Roger Penrose’da Matematiksel Platonculuk

Baha ZAFER*

“Matematiğin kuralları sadece insan yapımı ya da ürünü değildir. Onlar öylece ‘dirler’, insan düşüncesinden bağımsız olarak vardırlar.”

M. C. Escher (1898-1972)

Özet

Matematiksel nesneler fiziksel nesnelerden bağımsız birer “varlık” mıdır? “Matematik nesneler” olarak tanımladığımız simetri gruplarının, Laplace operatörleri ya da yarı simetrik hiperbolik fonksiyonların “varlık”ı nedir ya da nasıl tanımlanabilir? Varlık şartı matematik nesneler için bu dünyanın dışında mıdır yoksa bu dünya içinde tanımlanabilir mi? Bu dünyanın ötesi ya da idealar dünyası var olabilir mi? Tüm bu sorular açısından baktığımızda, matematik nesnelerin gerçekliği sorunu düşünce tarihini boyunca birçok tartışmanın konusu olmuştur. Platon bu soruya idealar dünyası ile bir cevap vermeye çalışmıştır. Bu yaklaşım matematik tarihi içindeki birçok öngörü ile uyuşmaktadır. Matematik felsefesinin temel tartışmalarından biri olan matematik nesnelerin varlığı sorunu Frege, Hilbert, Brouwer, Russell, Turing ve Gödel’in dâhil olduğu tartışma ve açıklama süreçlerinden geçerek, son dönemin öne çıkan teorik fizikçilerinden Roger

* Yard. Doç. Dr., İstanbul Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü.

Dîvân DİSİPLİNLERARASI ÇALIŞMALAR DERGİSİ
cilt 19 sayı 36 (2014/1), 63-XX

Penrose'un görüşleri bağlamında incelenmektedir. Yaşayan önemli fizikçilerden Roger Penrose matematiği Platon'un idealar dünyasına benzer bir "öte varlık" alanı ile ilişkilendirmekte, bu tartışma ve açıklanmalar dolayısıyla Penrose tarafından savunulan yaklaşım "matematiksel Platonculuk" olarak adlandırılmaktadır. Matematiksel Platonculuk, matematiksel nesnelerin zamandan, mekândan ve onu düşünen insan zihninden bağımsız olarak var olduğunu iddia eden felsefî görüştür. Bu bakımdan matematiksel nesneler, örneğin kümeler, sayılar ve matematiksel operatörler vb. kendinde nesneler olarak vardır. Matematik, evrenin altında yatan insanın yalın algısından uzak bir varlık düzleminden pay almaktadır ve insan zihni bu payın çözücüsüdür. Penrose için "matematiksel nesne"ler üzerine söz söylemek, temel olarak "fiziksel nesne"ler hakkında yargıda bulunmakla eşdeğerdir.

Giriş

FİZİK KURALLARI NASIL İŞLEMEKTEDİR? İşleyişleri hakkında nasıl konuşabiliyoruz? Evrenin kökeni hakkında öngörülerimizi nasıl ifade edebiliriz? Maddeyi nasıl tanımlayabiliriz? Zamanın yönü, niteliği hakkında nasıl fikir yürütebiliriz? Duyularımızın sınırlarını işaret eden bu sorular çözümlerini, hangi düzlemde/ölçekte bize görünür kılmaktadır? Atomaltı dünyadaki ya da ışık hızına yakın hareket eden fiziksel sistemleri nasıl tanımlayabiliyoruz?

*Yalın algı*mızı yorgun bırakan, ilişkilendiremediğimiz ilişkileri/etkileşimleri mümkün kılan cevaplar "matematik" dediğimiz araç ile sunulmaktadır. Matematik, *yalın algı*nın ötesinde kendine açıklama düzlemi kuran tüm sorular için elimizdeki ilk ve tek araçtır. *Yalın algı*nın ötesinde varlığını hiçbir şekilde bilmediğimiz kesikli enerji (*kuanta*), ışık hızına yakın hızda harekette zaman ve mekânın doğasına dair öngörünün geçerliliği, ikinci dereceden bir denkleminin iki kökü bulunduğuna dair basit lise bilgisinin kendisinden haberdar kıldığı karşı-madde[1] (*anti-matter*) ve evrenin

1 John Gribbin, *Schrödinger'in Kedisinin Peşinde* (çev. Nedim Çatlı, İstanbul: Metis Yayınları, 2006), s. 133-134. Dirac tarafından enerji denklemi $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ olarak ifade edilmiştir. Bu ikinci dereceden denklemin iki kökü olduğundan, momentum $p = 0$ iken $E=\pm\, m c^2$ olarak bulunur. Bu negatif köklü

sabit olduğuna dair binlerce yıllık kabulümüzü yıkan genişleyen evren görüşü, *araçlı algı*nın dayanağına götürür bizi: matematik.

Matematik nesnelerin gerçekliği nedir? İki sayının toplamında sonucunu veren işlem ile genel görelilik denklemlerinin çözümünde kullandığımız kısmî diferansiyel denklem çözümleri ya da karmaşık sayıları kullanarak ulaştığımız çözümler aynı nesnel gerçekliği mi işaret etmektedir? Matematik işlemlerin gerçekleştiği, toplama, çarpma, integral ve türev, Lie grupları, zamana bağlı bünye denklemlerinin çözümlerinde kullandığımız Green fonksiyonları neden bir fiziksel dünyanın nesnelliğine karşılık gelebiliyor?

Böyle bir varlık alanı ya da aksiyomatik zeminin olanaklılığı neden gerekli ya da bu zemin varoluşunu nereden alıyor? Ontolojik zemin matematik nesneler için nasıl kuruluyor? Matematiksel nesneler fiziksel nesnelerden bağımsız birer "varlık" mı? Ne şekilde "gerçeklik" olarak tanımlanabiliyorlar? Mantıkta, yalnızca dış dünyaya dair duyularımız ile uyuşan önermeler doğru ve "varlık", önermenin doğruluk değeri alması için ilk şart olduğuna göre, matematik nesneler var mıdır?

Matematik nesneler olarak tanımladığımız Lie grupları ya da Green fonksiyonlarının "varlık"ı nedir ya da nasıl tanımlanabilir? Bu varlık şartı matematik nesneler için bu dünyanın dışında mıdır yoksa bu dünya içinde tanımlanabilir mi? Bu dünyanın ötesi ya da idealar dünyası var olabilir mi? Tüm bu sorular açısından baktığımızda, matematik nesnelerin gerçekliği sorunu düşünce tarihinin ortalarından bugüne kadar takip edilebilecek birçok tartışmanın konusu olmuştur. Düşünce tarihinin ortalarında bulunan Platon bu soruya idealar dünyası ile bir cevap vermeye çalışmıştır. Günümüzde yaşayan önemli fizikçilerden Roger Penrose da matematiği Platon'un idealar dünyasına benzer bir "öte varlık" alanı ile ilişkilendirmektedir. Matematik, evrenin altında yatan insanın yalın algısından uzak bir varlık düzleminden pay almaktadır ve insan zihni bu payın çözücüsüdür. Bu yaklaşım bilim tarihi içindeki birçok öngörü ile uyuşmaktadır.

ikinci değer, Dirac tarafından 'karşı madde'nin *varlığı* olarak yorumlanmıştır. Karşı maddenin bir ihtimal olarak bile düşünülmesi çok zor görülürken matematiksel ifadesinin ortaya konması ve 1932 yılında gözlemlenen kozmik ışınlar içinde bu parçacığın bulunmasıyla fiziksel gerçeklik ile matematik arasındaki bağ daha fazla dikkat çekmeye başlamıştır.

Platon Felsefesinde Matematik

"Dikkat edecek olursan, duyularımıza çarpan nesnelerden bazıları insanı düşünmeye götürmez. Duyularımız onların ne olduğunu anlamaya yeter. Bazılarıysa incelenmek ister. Çünkü bize verdikleri duyuş açık değildir."

Platon, *Devlet*, 523b.

İçinde yaşadığımız dünyada duyularımızın erişebildiği "değişmez" tümeller ya da değerler var mıdır? Duyularımızın ötesine nasıl ve ne şekilde geçebileceğimiz, kendi yetilerimiz üzerine düşündüğümüz ilk dönemlerden bugüne kadar insan tekini sürekli meşgul etmiştir. Duyular ve yalın algımız bize "bilgi"den pay verir mi? Bu bilginin doğruluğu nasıl belirlenebilir? Duyularımızda karşılık bulmayan mükemmel tasvirler, anlamlı bütünler ya da tutarlılık için yan yana duran çıkarımların kaynağı nedir? Düşünce tarihinde bu soruların kapsamı içinde en genel sentezi ortaya koyan ilk felsefeci Platon'dur (MÖ 429-347). Kendinden önce gelen Sokrates-öncesi doğa felsefecilerinin "doğa" ve "bilgi" hakkındaki sorularını bir araya getirmiş ve kendi düşünce sistemini bu sentez üzerinden kurmuştur.

Platon, bilginin kaynağına / bilginin neliğine dair temel iddialarını birçok diyalogunda parça parça ortaya koymuş olmasına rağmen, bu konulardaki görüşlerinin en derli toplu bulunduğu eseri *Politeia*'dır.[2] *Devlet* diyalogunda bilgi tartışmasını Güneş, çizgi ve mağara imgelerini kullanarak sürdürür. Bu üç imgeden çizgi pasajı/teorisi insanların duyu verilerinden ya da imgelerden zihinsel olarak nasıl yararlandıklarına dair Platoncu açıklamayı sunar.

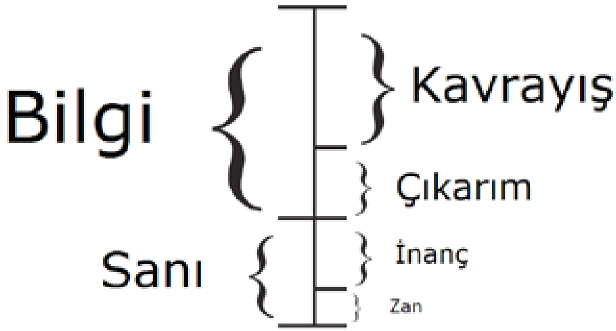
Çizgi teorisinin başladığı diyalog parçasında Sokrates "Bu iki çeşidi, 'görülen' ve 'kavranan' iki dünyayı iyice anlıyorsun değil mi?"[3] der ve herhangi uzunlukta bir çizgi almamızı ister. Sonra bunu eşit olmayan iki parçaya bölmemizi söyler. Uzun ve üstte olan parça '*to tu noumenu*' akıl yetimizi, altta kalan kısım ise '*to tu horomenu*' kanı ya da görsel algı yetimizi temsil eder. Akıl alanında, görünmeyen şeyler yani fikirler, algı alanında ise gerçekten algılayabildiklerimiz üzerine alıştırma yaparız. Sokrates ikinci adımda iki parçaya bölünmüş çizgiyi yine aynı bölüm oranını kullanarak yeniden böl-

2 Platon, *Devlet* (*Politeia*) (çev. Sabahattin Eyüboğlu, M. Ali Cimcoz, 25. bs., İstanbul: İş Bankası Kültür Yayınları, 2013).

3 Platon, *Devlet,* 509 d.

memizi ister. Sonuçta dört kısımdan oluşan 4:2:2:1 oranında sahip bölünmüş çizgiler elde edilir.[4]

Buna göre dört çizgiye / bilgi türüne karşılık gelen düşünüş yolları sırasıyla; en üst çizgi *kavrayış* (*noesis*), ikincisi *çıkarım, akıl* (*dianoia*), üçüncüsü *inanç* (*pistis*), dördüncüsü *imge* (*eikasia*)dir.[5] Bunlardan ilk ikisine *episteme* (*bilgi*), son ikisine *doksa* (*sanı*) denilmektedir. Şu hâlde insan zihninin bilgisizlikten bilgiye erişimi iki alan üzerine uzanır: *episteme* ve *doksa* alanları. Doksa'nın imgeler ile ilgili olduğu söylenirken episteme ise, en azından *noesis* düzeyinde ilk örneklerle yani *idea*larla ilgilidir.[6]



Platon'un çizgi pasajına göre insan yetilerinin tasnifi.

Platon'daki bilgi-sanı ayrımı bu iki alanın nesnelerini de ayrıştırır. Platon'un ifadesiyle, bu iki ayrı türdeki bilgi faaliyetinin kendisine ait ve birbirine zıt nesneleri vardır. Sanının nesnesi, hep değiştiği hâlde gerçekte "var olmayan" yani oluş-bozuluşa tâbi, dolayısıyla da duyum tarafından tasarlanan ve kendisinden önceki bir sebebe, nedene bağlı olandır.[7] Duyusal dünyanın tikelleri olan bu nesneler, sürekli olarak değiştiklerinden yetkinlikten yoksun

4 Toplam uzunluk 9 birim alınmıştır. İlk eşit olmayan bölümleme 6'ya 3 olarak gerçekleştirilmiştir.

5 Platon, *Devlet,* 511 d-e. Türkçe çeviride en üstte bulunan "dianoia" çizgi parçası "çıkarış" olarak çevrilmiştir. Metinde bu ifade "çıkarım" olarak kullanılmıştır.

