^{3} H_{i-1}(s)\cos\varphi N_i(s)]x$$

$$\alpha\ [\cos\varphi T(s) + \sum_{i=2}^{3} H_{i-1}(s)\cos\varphi N_i(s)]$$

$$= \cos^2\varphi + H_1^2(s)\cos^2\varphi + H_2^2(s)\cos^2\varphi$$

$$= \cos^2\varphi\,(1+\sum_{i=1}^{2} H_i^2(s)$$

$$= \cos^2\varphi\,(1+tg^2\varphi)$$

$$= 1$$

bulunur. Öyleyse,

$$\|u\| = 1$$

dir. Diğer taraftan

$$h(T(s),u) = \frac{1}{2}[T(s)\,x\,\alpha\,u + u\,x\,\alpha\,T(s)]$$

$$= \frac{1}{2}[T(s)\,x\,\alpha(\cos\varphi T(s) + \sum_{i=2}^{3} H_{i-1}(s)\cos\varphi N_i(s))$$

$$+ (\cos\varphi T(s) + \sum_{i=2}^{3} H_{i-1}(s)\cos\varphi N_i(s))\,x\,\alpha\,T(s)]$$

$$= \frac{1}{2}[2\cos\varphi + H_1(s)\cos\varphi T(s)\,x\,\alpha(n_1(s)\,x\,T(s))$$

$$+ H_2(s)\cos\varphi T(s)\,x\,\alpha(n_2(s)\,x\,T(s))$$

$$+ H_1(s)\cos\varphi(n_1(s)\,x\,T(s))\,x\,\alpha\,T(s)$$

$$+ H_2(s)\cos\varphi(n_2(s)\,x\,T(s))\,x\,\alpha\,T(s)]$$

$$= \frac{1}{2}[2\cos\varphi - H_1(s)\cos\varphi n_1(s) - H_2(s)\cos\varphi n_2(s)$$

$$+ H_1(s)\cos\varphi n_1(s) + H_2(s)\cos\varphi n_2(s)]$$

$$h(T(s),u) = \cos\varphi = st.$$

bulunur. Bu ise β eğrisinin bir eğilim çizgisi olduğunu verir.

Böylece, kuaterniyonik eğilim çizgileri için bir karakterizasyon verilmiş olur.

NOT : Kuaterniyonik eğriler için elde edilen harmonik eğriliklerin türev denklemleri Teorem 1 ve (21) ifadeleri ile verilip matrisel ifadesi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (r-K) \\ -(r-K) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

KAYNAKLAR

[1] Bharathi, K. and Nagaraj, M. Quaternion Valued Function of a Real Variable Serret-

Frenet Formulae. Indian J. Pure. 18 (6) : 507-511, June 1987

[2] Karadağ, M. ve Sivridağ, Ali İhsan.Tek Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlar ve

Eğilim Çizgileri (Baskıda)

[3] Hacısalihoğlu, H.H. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi . Gazi Üniv. Fen-Edb.

Fak. Yayınları 1983

[4] Karadağ, M. Kuaterniyon Değerli Fonksiyonların Serret-Frenet Vektörleri ve Eğilim

Çizgileri. İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , 1992