6 Sara Çelik, *Bilgi Felsefesi: İlkçağ'dan Yeniçağ'a* (İstanbul: Doruk Yayınları, 2010), s. 48-52.

7 Platon, *Timaios,* (çev. Erol Güney, Lütfi Ay, 3. bs., İstanbul: MEB Yayınları, 1997). Parmenides tarafından Herakleitos'a getirilen eleştiri, kendisini burada göstermektedir. Sürekli değişim sırasında bir hâlden diğer hâle geçerken varolmayanı *geçiş* olarak kullanacağından aslında yok olur.

görünüşte varlıklardır. Örnek olarak, su yüzeyinde gördüğümüz bir ağaç gövdesinin bozulmuş yansımasına bakarak ağacın türü hakkında konuşamayız. Böylece sanının nesnesi duyu dünyasında iken, bilgi düzeyindekilerin nesnesi her zaman var olan, hep aynı kaldığı için *çıkarımın* yardımıyla akıl tarafından sezilen "gerçek" (ancak zihne ait olmayan) varlıklardır. Önemli bir denklik kuran Platon için, bilginin kendisi sabit ve değişmez olduğundan nesnesinin de sabit ve değişmez olması gerekir. Böylece, Platon'un kesin bilginin varlığından hiçbir kuşku duymaması onu bu tür bir bilgi için uygun nesneleri yani *idea*ları tanımlamaya iletir.[8]

Platon için *bilgi* ne duyumla başlar ne de duyuma ihtiyaç gösterir. Platon'da "çıkarım" geometri ve matematik için, "kavrayış" ise en üst düzey, ideaların bilgisi için kullanılır.[9] Bu Platon tarafından kullanılan çizgi teorisinin aydınlığa en yakın iki düşünüş yolunu ifade etmektedir. Buna göre biz, matematikçinin ürettiğine benzer şekilde model, çizim, diyagram ve grafikler kullanarak kavramları idrak ederiz. Örnek olarak, dik açının soyut bir kavramını göremeyiz ama diyagram ya da model kullanarak bir dik açıyı anlayabiliriz. Bu gerçekte olanın bir imgesidir. Çizginin sanı kısmında bulunan alttan ikinci kısmı ise dünyadaki tüm nesneleri temsil eder, hem insan yapımı hem de doğal olanlarını, *inanç* (*pistis*) yetimizle idrak ederiz. En altta ve en kısa olan kısım ise gölgeleri temsil eder. Bunlar imgelerdir. Sokrates bunları hayalî görüntüler (*fantazmata*) olarak tasvir eder. Bunları idrak yetimiz ise, *zan* (*eikasia*)'dır. En üstteki alanın etkinliği olan diyalektik, herhangi bir görselleştirmeye dayanmaksızın ilerleyen soyutlamalar ile imgesiz düşündüğümüzden hakikatin alanındayızdır.[10] Bu yeti ile kavrayış diğer üç yetiden ayrılır.

Platon'un hakikat alanını üzerine inşa ettiği ideaların sahip olduğu bir diğer özellik de "bilginin nesneleri" olmalarıdır. Platon'a göre gerçek, zamana ve insanlara göre değişmeyeceği için onun nesneleri olan ideaların da değişiminden söz edilemeyecektir. Ancak ideaların bilgi nesnesi olması, onların düşüncede mücessem olması anlamına gelmemektedir. Çünkü idealar akıl tarafından kavranmasına rağmen akılda gerçekleşen/gerçeklenen nesnel varlıklara karşılık gelmemektedir. İdealar sadece zihin tarafından

8 Ahmet Arslan, *İlkçağ Felsefe Tarihi -Sofistlerden* Platon'a-, c. 2 (3 bs., İstanbul: Bilgi Üniversitesi Yayınları, 2010,) s. 255.

9 Platon, *Devlet*, 511 e.

10 Arslan, s. 255.

"kavramsal olarak kavranan" "şey"lerdir. Platon'un ifadesiyle idealar "herhangi bir dış şeyde, mesela bir canlı varlıkta, yerde, gökte veya başka herhangi bir yerde bulunan bir 'şey' değildir".[11]

Platon'a göre idealarla tikel nesneler arasındaki en temel fark ideaların zamanın dışında var olmasıdır. Platonculukta idealar zamanda sürekli aynı kalan değil, zamanın dışında olan varlıklar olarak tanımlanır. Bu nedenle ideaların zamanla hiçbir ilişkisi yoktur. Böyle bir durumda Platon, ideaların zamana bağımlı nesnelerle ilişkisini nasıl kurmaktadır? Platon'a göre idealarla tikeller arasındaki katılım ilişkisi "pay alma"dır. Platon'un pay alma ile kastettiği şey, tikel nesnelerin Demiurgos'un faaliyeti sonucunda idealara benzer kılınarak şekillendirilmeleridir. Bu anlamda nesnelerin idealardan pay alması; idealara katılması ve onlara benzemesi, ideaların nesnelerin meydana gelmesinde örnek veya model olması anlamındadır. Ancak idea-nesne ilişkisinde nesnelerin idealardan pay alması, ideaların "bölünmezlik" özelliği nedeniyle "mekân" ya da "uzam" formunda değildir. Bölünmezlik ilkesi göz önünde bulundurulduğunda, Platon'a göre idealar "mekân"ın ve "zaman"ın dışında var olmaktadırlar.[12]

İdeaların düşünce içindeki görevi, gerçek bilgiye ulaştırmaktır. "Ruhu, yukarıya baktıracak tek bilim, konusu *gerçek varlık* ve *kavranan dünya* olan bilimdir. Bilimin işi görülenle değildir. Görülen dünyada ruh, yukarı değil, aşağıya bakar."[13] Matematik aşağıya bakan ruhun kendisini yukarı çevirmesine yardımcı ilk kaldıraçtır. Algının ve duyumun ötesinde, ideaların değişmeyen doğasını aramak aslında düşüncenin de üzerine kurulu olduğu zemindir. Geometri ve matematiğin, deneyde açığa çıkmayan ideal nesneleri vardır, tüm çift olan tikeller yok olsa dahi varlığından bir şey kaybetmeyecek olan *çiftlilik* söz konusudur. Uzunluk ve derinlikten yoksun bir tikel nokta olmadığı hâlde geometrinin öngördüğü nokta her ikisinden de yoksundur. Doğa felsefecisi tikel ya da zamansal olanı değil de tümel ve zaman dışı olanı incelemektedir. Fiziksel nesneler için aranan temel varlık alanı, *zaman*dan ve *mekân*dan bağımsız olmalıdır.

*Zaman*dan ve *mekân*dan bağımsız nesneleri sık kullanan matematik bilimlerine gelince, bu bilimler ideaların bilgisine bizi yak-

11 Platon, *Symposion* (çev. Eyüp Çoraklı, İstanbul: Kabalcı Yayınları, 2007), s. 211 a-b.

12 Arslan, s. 262.

13 Platon, *Devlet*, 529b.

laştıracak olan düşünce etkinliğidir. Matematiğin nesneleri bir ara sınıf oluşturur. Ebedî ve değişmez olmakla duyulur şeylerden; birçok benzeri olmakla ve imgeler kullanmakla da idealardan ayrılırlar.[14] Onlar hem algılanılabilen (*perceptible*) hem de anlaşılabilen (*intelligible*) nesnelerdir. Aynı şekilde zihinsel durum açısından da sanı (*doksa*) ile kavrayış (*noesis*) arası bir yerdedir. Çünkü bunlar varsayıma dayanmaktadır. Dolayısıyla bunlar nesnelerinin varlıksal özellikleri ve bilgileri bakımından idealarn bilgisine en yakın olanlarıdır. Çünkü bu bilimler tüm insanlar için açık, seçik ve doğru olarak kabul edilir, zamana göre değişmez ve daha da önemlisi bu bilgiler duyulara bağlı olarak meydana gelmemiştir. Matematiğin sayılarını, operatörlerini, aksiyom ve ön kabullerini, gerçek dünyada hiçbir yeri olmayan matematik nesneleri bize deney değil, akıl ve düşünce verir.

Matematik, idealarn bilgisinin mümkün olduğu hakkındaki başlıca kanıttır. Platon bunun örneğini *Menon*[15] diyalogunda verir. Bu diyaloga göre, Sokrates bir matematik problemini sorunun cevabını bilmeyen bir köleye yöneltmiş ve uygun sorular sorarak kölenin düşünmesini, akıl yürütmesini ve doğruya ulaşmasını sağlamıştır. Platon'a göre matematiğin yararları ve kullanım maksadı şunlardır:

i) Bunları herkes bilmek zorundadır çünkü tüm bilimler ve zihnî uğraşlar bunlara bağlıdır.

"Bütün sanatlarda, bütün kafa çalışmalarında, bütün bilimlerde ortak olan ve herkesin ilk öğreneceği şeyler arasında yer alan sayı ve hesap bilimi*, her bilimin her sanatın başvurmak zorunda olduğu bilimdir."[16]

ii) Bu bilgilerle uğraşmak idealarla tanışmamız için gerekli bir süreçtir. Bizi idealara doğru yönlendirirler.

---

14 Frederick Copleston, *Felsefe Tarihi - Platon* (çev. Aziz Yardımlı, 4. bs., İstanbul: İdea Yayınevi, 1998), s. 34-35.

15 Platon, *Diyaloglar 1* (çev. Adnan Cemgil, 4. bs., İstanbul: Remzi Kitabevi, 1996).

16 Platon, *Devlet*, 522 c.

*Platon genellikle sayılar hakkında konuştuğunda, pozitif tam sayılar 1, 2, 3, ... dizisini düşünmektedir. Bunların tek; 1, 3, 5, ... ve çift; 2, 4, 6, ... sayılara bölünmeleri Platon'un gözünde diğer herhangi bir bölümlemeden daha temeldir. Bu yüzden o sıklıkla aritmetikten tek ve çift sayılar bilimi olarak söz eder. Bkz. *Gorgias* 453 e, *Kharmides* 166 a, *Phaedo* 104 a-b, *Devlet* 510 c, *Theaetetus* 185 d, 198 a.

“Geometri, bizi öz varlıkla karşılaşmaya zorluyorsa, işimize yarar; yok, yalnız doğup ölen şeylerle yetiniyorsa, işimize gelmez.”[17]

“Geometri, değişmeyenin bilgisidir ve o, ruhumuzu öz gerçeğe yükseltmeye, bizde bilim sevgisi doğurmaya yarar. Gözlerimizi aşağılara değil, yukarılara çevirir.”[18]

iii) Bu bilgileri bilmekteki amacımız sadece onların nesneleriyle uğraşmak değil duyusal olmayanlar üzerinde düşünmeyi öğrenmektir.

“Geometride olduğu gibi astronomide de kendi koyacağımız problemlerle uğraşacağız. Gökte olup bitenler üstünde durmayacağız. Asıl istediğimiz, bu çalışmalarla ruhumuzun kavrayan yüzünü geliştirmek, onu yararsızken yararlı hale getirmektir.”[19]

Platon’un matematiğe karşı ilk eleştirisi, onun hipotetik yani varsayıma dayanan bir bilim olmasınadır. Gerek matematik gerekse geometri önce doğru olduğu varsayılan bir ön kabule dayanır ve bilgiyi bunun üzerine inşa eder. Ancak bu ilk varsayımın kesin doğru olduğunu nasıl söyleyebiliriz? Örnek olarak *daire*, üçgen gibi kavramları ele alırken bunların birtakım özelliklere sahip oldukları varsayılır ve bu varsayımların üzerine ilave edilen bilgi yine varsayım bilgisi olmaktan öteye geçemeyecektir. Matematiksel önermeler her ne kadar zaman-dışı ve zorunlu olarak doğru olsalar da, yine de bu, onların “kategorik” ya da “mutlak” doğrular oldukları anlamına gelmez. Aksiyomların kendilerinedir? Aksiyomlar dizgenin başlangıç önermeleridir (ya da temel öncüller) ve kendileri kanıtlanamaz çünkü her aksiyom bir öncekini gerekli kılar. Buradan çıkan sonuç, matematiksel doğruların konumunun kategorik değil, varsayımsal olduğudur. Yani matematiksel önermeler, eğer aksiyomlar doğruysa doğrudur; “mutlak” anlamda doğru değillerdir.[20] Bu bilimlerin bilgi olmasının engeli ilkelerden değil de *çıkarım*lardan hareketle ulaşılıyor olmalarındandır.

> “Geometri, aritmetik ve onlara benzer bilimlerle uğraşanlar, tek, çift diye, üçgen, dörtgen diye, üç çeşit açı diye birçok şeyleri varsayarlar. Bunları bilinen şeyler gibi ele alırlar. Bunlardan ne kendilerine ne de

17 Platon, *Devlet*, 526 e.

18 Platon, *Devlet*, 527 b.

19 Platon, *Devlet*, 530 b. Aynı diyalog parçasında bir bilimden daha bahseder Sokrates. Bu bilim astronominin kardeşi olarak tanımlanan armonidir.

20 John Cottingham, *Akılcılık* (çev. Bülent Gözkân, İstanbul: Doruk Yayınları, 1995).

> başkalar*ına hesap vermeyi gerekli bulur*lar artık. Sonra bu varsayımlardan kalkıp basamak basamak yükselir, bir sonuçtan *ötekine* geçerek önceden kafalarına koyduklarını ispat ederler."[21]

Akıl, kendisi hiçbir çıkarım, varsayım içermeyen, var olan her şeyin ilkesi olan en baştaki ilkeye varmak zorundadır. Ayrıca, varsayımların nesnesi matematikteki gibi duyu dünyasından değil, kavramlardan seçilmiştir.

> "Burada aklın kendiliğinden diyalektik *gücüyle kavradığı şeyler vardır. Akıl burada varsayımları birer ilke olarak değil; basamak,* dayanak olarak alır. Bütün varsayımların ötesinde bütünün ilkesine yükselir. Bu ilkeye yükselince ondan çıkan bütün sonuçlara dayanarak varacağı sonyere varır. Bu arada görülen, duyulan hiçbir şeye başvurmaz. Kavramdan kavrama geçerek sonunda gene bir kavrama varır."[22]

Matematikçilerin aksiyomlarının ispata ihtiyaç duymaksızın herkesçe kabul edilirliği şüphe götürmüyorsa, bir metafizikçi için de her şeyin temelinde "İyi"nin olduğu kesindir. "*İnsan, diyalektikle duyuların hiç birine başvurmadan, yalnız aklı kullanarak her şeyin özüne varmayı ve iyinin özüne varmadıkça durmamayı denediği zaman, görülen dünyanın da sonuna varır, kavranan dünyanın da.*"[23] Matematik metafizik alanın elde edilmesinde insan yetilerine bir üst düşünce formuna geçmek için ara basamak görevi görür. Sonuçta, matematiksel çalışmalar, bir filozofun bilgiye ulaşmadan önce soyut bir akıl yürütme türü olarak kesinlikle geçmesi gereken basamaktır.[24] Dolayısıyla Platon için en yüksek entelektüel yeti, matematikte olduğu gibi öncüllerden kalkıp bir sonuca doğru götüren akıl yürütme olmayıp, gerçekliğe ilişkin olarak *sezgisel* ve *doğrudan bir kavrayış veren*, zihinle gerçeklik arasında doğrudan temas kuran yetidir. Bu yetinin, keşfin veya aydınlanmanın bilgisizlik hâlinden birden bilgiye ulaşmak şeklinde olmayıp öncesinde düşünme, akıl yürütme ve çıkarsama ile uzun bir entelektüel hazırlık devresi bulunduğunun ve matematik bilgisinin Platon'un bilgi sürecindeki ilerleyişinde verilecek idea bilgisinden önce gelen önemli bir adımı işaret ettiğinin altı yeniden çizilmelidir.

Sezgi ya da doğrudan kavrayışı sağlayan yeti sadece matematik ve geometri için geçerli değildir. Platon için sanat ve ahlâk da ma-

21 Platon, *Devlet*, 510 c-d.

22 Platon, *Devlet*, 511 b.

23 Platon, *Devlet*, 532 a.

24 Cottingham, s. 26.

tematik gibi deneysel olmayan nesnelere yönelmiştir. Geometri ve matematiğin, deneyden duyumsanmayan / açığa çıkmayan ideal nesneleri vardır. Sanatçı ise duyuda verilmeyen kavrayışlara ulaşmak için imgelemini kullanır. Ahlâksal alana baktığımızda ahlâksal yaşamın verilerinin yalnızca olgularla açıklanmadığını görürüz. Örnek olarak, hiçbir insan tümüyle adil değil, adalet de deneyle tespit edilen bir şey değildir ancak yine de *adalet* ahlâkî eylemin amacıdır. Tüm bu disiplinler insan teki ya da toplum için *anlamlıysa, o halde onların nesneleri de gerçek* olmak zorundadır. Saydığımız bu disiplinlerde zihin tikellerden tümele, değişenden değişmeyene, algılanandan akılla kavranana doğru ilerlerken onların söz konusu ettikleri de duyusal olan değil ideal olandır.[25]

Platon felsefesinde birbirlerinden tamamen ayrı oldukları hâlde bir şekilde birbirleriyle ilişki içinde olan iki dünya vardır. Bunlardan ilki içinde yaşadığımız fizik dünyası iken ikincisi idealarıın dünyasıdır. Platon felsefesinde birbirinden keskin şekilde ayrılan, "anlaşılabilen şey"ler olan idealarla, "algılanabilen şey"ler olan nesneler arasında ontolojik temas ve bilgi aktarımını sağlayan bir bağın var olduğunu kabul etmesi, beraberinde pek çok tutarsızlığı ortaya çıkartmıştır. İdeaların tikellerde içkin olması ama aynı zamanda onlara aşkın olması, tikellerin idealardan pay almaları fakat tikellerin idealar karşısında eksik olmaları gibi sorunlar felsefe tarihinde önemli tartışmaları beraberinde getirmiştir.[26]

İdeaların fiziksel nesneler ile nasıl bilgi-aktarım ilişkisine girdiği sorusuna Platon'un verdiği cevap "Bilgiye ait her şey, her insan zihninde doğuştan yer almaktadır" olmuştur. Platon, *Phaidon* diyalogunda sıradan deneyimlerimizde, eşit iki şeyi hiçbir zaman gözlemlememememize rağmen, *yetkin matematiksel eşitlik* kavramına sahip olduğumuza işaret eder. Platon, nesnelerden elde ettiğimiz eşitlik fikrinin tam bir eşitlik olamayacağını, nesnelerdeki değişimin ya da algı yanılmalarının eşitlik fikrini bozduğu halde zihnimizde yine de eksilmeyen sarsılmaz tam bir eşitlik fikri olduğunu söyler. Kendinde eşit fikri bu durumda bize duyumsadıklarımızdan gelmiş olamaz. Kare, dört kenarı birbirine eşit kapalı alandır. Ancak yetkin eşitlik algımız nedeniyle fiziksel dünyada her kenarı birbirine eşit ya da paralel olan hiçbir kare görmeyiz.

25 Raphael Demos, "Formlar ve Şeyler", *İdealar Kuramı: Platon'un Felsefesi Üzerine Araştırmalar* içinde, der. Ahmet Cevizci (Ankara: Gündoğan Yayınları, 1989), s. 114-116.

26 Arslan, s. 267-273.

Platon'un bilgi kaynağı, ruhun bedene geçmesinden önceki bilinçli varlığıdır. Bu soyut matematik nesnelerin varlığı içinde geçerli olan açıklama yoludur. Zaman ve mekânın dışında yer alan, ayrıca hiçbir neden-sonuç bağlantısına konu olmayan soyut nesnelerin fiziksel dünyanın içinde insan teki tarafından bilinir olması ancak bu soyut nesnelerin bilgisinin doğuştan insan zihninde yer aldığı düşüncesine bağlı olarak anımsama teorisi ile mümkündür. Sonuç olarak insanın sezgi yetisi, ideaları (soyut nesneleri) anımsadığı gibi bu dünyadaki tikeller de ideaları anımsatmaktadır.

> "*Şunu da bilirsin ki, bu adamlar görünen şekilleri el*e alıp bunlar üzerine fikir yürütürken asıl düşündükleri bu şekiller değil, bunların benzediği başka şekillerdir. Asıl düşündükleri soyut dörtgen, soyut köşegendir, kendi çizdikleri köşegenler değil. Kendi çizdikleri şekilleri –ki ayrıca bunlarında gölgeleri ve suda görüntüleri vardır- birer yansı olarak kullanılır, yalnız düşüncenin görebildiği şekillere varırlar."[27]

Son söz olarak Platon matematiği, *algılanabilir* şeyler hakkında düşünerek *anlaşılır* dünyayı anlama çabası olarak tanımlar.[28] Çünkü Platon'un adamları kendi çizdikleri köşegenleri düşünmeyip buradan hareketle sadece *kavrayış*ın ulaşabildiği, zaman ve mekândan bağımsız, nedensellik ilişkisine girmeyen soyut nesneleri düşünmektedirler. Matematik nesnelerin varlığı sorunsalı, tam olarak bu *kavrayış*ın nasıllığı üzerine yapılan tartışmalarla birlikte 20. yüzyıla kadar kendi sakin sularında gitmekte olan matematik için fırtınalı havanın başlangıcı olmuştur.

20. Yüzyılda Matematik Felsefesi

19. yüzyılda ortaya çıkan iki önemli çalışma alanı, matematiğin temellerine dair felsefî ilgiyi ve tartışma ortamını geniş ölçüde arttırdı. Bunlar:

i) Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkışı: Bu yeni geometriler, matematiğin doğruluğu "zorunlu ya da apaçık aksiyomlara dayanır" genel kabulünü sarstı. Anılan yüzyıl içinde, János Bolyai (1802-1860), Nicolai Lobachevsky (1792-1856), Friedrich Gauss

27 Platon, *Devlet*, 510 d.

28 Ian Muller, "Mathematical Method and Philosophical Truth", *The Companion to Plato* içinde, haz. Richard Kraut (Cambridge: Cambridge University Press, 2005), s. 172.

(1777-1855), Bernhard Riemann (1826-1866) gibi matematikçiler tarafından birbirinden bağımsız olarak bugün “Euclides-dışı geometriler” olarak bilinen yüzey sistemleri ortaya konulmuştur.

Nokta, düz çizgi, düzlem gibi nesneler fizikseldünyada nesnel birer varlık mıdır ya da biz onlara dair bilgimizi gözlemden mi elde ediyoruz? Bu sorulara cevabımız olumlu ise, geometrik nesneler, örnek olarak nokta ve doğru üzerine bir önerme ortaya koyduğumuzda, bu iddiamızın temelde evrende bulunan noktalar ve doğrular üzerine olması gerekir. Antik dönemde kendinden önce ortaya konulan geometri yargılarını toplayan Euclides tam olarak bu yaklaşımı kullanmıştır. *Elementler* (*Stoikheia*) adlı eserinde kurmuş olduğu geometrik yapı, fiziksel evrende bulunan nesneler üzerine söz söylüyordu. Bu yüzden Euclides geometrisinde doğruluğu ispatlanmış önermelerin *evrensel olarak doğru* olduğu düşünülüyordu. Geometrik önermelerin doğruluğu dış dünya ile uyumlu olduğundan kabul edilen aksiyomlar ve postülatlar “apaçık doğru” olarak değerlendiriliyordu. Bu yaklaşım, “beşinci postülat” olarak bilinen paralel doğrular postülatının ispat edilmesi ya da ondan daha basit bir postülatın geliştirilmesi çabası sırasında yeni geometrinin mümkün olduğunun gösterilmesi ile yeniden değerlendirilmek zorunda kaldı.

Matematik felsefesinde Euclides uzaylarının tartışmaya açılmasına neden olan en önemli yargı, Kant’ın (1724-1804) uzayın gerçek yapısının *a priori* olarak bilindiği görüşüydü. Euclides-dışı geometrilerin kuruluşu Kant’ın bu görüşünü çürüttü. Poincaré, diferansiyel denklem çözümleri yapılırken, aslında Euclides-dışı geometrilerin kullanıldığını söyler. Bazı geometri problemlerinin Lobachevsky uzayında, Euclides uzayında olduğundan daha kolay çözüldüğünü fark eden Poincaré farklı uzay tanımları için genel görüşünü *La science et l’hypothèse* adlı eserinde şu şekilde ifade etmiştir:

1. Euclides-dışı geometriler de Euclides geometrisinin sahip olduğu mantıksal ve aksiyomatik özelliklere sahiptir.

2. Bütün geometrik uzaya ait yüzey tanımları eşdeğerdir. Dolayısıyla farklı uzayları tanımlayan hiçbir aksiyomatik sistem doğru geometriyi kendisinin inşa ettiğini iddia edemez.

3. Geometrinin aksiyomları ne *sentetik*, ne *analitik* ne de *a priori*dir. Onlar kılık değiştirmiş tanımlar veya uzlaşımlardır (*convention*).[29]

Poincaré'ye göre bütün yüzey geometrileri uzayın aynı özeliklerini inceler, ama her birisi kendi dilini kullanır. Kullandıkları dili belirleyen şey onları belirleyen aksiyomlardır. Bu nedenle, bir geometri başka bir geometriye dönüştürülebilir. Hangi geometriyi kullanmamız gerektiği hakkında temel bir kuralı takip ederiz: basitlik. Bu nedenledir ki çoğunlukla Euclides geometrisini kullanırız, çünkü kendi ölçeğimizde tanımladığımız fiziksel gerçeklik için o en basitidir.[30]

ii) Küme kuramı: Cantor ve Dedekind'in geliştirilmesinde ön ayak oldukları küme kuramındaki paradoks ve çelişkilere verilen cevaplar, matematiğin temellerini daha sorgulanır hâle getirdi.

Matematikte "sonsuz" kavramına nasıl yaklaşılmalıdır? Bu kavramın matematik işlemlerinde kullanımı ne şekilde tanımlanmalıdır? Daha açık bir ifadeyle, matematiksel nesnelere ilişkin olan ve içeriğinde "sonsuz" düşüncesini barındıran önermelerin bir doğruluk değeri var mıdır? Ayrıca bu önermeler matematik çalışmaları konularına gerçekten dâhil midir? Sonsuz kavramı matematikte soyut nesne olarak kabul edildiğinde nasıl bir akıl yürütmeyi takip etmeliyiz? Sonsuz, matematiksel nesne olarak kabul edilmeli midir?

Tüm bu soruların gölgesi altında, 19. Yüzyılda Georg Cantor tarafından yeni bir sayı türü teklif edildi. Bu sayılar ne zamanın sezgisinden ne de fiziksel dünyanın somut nesnelerinden soyutlamayla çıkartılabiliyordu. Bu sayılar $\aleph_1$, $\aleph_2$ gibi sayılardır ve büyüklükte doğal sayılar kümesinin öğe sayısının büyüklüğünü ($\aleph_0$) aşarlar. Bu sayıların fiziksel dünyayla hiçbir ilişkisinin olmaması bu aleflerin ($\aleph$) tanımından çıkar: Bu sayılar sonsuzluğu aşan sonsuzluklardır. *Sonsuz tek değildir ve hatta sonsuz tane sonsuz vardır.*

Cantor'un sonsuzları hiyerarşik bir sıraya sokan çalışmasını anlamak için, önce *sonsuz* kavramını nasıl tanımladığına bir bakalım. Eğer bir koleksiyon (kendisine eşit olmayan) bir alt koleksiyonuyla birebir eşlenebiliyorsa, o koleksiyon sonsuzdur ya da sonsuz sayıda eleman içerir. Matematikte saymaya başladığımızda aklımıza

29 Henri Poincaré, *Bilim ve Hipotez* (çev. Fethi Yüzel, 2. bs., Ankara: MEB Yayınları, 1964), s. 55-57.

30 Poincaré, s. 58.

gelen ilk sonsuzluk, doğal sayıların sınırsız olduğudur.[31] Doğal sayıların bir alt kümesi olan çift sayıların sayısı nedir? Cevap: sonsuzdur. Peki bu iki küme yani doğal sayılar ile onun alt kümesi olan çift sayılar kümesi birbiriyle eşlenebilir mi ya da aynı sayıda eleman içerirler mi?

Cantor'un süreklilik hipotezinin anlaşılması için verilen örneklerden biri "Hilbert Hoteli" paradoksu olarak bilinir:

> "*Çok zengin bir akrabanızdan size otel miras kaldı, içinde sonsuz tane odası olan bu oteli hayranlıkla gezerken aniden bir otobüs dolusu müşteri* geldi. Sonsuz tane müşteri getiren otobüsü yolladıktan sonra herkesi yerleştirmeye başladınız: 1. odaya 1. kişi; 2. odaya 2. kişi;… Sonsuz odalı otele sonsuz sayıda müşteriyi sığdırdınız. Derken lobiye indiğinizde bir de ne göresiniz? Elinde valiziyle bekleyen bir müşteriniz daha var. *İçinde sonsuz tane odası olan bir otelde* 'Size yerimiz kalmadı' deyip çevirmek ayıp olur. Birazcık düşünüp bir yolunu buldunuz ve her müşteriyi bir yan odaya kaydırıp boş kalan 1 numaralı odaya gelen müşteriyi yerleştirdiniz. Ne de olsa sonsuza bir ekleseniz yine sonsuz.
>
> Sonsuz tane iş yapmak sizi çok yordu. Tam yerinize oturup dinlenecektiniz ki bir korna daha duyuldu yine bir otobüs ve yine sonsuz tane müşteri. Ne yapardınız? Sonsuz çözüm bulunabilir; ama şık olan şu çözüme bakalım: Oteldeki müşterileri çift sayılı odalara kaydırıp, gelen yeni müşterileri de tek sayılı odalara yerleştirirseniz kimse açıkta kalmaz. Neticede doğal sayılar kümesi ile tek sayılar kümesi ya da çift sayılar kümesi aynı sayıda elemana sahiptirler. Bu durumda %0 dan sonra içgüdüsel olarak %1 in gelmesini bekliyoruz. Yani, doğal sayılardan daha büyük bir sonsuz. Tam sayıları ve rasyonel sayıları saydık. Elimizde sayılmayan gerçel sayılar kümesi kaldı. Yani, rasyonel sayılara irrasyonel sayıların eklenmiş hali, ya da başka bir deyişle bir sayı doğrusundaki bütün noktalar."[32]

İşte Cantor, gerçel sayıların sayılabilir sonsuzluktaki kümelerle eşleşemeyeceğini ispatlayarak, bu kümeleri içeren ve onlardan daha büyük olan başka bir kümenin var olduğunu gösterdi.[33] Böy-

---

31 William R. Everdell, *İlk Modernler* (çev. Hülya Kocaoluk, İstanbul: Yapı Kredi Yayınları, 2007), s. 73-77.

32 Nilüfer Karadağ, "*Süreklilik Hipotezi*", Bilim Teknik Dergisi (Ocak 2005): 70-71. Benzer paradoksların bulunabileceği bir diğer kaynak: Michael Clark, *Paradokslar Kitabı* (çev. Ahmet Fethi, 2. bs., İstanbul: Hil Yayıncılık, 2011).

33 Mark C. Chu-Carroll, *Good Math: A Geek's Guide to the Beauty of Numbers, Logic, and Computation* (Dallas Teksas: The Pragmatic Bookshelf, 2013), s. 131-135. Süreklilik Hipotezi'nin ispat edilmesinde Cantor köşegen tekniğini

lece, elimizde birbirinden farklı miktarda eleman içeren iki sonsuz küme oldu. Bu sonuç şu soruyu matematik tarihine hediye etmiştir: "Sonsuz sayıda eleman içeren bir küme var mıdır ki, eleman sayısı %0'dan büyük %1'den küçük olsun". Bu *Süreklilik Hipotezi* olarak adlandırılır. *Süreklilik Hipotezi*, böyle bir kümenin var olmadığını söyler. Bu sorunun öyküsü 1940'ta Kurt Gödel'in Süreklilik Hipotezi'nin Küme Kuramı aksiyomları ile tutarlı olduğunu ispatlaması ve ardından 1963'te Paul Cohen'in bu hipotezin tersinin de küme kuramı aksiyomları ile tutarlı olduğunu ispatlaması ile son buldu. Yani, bu sorunun cevabı bilinemez, belirsizdir. Matematikteki mevcut aksiyomlarla "Böyle bir küme vardır" veya "Böyle bir küme yoktur" şeklinde bir cevabın verilmesi imkânsızdır.[34]

Euclides-dışı geometriler ve Küme Kuramı'nın neden olduğu paradokslar neticesinde matematik felsefesi kendi temellerini daha sıkı sorgulamaya başlamıştır. 20. yüzyılın başında tüm seçkin matematikçilerin bu sorgulamadan uzak kal(a)mamış olması konunun önemini göstermeye yeter düşüncesindeyiz. Bu sorgulama, oluşan çelişkiler ile tanımlanamazlık sorununa cevap vermeye çalışan üç farklı felsefi tavır geliştirilmiştir: Mantıkçılık (*Logicism*), Biçimcilik (*Formalism*) ve Sezgicilik (*Intuitionism*).

Mantıkçılık: Frege'nin çalışmaları ile göz alıcı felsefî bir girişim olarak 19. yüzyılın sonunda teklif edilen mantıkçı yaklaşımın ilk denemeleri Dedekind tarafından yapılmıştır. Ancak sistematik bütünlüğe ulaşması Frege ile gerçekleşmiştir.[35] Mantıkçı ekolün temel yaklaşımı şudur: Aritmetiği oluşturan bütün öğeler ve bütün aritmetik doğrular ve kanıtlama kuralları mantıktan türetilebilir.[36] Yapılması gereken şey, aritmetik doğruların tümünün mantıktan, yalnızca mantıktan türetilebileceğini gösterebilmektir. Bu konuda başarının sağlanması için, öncelikle aritmetiği tamamen karakterize eden bir aksiyomlar kümesi ortaya konulmalıdır. Eğer aksiyomlar eksiksiz ise bütün aritmetik doğrular bu aksiyomlardan türetilebilir.

kullanmıştır. Ayrıntılı açıklama zikredilen kaynakta bulunabilir.

34 Halil İbrahim Karakaş, *Matematiğin Temelleri* (2. bs., Ankara: ODTÜ Yayıncılık, 2011), s. 76-78.

35 Gottlob Frege, *Aritmetiğin Temelleri: Sayı Kavramı Üzerine Mantıksal - Matematiksel Bir İnceleme* (çev. H. Bülent Gözkân, İstanbul: Yapı Kredi Yayınları, 2008).

36 Frege, s. 80.

Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkması ile yukarıda da belirtildiği gibi apaçık olarak görülen aksiyomların varlığı ve doğruluğu tartışmaları yeni bir mevzi bulmuş, aritmetiğin dayandığı yapı, süreklilik, ardıllık, fonksiyon, limit ve sonsuzluk gibi kavramlar daha sıkı incelenmeye başlamıştır. Aritmetiğin aksiyomatik yapısını kurmak için ilk adımını doğal sayıları tanımlamak amacıyla atması, beklenilen bir gelişmedir.

Tüm bu felsefî tartışmaların arasında o dönemde adı çok duyulmamış bir matematikçi tarafından doğal sayılar kümesine dair aksiyomatik bir sistem teklif edilmiştir. 1889 yılında Guiseppe Peano kendi ismiyle anılan aksiyomları ortaya koymuştur:

1. Sıfır bir sayıdır.
2. Bir sayının ilk ardılı da bir sayıdır.
3. Sıfır hiçbir sayının ardılı değildir.
4. Aynı ilk ardıla sahip iki sayı yoktur.
5. Sıfıra ait bir özellik ve bu özelliğe sahip her sayının ilk ardılına ait bir özellik, tüm sayılara da aittir.[37]

Görüldüğü gibi Peano aksiyomları, anlamı bilindik ve açık varsayılan *sayı, sıfır* ve *ardılı olma* terimleri arasındaki mantıksal ilişkiler bütünü olarak ortaya konmuştur.[38]Frege, Peano aksiyomlarını kullanarak aritmetiği mantık ilkelerinden temellendirmeye başlar.

Mantıkçı yaklaşımın en önemli başarısı, klasik matematiğin tek bir formel sistem altında tanımlanabileceğini göstermek olmuştur. Bu nokta, Hilbert tarafından matematikte aranan tutarlılığın gösterilmesinde sağladığı kolaylık açısından önemlidir.

Biçimcilik: Mantıkçılık, matematiği kendi dışında bir alana, mantığa giderek temellendirmeyi öngörüyordu. Formalizm ise, temellendirmeyi matematiğin kendi zemini içinde kalarak yapmak hedefindedir. Biçimci felsefede matematik soyut nesne ve ilişkileri konu alan simgesel bir sistemdir ve kullanılan terimler *anlamsız birer simge*, tümceler ise *içerikten yoksun birer önerme* kalıbıdır.[39]

37 Karakaş, s. 54-55.

38 Peano aksiyomlarından tüm sayı kümelerinin ve basit matematik işlemlerin nasıl çıkarılacağına dair anlaşılır bir anlatım için bkz. Jerry P. King, *Matematik Sanatı* (çev. Nermin Arık, Ankara: Tübitak Popüler Bilim Kitaplığı, 1999), s. 47-77.

39 Cemal Yıldırım, *Matematiksel Düşünme* (İstanbul: Remzi Kitapevi, 1996), s. 93-96.

Biçimciliğin kabullerinden biri matematiksel nesnelerin gerçekte var olmadığıdır. Fakat var olmamakla birlikte matematiksel nesneler, fiziksel dünyayı betimleyebileceğimiz, kurallardan ve simge kullanımlarından oluşan *biçimsel bir yapının* kurulmasına hizmet eder. Matematikte biçimci yaklaşım, Platonculuğun matematiksel nesneleri gerçek nesneler olarak görmesine, zaman ve uzam dışındaki soyut nesnelerin varlığına karşı bir duruştur.

Genel olarak bir biçimciye göre, matematiksel nesneler ya da matematiksel gerçeklik bizim kanıt oluşturma yeteneğimizde yatar. Bunu geçerli kılmak için, satranç oyununda olduğu gibi kurallar dizgesi belirlenir ve bunları temsil eden simgeler kullanılarak kanıtlar geliştirilir. Biçimcilik, matematiği sadece ilişkileri tanımlayan ve sarsılmaz, yanılmaz bir simgeler dizgesi üzerine oturtmaya çalışır. Kural dizgeleri matematikte "aksiyom" adını alır. Biçimciler, aksiyomatik yapıların tutarlı ve eksiksiz olduklarını ispatlamayı, matematiğin önündeki en önemli hedef olarak belirleyip 1900 yılında Hilbert'in teklifi ile programa dönüştürdüler.

Hilbert programının önüne hedef olarak koyduğu ve dizgelerin kuruluşunda yer alan aksiyomatik sistemlerin iki temel özelliği olmalıdır:

i) Eksiksizlik: Eğer bir aksiyomatik sistemin aksiyomları, üzerine söz söylediği şey hakkında ileri sürülebilecek bütün hipotezlerin *doğruluk değeri*ne karar verebilmemize olanak sağlarsa, sistem *eksiksiz*dir. *Karar verebilme* ise hipotezin veya bu hipotezin olumsuzunun, sistemin aksiyomlarından türetilebilmesi ile mümkündür. Eğer hipotez aksiyomlardan türetilebilirse, *teorem*dir. Eğer hipotezin olumsuzu aksiyomlardan türetiliyorsa, hipotezin olumsuzu da *teorem*dir. Eğer sistemin aksiyomlarından hipotez ne olumlanabiliyor ne de olumsuzu türetilebiliyorsa, sistem *eksik*tir. Aksiyomatik sistem, bir hipotezin teorem olup olmadığına sonlu işlem basamağından sonra karar verebilmelidir.[40] Bu kriter daha sonra Alan Turing "Evrensel Makine"sinin geliştirilmesiyle sonuçlanacaktır.

ii) Tutarlılık: Bir aksiyomatik sistem için tutarlılık, sistemin çelişkili aksiyomlara sahip olmamasıdır. Sadece tutarlı bir aksiyomatik sistem doğrulanmış önermeleri türetebilir. Eğer sistemin aksiyomları çelişkili ise, sistem birbiriyle çelişen *hipotez*leri teorem yapar.

40 Douglas R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: Bir Ebedi Gökçe Belik - Lewis Carroll'un İzinde Zihinlere ve Makinelere Dair Metaforik Bir Füg* (çev. Ergün Akça ve Hamide Koyukan, İstanbul: Kabalcı Yayınevi, 2001), s. 129-149.

Yani üzerine söz söylenen alanla ilgili hem doğru hem de yanlış hipotezler teoreme dönüşür.[41]

Bu iki kriterin konulması ile aksiyomların nasıl inşa edilmesi gerektiği belirlenmiş olur. Matematik yargıların temelinde yer alan aksiyomların “apaçık doğru” olduğu inancı Euclides-dışı geometriler ve Küme Kuramı ile sarsılınca aksiyomların sezgilerimizle tanımlanması fikri değerini yitirdi. “Apaçık doğru” değerini aksiyomlara veren sezgi idi. Ancak, sezginin fiziksel dünyaya teması *dil* üzerinden oluyordu. Biçimci yaklaşım bu tip dilsel kullanımın paradokslara neden olduğunu düşündü. Matematik ispat süreçlerinden dilin unsurlarını kaldırmak için kendiliğinden anlam yüklü olmayan sembollere yöneldiler. Yukarıda belirtildiği gibi anlam değeri olmayan bu işaretler ile aksiyomatik sistemlerin kurulması ana hedefti. Gödel ile tüm aksiyomatik sistemlerin eksiksiz ve tutarlı olabileceği öngörüsü, bir daha geri dönmemek üzere matematik felsefesinden uzaklaştı. Diğer taraftan aksiyomatik sistemler kullanılarak ispat edilen teoremler için Gödel’in Eksiklik Teorisi’nin geçerli olmadığına değinmek gerekmektedir. İspatı verilen bu teoremler “*anlam taşımayan işaret dizgeleri*” ile biçimcilik (*formalism*) kullanılarak tanımlanabilir.

Sezgicilik: Kavram ve çıkarımlara somut içerik sağlayan sezgiyi matematiğin geçerli yöntemi olarak gören bu yaklaşım kısaca sonlu adımda inşa yöntemiyle matematiğin, sezgisel olarak doğal sayılar üzerine kurulabileceği tezini içerir.[42] Sezgicilerin yaklaşımı, olmayana ergi yöntemini kabul etmemektedir. Bu yöntemde, bir şeyin varlığının, “yok olması” kabulünden başlayarak ispat edilmeye çalışılması, herhangi bir teoriye inşa edilebilir zemin sunmamaktadır. Varlık, kendisi ontolojik olarak tanımlanamayan yokluk ile gösterdiğinden bu ilişkililiğin anlamsız/yapı kuramaz olduğu öne sürülmüştür.

Kısaca sezgiciler matematiğin ne mantığa indirgenmesini ne de tutarlılık için içerikten yoksun simgesel bir dizgeye dönüştürülmesini doğru bulmaktadırlar. Tutarlılıktan çok, sezgisel verileri, zihinsel inşaların oluşturduğu kanıtları öncelerler. Önde gelen sezgicilerden Brouwer’e göre, matematik insan zekâsının etkinliği, yaşamın “doğal” olgularından biridir.[43]

41 Hofstadter, s. 129-149.

42 Yıldırım, s. 97.

43 Yıldırım, s. 99.

Matematik felsefesine ait değindiğimiz tüm görüşlerin peşinde koştuğu "zemin" sorununu geri dönülmez nitelikte tanımlayan kişi Gödel olmuştur.[44]Gödel tarafından teklif edilen Eksiklik Teorisi'nin genel anlamı şu şekilde verilebilir: Tutarlı ve eksiksiz bir aksiyomatik sistem kurmak mümkün değildir. Aksiyomatik sistemden kastedilen sadece matematik değil, tüm formel sistemlerdir. Diğer bir ifadeyle, "sistemimizi yeni aksiyomlar ekleyerek ne kadar genişletirsek genişletelim, sistemin içindeki kavramlarla ifade edilebilecek ama sistemin kuralları kullanılarak doğru veya yanlış olduğu gösterilemeyecek veya hem doğru hem de yanlış olduğu gösterilebilecek, önermeler" bulunacaktır. Yeni tanımlar ve aksiyomlar ekleyerek bu önermeleri ispat edebilir yani doğru veya yanlış olduğunu gösterebilir ve çelişkileri ortadan kaldırabiliriz. Ancak yaptığımız eklemeler bu türden yeni önermeler ortaya çıkaracaktır. Sonuç olarak matematik eksiksiz bir formel sistem hâline getirilemez.[45]

Gödel'in,[46] matematik felsefesinde dönüm noktalarından birini işaret eden makalesinde kanıtladığı teoremler şunlardır:

1. Bütün aritmetiksel doğruları ele geçirmek amacıyla ortaya konmuş mevcut en geniş iki biçimsel sistem (Principia Mathematica ve Zermola-Freankel sistemleri[47]) eğer iç tutarlılığa sahipse, bu sistemlerin aksiyomları ve çıkarım kuralları yardımıyla doğruluğuna veya yanlışlığına karar verilemeyen aritmetiksel önermeler vardır.

2. Bu sistemler kendi tutarlılıklarını, kendilerini inşa eden aksiyomlara dayanarak kanıtlayamaz.

Gödel, matematiksel nesneleri biçimselci gelenek gibi anlam yüklü olmayan simgeler topluluğu olarak görmez. Onların saf mantıksal ilkelerden türetilebileceğini de düşünmez. Diğer taraftan Gödel'in matematiksel nesnelere ve onların bilgisine bakışı matematik felsefesinde sezgici gelenekle benzerlik gösterir. Gödel, matematiksel nesnelerin bilgisine ulaşmada sezgici geleneğe yakındır. Fakat matematiksel nesnelerin varlığı konusunda sezgici gelenekten ayrılır. Gödel bir Platoncudur: Matematiksel nesnelerin

44 Kurt Gödel, *Principia Mathematica ve İlişkili Dizgelerin Biçimsel Olarak Karlaştırılamayan Önermeleri Üzerine – I* (çev. Özge Ekin, İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, 2010).

45 Ernest Nagel ve James R. Newman, *Gödel Kanıtlaması* (çev. Bülent Gözkân, 2. bs., İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, 2008).

46 Kurt Gödel, *Principia Mathematica.*

47 Chu-Carroll, s. 140-147.

(örneğin sayılar, kümeler, matematiksel operatörlerin vb.) onları düşünen zihinden bağımsız olarak var olduğunu düşünür.[48]

> "... (Euclides-dışı) geometride bugün genellikle benimsenen anlam matematiksel sezgiden çok fiziğe gönderme yapar ve bu nedenle böyle bir karar, matematiğin dışında kalır. ...sonlu-*ötesi (transfinite*) küme kuramının nesneleri, açıkça fiziksel dünyaya bağlı değildirler ve fiziksel deneyim ile olan dolaylı bağlantıları bile çok gevşektir (bunun başlıca nedeni küme kuramsal kavramların bugün fiziksel kuramlarda sadece küçük bir rol oynamasıdır).
>
> Yine de duyu tecrübelerimizden uzaklıklarına rağmen, aksiyomların kendilerini bize, doğru kabul ettirmeleri olgusunda görüldüğü üzere, küme kuramının nesnelerinin algısına benzeyen bir şeye sahibiz. Bu tür bir algıya, yani matematiksel sezgiye duyu algısından daha az güvenmemiz *için bir sebep göremiyorum.*"[49]

Gödel'in içinde bulunduğu mantıkçı pozitivistler, temel olarak "Fiziksel nesneler var mıdır?" veya "Matematiksel nesneler var mıdır?" gibi geleneksel felsefi soruları anlamsız sorular olarak görme eğilimindeydiler. Ancak, Gödel için bu iki metafiziksel soru da anlamlı ve cevabı verilebilir sorulardır. Ayrıca bu iki soru bir anlamda aynı kategoride ele alınabilir. Basitçe Gödel, matematiksel nesnelerin "zamandan, mekândan ve zihinden bağımsız varlığı" sorusunun, "dış dünyanın nesnel varlığını soran sorunun tam bir kopyası" olduğunu düşünür.[50]

Bu bölümde incelenen 19. yüzyılda matematiğin temellerine dair *eksiksiz* ve *tutarlı* bir varlık zemini inşası için çözüm arayan üç felsefi tavır dışında klasik platoncu felsefeyle paralellikler taşıyan önemli bir yaklaşım daha vardır: Matematiksel platonculuk.

Matematiksel "platonculuk"

Matematiksel platonculuk[51] temel olarak, matematiksel nesnelerin zamandan, mekândan ve onu düşünen insan zihninden bağım-

48 Kurt Gödel, "Cantor'un Süreklilik Problemi Nedir?", *Matematik Felsefesi* içinde, ed. Bekir S. Gür (Ankara: Kadim Yayıncılık, 2004).

49 Gödel, "Cantor'un Süreklilik Problemi Nedir?", s. 235-236.

50 Gödel, "Cantor'un Süreklilik Problemi Nedir?", s. 237.

51 Matematiksel nesneler üzerinden kurulan bu felsefî yaklaşımı klasik Platon yaklaşımından ayırmak için genellikle küçük 'p' kullanılarak yazılır.

sız olarak var olduğunu iddia eden felsefî görüştür. Bu bakımdan matematiksel nesneler, örnek olarak kümeler, sayılar ve matematiksel operatörler vb. kendinde nesneler olarak vardır. Diğer taraftan Hilbert tarafından savunulan biçimcilik (*formalizm*) düşüncesin ise, matematiğe adcı (*nominalist*) çerçevede yaklaşmaktadır. Sayılar, kümeler ve matematiksel operatörler vb. soyut kavramlar fiziksel gerçeklikten bağımsız nesneler olarak var olamazlar. Matematiğin temel nesneleri, rakamlar, işaretler, simgelerdir.

Klasik Platonculuk ile ilişkili görülebilse de matematiksel platonculuk daha fazla teorik matematik ile desteklenen, kendi iç iddialarının geçerliliği fiziksel nesnelerin niceliksel değerleri ile karşılaştırabilir formda ifade edilmeye çalışılan önemli bir felsefî ekoldür. Platonculuğun günümüzdeki yorumunu ortaya koyan ilk düşünür/mantıkçı Gottlob Frege'dir.[52] Ayrıca her ne kadar yeni platonculuk akımını genel olarak onaylamayacak olsalar da hayatlarının bir döneminde platonculuğa yakın olan isimler arasında Kurt Gödel,[53] Bertrand Russell[54] ve W.V.O. Quine'i[55] anmak mümkündür.

Matematik felsefesinde kullanıldığı anlamıyla "Platonculuk", Platon'un "idea"lar anlayışını tartışmaya açtığı diyaloglarına kadar geriye gider. "İdea"lar "başı sonu olmayan", "değişmeyen" ve "fiziksel olmayan" varlıklar olarak ifade edilebilir. Bu ideaların inşa ettiği gerçeklik uzayı, matematikte ifade edildiği şekli ile platoncuların "matematik nesne"lerinin var olduğu "mekân"dır. Platoncu matematik felsefesi anlayışına getirilen en önemli eleştiri, fiziksel varlıkların platoncu nesnelerin gerçekliği ile nasıl etkileşime gireceklerinin belirlenmiş ya da çerçevelenmiş olmamasıdır. Yine de platonculuk, matematik felsefesi anlayışları arasında geçerliliğini korumaya devam etmektedir. Bu güçlü duruşun en önemli nedeni Gödel tarafından inşa edilen eksiklik ilkesinin imalarıdır.[56]

52 Gottlob Frege, *Aritmetiğin Temelleri: Sayı Kavramı Üzerine Mantıksal - Matematiksel Bir İnceleme* (çev. H. Bülent Gözkân, İstanbul: Yapı Kredi Yayınları, 2008).

53 Gödel, "Cantor'un Süreklilik Problemi Nedir?", 235-238.

54 Bertrand Russell, *Felsefe Sorunları* (çev. Vehbi Hacıkadiroğlu, 2. bs., İstanbul: Kabalcı Yayınları, 2000).

55 W.V.O. Quine, *From a Logical Point of View* (2nd ed., New York: Harper and Row, 1961).

56 Gödel, "Cantor'un Süreklilik Problemi Nedir?", s. 237. Bu sonuç, "Her aksiyomatik sistem için bu türde sonsuz sayıda karar verilemez önerme vardır" genel ifadesinden çıkar.

Matematiksel platonculuk ya da gerçekçilik (*mathematical realism*) ile tartışmanın diğer ucunda bulunan adcılık (*nominalism*) arasındaki uzun soluklu gidiş gelişler matematik felsefesinin önemli tartışma alanlarından birini oluşturmaktadır. Matematik nesnelerin gerçekliği sorunu olarak işaret edebileceğimiz bu tartışma, felsefedeki benzer tartışmaların izlerini taşımaktadır. Bu izlerin daha kolay takip edilebilmesi adına Platon tarafından tanımlanan "idealar" teorisi ilk bölümde özetlenmişti.

Matematik felsefesi "Matematik önermeler ve teoriler ne hakkındadır?" sorusu ile ilgilenir. Bu tür "cümle ve önermeler" doğrudan varlığı kesin olan nesneler hakkında konuşuyormuş hissi vermektedir. Örnek olarak "3 asal sayıdır" önermesi en basit özne-yüklem cümlesine "A nesnesi F özelliğine sahiptir (A, F dir)" benzemektedir. Aynı "Ay yuvarlaktır" önermesinde olduğu gibi. Bu ikinci önermede Ay'ın varlığına dair doğrudan bir ima vardır. Varlığından şüphe edilemeyen ve gözlemlenen bir şey hakkında ancak bu şekilde bir cümle kurulabilir. Bu durumda "3 asal sayıdır" önermesi gözlemlenebilir bir varlığı işaret etmelidir. Ancak felsefeciler için tartışmanın çatallandığı nokta burasıdır. "3 sayısı"nın varlık sahibi olmasının dayanağı nedir? Ne tür şeyler *sayı*dır? Matematik felsefecileri içinde bulunan *adcılar* sayıların var olmadığını iddia etmektedirler. Diğer taraftan *gerçekçiler* (*realist*) ise sayıların var olduğunu düşünmektedirler. Ancak ne tür bir varlıktan bahsedildiği konusunda farklı seçenekler öne sürülmektedir: Kimi düşünürler sayıların zihinsel (*mental*) olduğunu söylerken, diğerleri fiziksel dünya benzeri bir dış varlık düzleminde bu sayıların mekân tuttuğunu ileri sürmektedirler. Bu son yaklaşım genel olarak "matematiksel platonculuk" olarak bilinir. Bu yaklaşıma göre sayılar ve diğer matematik nesneler, uzay-zamanın dışında vardırlar ve varlıkları özel olarak "soyut nesneler" (*abstract objects*) olarak tanımlanır. Bu tür nesneler bütünüyle fiziksel olmayan, zihinsel olmayan, süredurandırlar ve nedensel olarak tesirsizdirler. Bir başka ifade ile diğer nesneler ile neden-sonuç ilişki içinde bulun(a)mayan nesnelerdir. Netice olarak platonculara göre "3" sayısı aynı "Ay" gibi vardır. Ancak bu var olma uzay-zamanın içinde değildir, bizim düşüncelerimizden ayrıdır ve "Ay"ın varlığından *fiziksel olmaması* ile ayrılır. Sayılar gerçektir, nesneldir; bizden, düşüncelerimizden ayrıdır ve uzay-zamanda yer almazlar.

Gelinen noktanın bizi içine bıraktığı *sorun*a daha yakından baktığımızda önemli bir ayrımın eşiğine geldiğimiz görülmektedir. Matematik felsefesi epistemolojik bir temel üzerinden mi inşa edilmektedir yoksa ontolojik bir temel üzerinden mi? Ontolojik teori "şey"lerin var olup olmadığı hakkındadır ve önermenin doğruluğu nesnenin *varlıkta karşılık* bulması ile belirlenir. Örnek olarak "Uçan pembe bir fil gördüm" önermesi yanlıştır. Çünkü uçan pembe fil yoktur. Ancak "Uçan bir leylek gördüm" önermesi ise "uçan bir leylek" *görüldüğünde* doğrudur. Bu açıdan yaklaştığımızda matematikçilerin önermeleri de varlık açısından incelenmelidir. Bu noktada üzerine eğilmemizi gerektiren en önemli bakış açısı *semantik teori*dir. Deneysel yaklaşım üzerine kurulan semantik teori, ifadelerin anlamını ya da neyi işaret ettiğini ve işaret edilenin tecrübe ile uygunluğunu inceler. Örnek olarak "Boğaziçi Köprüsü"nün bir telefon markası olduğunu söylemem halinde bu ifade yanlıştır ancak "'Boğaziçi Köprüsü', Avrupa ve Asya kıtalarını bağlar" dediğimde bu semantik teoriye göre "doğru" değerini alır. Matematik felsefesi de semantik teoriyi içerir. Çünkü matematik, cümlelerin ya da önermelerin nasıl yorumlanacağını gösterir. "3" rakamının hangi nesneleri işaret ettiğini ve nasıl yorumlanması gerektiğini söyler. Matematiksel platonculuğa göre "3" rakamı soyut nesneleri işaret etmelidir.

Matematik felsefesinin bir başka yorumu olarak *zihinselcilik* (*psikolojizm*) rakamların zihinsel nesneleri işaret ettiğini söyler. Bu durumda platoncu görüş için soyut nesneler vardır ancak *zihinselci* yaklaşım için nesnelerin varlığı yoktur. Bu matematik felsefesinde, varlık teorilerine dair önemli ayrım noktalarından biridir.

Böylece matematik felsefesindeki temel yaklaşım olarak inceleyeceğimiz platonculuk, hem *semantik*, hem *ontolojik* hem de *nedensellik* ilişkilerini kullanmaz iken fiziksel dünyanın rasyonel sonuçlarını/çıktılarını tüm bu (ilk bakıştaki temassız) özellikleri kendi bünyesinde taşımasına rağmen açıklayabildiği için düşünce tarihi boyunca dikkatleri çekmiştir.

Matematiksel platonculuğa göre, (a) zaman-mekâna sahip olmayan, fiziksel olmayan ve zihinsel olmayan soyut matematik nesneler vardır ve (b) matematik teoriler bu nesnelerin doğru tanımlamasını verir. Genel çerçevesi bu şekilde çizilen platonculuk, düşünce tarihi içinde birçok felsefeci ve matematikçi tarafından onaylanmıştır. Platon bu düşüncenin ilk nüvelerini idealar teorisi ile ortaya koymuş ve klasik Platonculuğu kurmuştur. Son iki yüzyılda yaşayan Frege, Gödel, kimi yazılarındaki tavrı ile Quine, Maddy Penolope, Michael D. Resnik, Mark Balaguer, Roger Penrose gibi matematikçi, felsefeci ve mantıkçılar genel çerçevesi ile matematiksel platonculuğu kabul etmişlerdir. Frege'nin[57] çerçevesini çizdiği platoncu yaklaşım Balaguer[58] tarafından şu şekilde yeniden ifade edilmiştir:

(1) Matematiksel teoriler deneysel bilimler için ilk elden gerekli ve vazgeçilmez görünmektedir. Bu ise ancak matematik teorilerin doğru olması halinde mümkündür. Öyleyse,

(2) "3 asal sayıdır" önermesinde olduğu gibi matematik teorilerini oluşturan ifadeler doğrudur. Üstelik, öyle ki,

(3) "3 asal sayıdır" cümlesi itibari değeri (*face value*) ile belirlenmelidir. Felsefeciler "3 asal sayıdır" cümlesini mantıksal formda "A, F dir" şeklinde ifade ederler. Böylece, öne sürülen "3 asal sayıdır" cümlesi "Mars kırmızıdır" cümlesi ile aynı mantıksal formdadır. Her iki cümle de öne sürülen, *kesin olarak bilinebilen nesnelerin* doğaları hakkındadır.[59] Biri Mars'ın doğası hakkında konuşurken diğeri 3 sayısının doğası hakkında bilgi öne sürmektedir. Ancak;

(4) Eğer "3 asal sayıdır" cümlesinin doğruluğunu onaylar ve ayrıca itibarî değerini aynı kabul edersek, bu sonuç yüklemin işaret ettiği şeyin varlığına inanmayı mümkün kılar. Örnek olarak, eğer "3 asal sayıdır" ifadesini 3 sayısının doğası hakkında doğrudan öne sürülen bir yargı olarak kavrarsak ve eğer bu cümle ifade olarak (*literally*) doğru ise, sonrasında 3 sayısının varlığına inanmayı mümkün kılarız. Ancak;

(5) Eğer matematik nesneler gibi "şey"ler varsa (matematik teorilerimizin işaret ettiği şeyler gibi), öyleyse bunlar soyut nesnelerdir. Örnek olarak, eğer 3 sayısı gibi şeyler varsa, bunlar fiziksel ve zihinsel olmayan soyut nesnelerdir. Öyleyse,

(6) Soyut matematiksel nesneler gibi "şey"ler vardır ve matematik teoriler bunların doğru tanımlarını sağlar. Neticede, matematiksel platonculuk doğrudur.

Bu akıl yürütme dizisi genel olarak "Quine-Putnam Zorunluluk Argümanı" olarak adlandırılır.[60] Matematiğin uygulama alanını önceleyen ilk akıl yürütme Frege'nin temel argümanını oluşturur. Bu argüman dizisine farklı açılardan itiraz geliştiren platoncu olmayan yaklaşımlar bulunmaktadır. Platoncu olmayan kamp te-

57 Frege, *Aritmetiğin Temelleri.*

58 Mark Balaguer, *Platonism and anti-Platonism in Mathematics* (Oxford: Oxford University Press, 1998).

59 "Kesin olarak bilinebilirlik" mantıksal önermelerin kuruluşunun ön kabulüdür.

60 Balaguer, s. 95-98.

melde ikiye ayrılmış görünmektedir, bir tarafta gerçekçi (*realist*) görüş yer alırken diğer tarafta *gerçekçi olmayan* (*anti-realist*) ya da adcı (*nominalist*) yaklaşım bulunmaktadır. Adcı yaklaşım matematik nesnelerin varlığını reddetmektedir. Bir diğer ifade ile adcılar matematiğin herhangi bir ontolojik önerme ortaya koyabileceğini imkân dışı görmektedirler. Böylece matematik teorilerinin dünyanın bir kısmına dair doğru bir tasvir imkânına sahip olabileceğini inkâr etmektedir. Gerçekçi platoncu olmayan kamp ise, var olan dünyanın matematik teoriler ile açıklanabileceğini imkân dâhilinde görürken, teorilerin dayanağını teşkil eden nesnelerin soyutluğunu kabul etmemektedir.

Bu genel çerçeve içinde gerçekçi platoncu olmayan kamp, 5'nolu öncülü kabul etmez iken adcılar 4, 3 ve 2'nolu öncülleri hangi alt adcılık tavrını tercih ettiklerine bağlı olarak reddetmektedirler. Kendilerini ait hissettikleri yaklaşım yeni-Meinongcu ise 4'nolu, açıklayıcı nominalistler (*paraphrase nominalists*) 3'nolu, ve kurgusal (*fictionalists*) nominalizm ise 2'nolu öncülü kabul etmemektedir. 2'nolu öncülün 1'nolu öncül ile içten sıkı sıkıya bağlı olduğu düşünüldüğünde tüm öncüller platoncu olmayan yaklaşımlar tarafından eleştirilmiş ve reddedilmiştir.[61] Bu yaklaşımların hangi noktalarda platoncu yaklaşımdan ayrıldıklarının ayrıntıları literatürde bulunabilir.

Gelinen noktada sorulması gereken sorular şu şekilde sıralanabilir: Nedensel ilişkileri kuramayan bir nesnenin var olması ile olmaması arasındaki fark nedir? Nedensellik ilişkisine sahip olmayan bir şey nasıl bilinebilir? Bir şeyin kendinde şey olarak bilinmesi ne derece mümkündür? Kendinde şeylik nedensellik ilişkisini nasıl kurabilir?

Platonculuk, yukarıda belirtildiği gibi, soyut nesnelerin bulunduğunu söyleyen felsefi yaklaşımdır. Soyut nesneler zaman ve mekânda bulunmayan ayrıca fiziksel ve zihinsel olmayan nesnelerdir. Ayrıca diğer süreçler ile herhangi bir neden sonuç ilişkisine girmezler ve zaman içinde değişmezler. Tüm bu tanımlamaların neyin olmayacağını işaret etmesi her ne kadar kafa karıştırıcı görünse de aşağıda verilecek örnek ile açıklamanın eksikliği tamamlanabilir. Sayı örneğinde olduğu gibi birçok felsefeci "nitelik"lere dair Platoncu yaklaşıma sahiptir. Örnek olarak "kırmızı" özelliğini ele alalım. Niteliklerin Platoncu yaklaşımına göre, *kırmızılık* özel-

61 Balaguer, s. 130-132.

liği "kırmızı şeyler"den bağımsız olarak vardır. Etrafımızda kırmızı top, kırmızı gömlek ya da kırmızı masa vardır ancak bunların tümü fiziksel dünyanın içinde yer alır. Niteliklere dair klasik Platoncu açıklamada bu "şey"lere ek olarak *kırmızılık* da *var*dır. Bilindik kırmızı şeyler, kırmızılığın örnekleri ya da temsilleridir. Platon'a göre "kırmızı" şeyler "kırmızılılık"tan *pay alırlar* ancak bu "kırmızı" nesneler ile "kırmızılık" arasında nedensellik ilişkisini ima ettiğinden günümüz platoncuları tarafından kabul edilmeyecektir.

Yıllar içinde platoncu olmayan felsefeciler platonculuğa karşı birçok iddia ortaya koydular. Bunlardan en etkili olanı *bilgi kuramsal iddia* (*epistemological argument*)dır. Bu iddia Platon zamanına kadar eskiye gitmesine rağmen 1973 yılında Paul Benacerraf'ın *Mathematical Truth* isimli makalesinde yayımladığı şekliyle dikkatleri yeniden kendi üzerine çekmiştir.[62] Matematik felsefesi alanında bu konu hakkındaki birçok çalışma, sayılar gibi matematiksel nesnelerin platoncu yorumu bağlamında yer almaktadır. Aşağıda verilen iddialar dizisi her ne kadar sadece sayılar bağlamında dile getiriliyorsa da tüm soyut nesnelere genelleştirilebilir.

İnsan teki tamamen mekân-zamanda var olur.

Eğer bir yerlerde soyut matematik nesneler varsa, bunlar mekân-zamanda var olmazlar. Öyleyse, mümkündür ki:

Eğer bir yerlerde soyut matematik nesneler varsa, insan teki onların bilgisini elde edemez. Öyleyse;

Eğer matematiksel platonculuk doğru ise, insan teki matematik bilgisini elde edemez.

İnsan teki matematik bilgisine sahiptir.

Matematiksel platonculuk doğru değildir.

(3) iddiası dizinin en önemli adımıdır. Eğer doğrulanırsa (4) ve (5) hiç sorunsuz (3)'ü takip eder ve (6) ise (4) ve (5)'ten doğrudan çıkartılır. Ancak, (1) ve (2) doğrudan (3)'ü gerektirmez, tam bu nokta da matematikçi platoncular için kendi itirazlarını geliştirecekleri manevra alanını oluşturur. (1) ve (2) ilk bakışta (3) için kuvvetli bir destek zemini oluşturmaktadır. Çünkü eğer bir yerlerde matematik nesneler varsa bunların bizim için ulaşılamaz olduğunu ima ediyor. Diğer bir deyişle, matematik nesnelerden insan tekine bilgi aktarımı olmamaktadır. Ancak bu insan tekinin matematik nesne-

62 Makalenin Türkçe çevirisi için bkz. Paul Benacerraf, "Matematiksel Hakikat", *Matematik Felsefesi* içinde, ed. Bekir S. Gür (Ankara: Kadim Yayıncılık, 2004), s. 239-264.

lerin bilgisini elde edip edemediğine dair belirsizlik oluşturmaktadır. Sonuç olarak, bu iddianın platonculuğu reddetmediğini ama *sorgulayıcı* nitelikte olduğunu düşündürür. Sorgulamanın içeriği, basitçe insan tekinin soyut matematik nesnelerin bilgisini nasıl elde edebildiğini açıklamalıdır.

Platonculuk açısından üç farklı cevap imkânı vardır. İlki, (1) iddiasının yanlış olduğunu ve insan zihninin bir şekilde soyut matematik nesneler ile bağlantıya geçebilme kabiliyetinde olduğunu ve bu gibi nesnelerden bilgi edinebildiğini söyler. Bu yaklaşım Platon'un *Menon* ve *Phaidon* diyaloglarında ve ayrıca Gödel'in[63] çalışmalarında takip edilmiş yaklaşımdır. Platon'un düşüncesinde maddi olmayan "ruh" soyut nesnelerin bilgisine daha doğmadan önce sahip iken doğup dünyaya gelmemiz ile bu bilgileri unuturuz. Matematik öğretimi doğmadan önce bildiklerimizin hatırlanmasından başka bir şey değildir. Gödel'in yaklaşımında ise bizler soyut nesnelerinin bilgisini hiçbir farklılık olmaksızın fiziksel nesnelerin bilgisini nasıl elde ediyorsak aynı şekilde, duyularımız ile elde ederiz. Öyleyse soyut nesneler hakkındaki bilgimiz, *matematiksel sezgi yeti*sinden kaynaklanmaktadır.[64]

İkinci yaklaşımda Platoncuların üzerinde durdukları nokta, (2) iddiasının yanlış olduğunu ve insan tekinin matematik nesneler hakkındaki bilgisinin normal algılar ile algılandığını ileri sürer. Maddy[65] ilk dönemlerinde bu fikri küme teorisi ile açıklamıştır. Fiziksel nesneler kümesi mekân-zamanda vardır ve biz onları algılarız. Örnek olarak, masanın üzerinde duran üç elma vardır. Küme, aynı *mekân içinde* masada bulunanları içerir. Böylece biz kümeyi görebiliriz ve bu yolla küme hakkında bilgiyi elde ederiz. Bu bakış açısına getirilen eleştiriler şu şekildedir:[66] Böyle bir yaklaşım başlangıçta yaptığımız tanıma göre kolaylıkla reddedilebilir. Maddy'nin yaklaşımı matematik nesneleri uzay zamanın dışında tanımlamadığı için platoncu olarak kabul edilmez. Ancak bu itiraza karşı ufak bir çıkış yolu bulunabilir: Bir oda dolusu nesneyi farklı özelliklerine göre bir araya getirerek farklı farklı tanımlanmış kümeler elde edebiliriz. Böylece farklı bir açıdan bakıldığında aynı mekân ve zamanda bulunan fiziksel olmayan kümeler tanımlan-

63 Gödel, "Cantor'un Süreklilik Problemi Nedir?".

64 Gödel, "Cantor'un Süreklilik Problemi Nedir?", s. 237.

65 Penelope Maddy, *Realism in Mathematics* (Oxford: Oxford University Press, 1990), s. 98-102.

66 Balaguer, s. 28-34.

mış olur. Maddy'nin yaklaşımı pek kabul görmese de, bilgi kuramsal iddiaya dair itirazlar arasında yer almaktadır.

Son yaklaşımda ise (1) ile (2) kabul edilmekte, bununla birlikte (3)'ün yanlışlığı açıklanmaktadır. Bu yaklaşım diğer iki yaklaşıma göre farklıdır ve insan teki ile soyut nesneler arasındaki bilgi-aktarım varsayımlarını içermemektedir. İleri sürülen fikir, insan tekinin soyut nesneler ile etkileşimde bulunmadığını kabul ediyor. Buna rağmen soyut nesnelerden nasıl bilgi edindiğini açıklamayı amaçlıyor. Bu, son dönem platoncuları arasında en yaygın yaklaşım iken, Quine (1951), Steiner (1975), Parsons (1980, 1994), Katz (1981, 1998), Resnik (1982, 1997), Wright (1983), Lewis (1986), Hale (1987), Shapiro (1989, 1997), Burgess (1990), Balaguer (1995, 1998a), Linsky ve Zalta (1995), ve Linnebo (2006) gibi kimi önemli matematik felsefecileri tarafından da kabul görmektedir.[67]

Yukarıda adı geçen felsefecilere göre küçük farklılıklar gösteren versiyonlar kısaca incelenirse, üçüncü yaklaşımın birinci versiyonunun Quine'in (1951) yazılarında kapalı olarak bulunmakta iken Steiner (1975) ve Resnik (1997) tarafından geliştirildiği görülür. Onlar, matematik nesneler ile herhangi bir ilişkimiz olmasa dahi matematik teorilerimizin doğru olduğuna dair geçerli sebeplerimiz bulunduğu düşüncesini ortaya koyarlar. Çünkü a) bu nesneler deneysel teorilerimize gömülüdür, b) bu deneysel teoriler (matematik kısmı da dâhil) deneysel veriler tarafından doğrulanırlar, sonuçta c) matematik teorilerimizin doğru olduğuna dair deneysel kanıtlarımız vardır, bu nedenle soyut matematiksel nesneler vardır. Bu versiyonda doğrulamanın bütüncül (*confirmation is holistic*) olduğuna dair tartışmaları not etmek gerekir. Daha açık belirtilirse, elde edilen bir kısmın deneysel kanıtlar ile doğrulanan teorinin sadece bir kısmı olması gerekirken teorinin tüm içerimle-

67 Mark Balaguer, "Mathematical Platonism", *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy* içinde, ed. B. Gold and R. A. Simons (Mathematical Association of America Publications: 2008), s. 179-204. Üçüncü versiyona ait ayrıntılı bilgi bu kaynakta ve Mark Balaguer, *Platonism and anti-Platonism in Mathematics*, (Oxford: Oxford University Press, 1998) içinde bulunabilir. Yazarların yanında verilen rakamlar ilgili eserlerin yayımlanma tarihleridir. Bu eserlere ait tam künyelere yukarıda verilen kaynaklardan ulaşılabilir.

Bir diğer kaynak: Øystein Linnebo, "*Platonism in the Philosophy of Mathematics*", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.), http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/platonism-mathematics/.

rinin doğrulandığı sonucuna varılmaktadır. Bu kabul edilmesi zor olan bir süreksizliktir/sıçramadır.

Üçüncü yaklaşımın ikinci versiyonu ise Katz (1981, 1998) ve Lewis (1986) tarafından teklif edildiği şekliyle, matematik nesneler ile bilgi-aktarım ilişkisinin olmadığı durumlar için matematiksel teorilerimizin doğru olduğudur. Çünkü bu teoriler zaruri olarak (*necessarily*) doğrudur. Sıradan fiziksel nesnelerle bilgi-aktarım ilişkisine ihtiyaç duymamızın nedeni, başka *birşey* olabileceklerken ne olduklarını bilmek içindir. Örnek olarak, yangın arabasının kırmızı olduğunu anlamak için ona bakarız, çünkü mavi renkli de olabilir. Ancak 4 sayısının 3 artı 1 olduğunu bilmek için 4 ile herhangi bir ilişkiye geçmeme gerek yoktur. Çünkü 4 zaruri olarak 3 artı 1 olmalıdır.

Üçüncü yaklaşımın üçüncü versiyonu Shapiro (1997) tarafından teklif edilmiştir. Bu yaklaşıma göre, Shapiro platoncu yapısalcılığın (*platonistic structuralism*), matematik teorilerimizin soyut olan matematik yapılarının doğru tasvirini ortaya koyduğunu kabul etmektedir. Hatta Shapiro insan tekinin matematik yapıların bilgisini herhangi bir bilgi-aktarım ilişkisi olmadan sadece basit matematiksel aksiyom sistemleri yoluyla elde edilebileceğini ileri sürmektedir. Öne sürdüğü, aksiyomatik sistemlerin "*yapının içkin tanım*"larını sağladığı iddiasıdır. Seçilen aksiyomlar tüm doğrulanabilir teoremleri kendi içinde bulundururlar ve bu yapısal bir sonuçtur. Bu versiyonda cevaplanmamış önemli bir sorun bulunmaktadır. Bu problem şu şekilde sorulabilir: Hangi aksiyomların seçilmesi durumunda matematik gerçeklik olarak tanımladığımız *yapı* ortaya çıkar? Bu soru, birçok farklı aksiyomatik sistem arasından hangisini seçmemiz gerektiğine dair temel bir problemi daha ortaya çıkartacaktır.

Üçüncü yaklaşımın dördüncü ve son versiyonu ise, birbirlerinden bağımsız olarak Balaguer (1995,1998a) ve Linsky-Zalta (1995) tarafından geliştirilmiştir. Her iki versiyonda daha özel bir platonculuk olan *bütüncü platonculuk*tan (*plenitudinous platonism*) uyarlanmıştır, Balaguer bu yaklaşıma safkan platonculuk (*full-blooded platonism ya da FBP*) derken Linsky-Zalta ise ilkesel platoncuk (*principled platonism*) adını vermektedir. Balaguer bütüncü platonculuğunu "matematik nesneler her türlü durumda vardır" şeklinde tanımlamaktadır. Yine de genel olarak Balaguer her bir soyut nesne için "bütünlük ilkesi"ni (*plenitude principle*) tanımlamak durumundadır. Linsky-Zalta soyutluğun üç farklı imkânı için ayrı "bütünlük ilkeleri" geliştirmiştir: soyut tekiller, ilişkiler (özellikler ve önermeler) ve imkân dâhilinde somut olmayan tekiller.

Balaguer ve Linsky-Zalta, eğer platoncular bütüncü yaklaşımı kabul ederlerse insan teki ile soyut nesneler arasında bilgi-aktarımı ilişkisine dayalı iddianın olmadığı platoncu bir yaklaşım ile bilgi kuramsal iddianın getirdiği problemi çözebileceklerini öne sürmektedir. Balaguer'ın iddiası şu şekildedir: Bütüncü platoncular ya da FBP'cilerin söylediği, her mümkün türden matematiksel nesneler vardır; eğer FBP doğru ise, kesin olarak var olan matematik nesneler bütününü tanımlayan matematiksel teorilerde doğrudur. FBP yaklaşımından çıkan sonuç, soyut matematiksel nesnelerin bilgisine ulaşmak için yapılması gerekenin sadece içsel olarak tutarlı matematik teorileri kurmak olduğudur. Açıktır ki, ***i***) insan olarak bizler içsel bakımdan tutarlı matematik teoriler kurabilmekteyiz ve ***ii***) bunu yapabilmek de herhangi bir platoncu yaklaşımı sorunlu hâle getiren "soyut nesneler ile bilgi-aktarım ilişkisi"ni gerekli kılmamaktadır. Eğer bu yaklaşım doğru ise, platonculuğa getirilen bilgi kuramsal eleştiri çözülmüş olur. Kurulan matematiksel çerçeve zaten doğru işlevsellik kazanan soyut nesnelerin varlığını ve türetilecek teori üretimini mümkün kılmaktadır.

Herhangi bir kişi, yukarıda verilen, insanın soyut nesneleri bilebilmesini sağlayan süreçte öncelikle bütüncü platonculuğun doğru olduğunu bilmek isteyebilir. Balaguer'e göre FBP'nin nasıl doğru ve geçerli olduğuna dair sorulacak soruların bir benzeri "Fiziksel dünyanın gerçekliği nedir?" diye soran dış dünya gerçekçilerinin arayışına benzemektedir. Dış dünyanın varlığına dair gerçeklik algımızı nasıl savunuyorsak aynı şey bütüncü platonculuğun matematik nesneler için kurduğu açıklama zemini içinde geçerlidir. Dış dünyanın zorunlu varlığına getirilen deliller FBP'nin açıklamak için kullanıldığı soyut matematik nesneler içinde geçerlidir. Bu durumda bilgi kuramsal itirazlara platoncu bakış açısından verilen cevaplar tamamlanmıştır.[68] Dış dünya bilgisinde geçerlilik/anlamlılık/doğruluk duyularla elde ettiğimiz verilere dayandığı gibi, soyut matematik nesnelerde yalın algılarımızın bizde var kıldığı yetiler ile bilinebilir. Bu Gödel için *sezgi* olarak tanımlanmaktadır.

Gödel'in *matematiksel sezgi* kavramına açıklama getirmeye çalışırsak, Kant'a göre bir sanatçıyı sanatçı yapan şey, sanatçı dehalarda bulunan bir tür ruh, Kant'ın deyişiyle "Geist"tır. Geist ise *estetik idea*ları görebilme ve bunları betimleyebilme gücüdür. Bu estetik ideaların temeli ise, duyulara, algılara dayanan hayal gücünün

68 Balaguer, s. 48-53.

tasavvurlarıdır.[69]Gödel'in *matematiksel sezgi* kavramından anladığı şey bir bakıma Kant'ın *Geist* kavramından anladığına benzemektedir. Bu matematiksel nesneler, dünyasının bir algısıdır ve matematikçinin, bu dünyanın nesneleri ile bu nesnelerin birbirleriyle olan ilişkilerini görmesini sağlar. Bu yetenek insanda "doğuştan verili" biçimde bulunur. Gödel'e göre matematikçiyi matematikçi yapan şey, bu yeteneği kullanmasıdır.[70]

Genel görelilik denklemlerinin 1916 yılında Einstein tarafından yayınlanmasından hemen sonra Prusya cephesinde savaşmakta olan Karl Schwarzschild'dan mektup olarak gönderilen analitik çözümde karanlık bir *varlık* da içerilmekteydi. Çözüm tüm sonuçların tanımsız kabul edileceği bir *tekilliğe* sahipti. Ancak tekilliğin analitik çözümlerde içerilmesi daha önce bilinmeyen kozmolojik bir varlığa işaret etti. Uzay-zaman dokusunda bulunan matematiksel tekillik varlık kazanmıştı: karadelikler. Uzun yıllar karadeliklerin evren içinde gözlemlenmesi için çalışmalar yürütüldü ve ilk gözlem Hubble teleskobu tarafından 1994 yılında gerçekleşti. "Varlık"ı bilinmeyen kozmolojik bir "şey", matematik aracı ile kendisinin "varlık"ı ispat edilmeden 78 yıl önde "var" oldu. Gerçek nasıl tanımlanmalı? Soyut matematik nesneler ile gerçek nasıl ilişkili olabiliyor ve insan zihni neden matematik aleti ile uyumlu bir görünüm sunuyor? İdealar dünyasından pay alan insan zihni "varlıktan pay almayan"[71] kozmolojik bir nesneyi nasıl bilebiliyor?

Penrose'da platonculuk

"Bir fizikçi veya matematikçi birdenbire "aha" dediğinde Penrose bu nidanın "karmaşık hesaplamayla uyandırılmış" duygunun ötesinde bir şey olduğuna inanır."

Martin Gardner, "Önsöz", *Kral'ın Yeni Usu*

Matematik fiziksel süreçlerden bağımsız bir gerçekliğe sahip midir, ya da sadece insan düşüncesinin ve kültürünün sonucu mudur? Ya da sadece fiziksel dünyanın dinamik davranışlarını ve yapısını iyi bir yaklaşıklıkla veren matematiksel düzenliliğin idealleştirilmiş, soyutlanmış hâli midir? Tüm bu sorular tarih boyunca,

69 Heinz Heimsoeth, *Immanuel Kant'ın Felsefesi* (çev. Takiyettin Mengüşoglu, Ankara: Doğu-Batı Yayınları, 2007), s. 82-83.

70 Gödel, *Cantor'un Süreklilik Problemi Nedir?*, s. 236-237.

71 Kara delikler, görünür ışıkta elektromagnetik dalga yaymadıkları için bu şekilde ifade edilmiştir.

felsefecilerin sorduğu önemli soruların içinde "soyut nesnelerin varlığı"na ait bölümün altında yer aldılar. Aynı soruların günümüzdeki karşılığı teorik fiziğin güncel verileri ile yeniden değerlendirilebilmektedir. Aynı soruları soran ve günümüz için ortaya koyduğu felsefi tavır ile dikkat çeken Roger Penrose birbiri ardına yayınladığı ve ses getiren eserlerinde kendi yönünü "matematiksel platonculuk" olarak tanımlıyor ve altını çizdiği iki önemli noktayı şu şekilde belirtiyor:

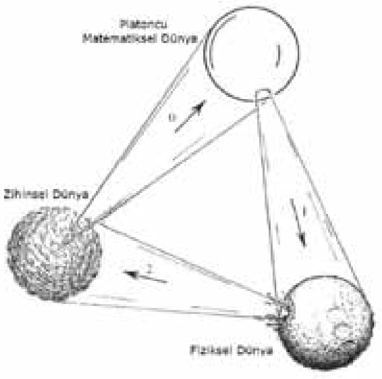
i) Matematik gerçekliğin bağımsız varlığı.

ii) Fiziksel süreçlerin kendisine bağımlı olduğu önceden-var-olan-matematiksel nesnelerin ayrılığı.

> "Matematikçiler sonuçlara ulaştıkları zaman, özünde gerçek olmayan, özenle tasarlanmış zihinsel yapılar mı üretiyor, yoksa bu yapılar öylesine güçlü ve ince tasarlanmış ki, mimarları üzerinde "gerçek" izlenimi yaratıp onları yanıltıyorlar mı? Yoksa aslında, bu yapıların özünde zaten bulunan gerçekleri, matematikçilerin işlemlerinden tamamen bağımsız var olan gerçekleri ortaya mı çıkarıyorlar?"[72]

> "Sözünü ettiğim göksellik (*etherial*), sonsuzluk (*external existence*) gibi duyuların matematikte, özellikle derin matematiksel kavramlarda çok daha güçlü olduğunu hissetmekten kendimi alamıyorum."[73]

Bu birbirinden farklı içeriklere sahip iki kabulü açıklamak için Penrose, kendi yazı ve kitaplarında sıkça kullandığı bir çizimi önümüze koyuyor.



Roger Penrose'a göre gerçekliğin üç farklı yönünü oluşturan ve döngüsel etkileşimde olan dünyalar.

72 Roger Penrose, *Kralın Yeni Usu: Bilgisayar ve Zeka*, c. I (çev. Tekin Dereli, Ankara: TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, 1999), s. 114.

73 Penrose, *Kralın Yeni Usu*, c. I, s. 115.

Penrose, bu şekil ile üç dünya ve bunların ilişkilerini tarif ediyor: fiziksel, zihinsel ve matematiksel dünyalar. Ayrıca bu dünyalarla birlikte ifade edilmesi gereken üç gizemli bağlantıyı da gösteriyor. (***i***)'de verilen matematiksel nesnelerin bağımsızlığına karşılık olacak şekilde "Giz 0" olarak adlandırılan bağlantı da şu soruların cevapları aranıyor: Soyut matematiksel dünya sadece zihinsel süreçlerden mi ortaya çıkıyor yoksa kendi kendine bağımsız bir varlığa sahip mi? Penrose'a göre, ne şekilde olursa olsun insan soyut matematik nesnelerin dünyasına, sembollerin ve simgelerin kendi iç bütünlüğü dâhilinde ulaşabilmektedir.

(***ii***)'de verilen ve "Giz 1" olarak gösterilen ilişki ise fiziksel teorilerdeki matematiğin yerini belirleme çabasıdır. Matematik teoriler fiziksel gerçekliği açıklamada iyi iş gördüğünden, matematiğin fiziksel dünyayı açıklamada şüphe götürmez faydasını, sadece gözlemlenen verileri anlaşılabilir formda organize etme yetimizi yansıttığı düşüncesiyle mi sınırlamalıyız? Ya da gerçekten önceden-var olan-matematiksel düzene içten içe bağlı fiziksel işleyiş mi söz konusudur?

Üçlünün sonuncusu "Giz 2" ise, fiziksel ile zihinsel dünyalar arasındaki ilişkiye aittir. Kişiye ait bilinç nasıl oluyor da kişisel hiçbir özellik göstermeyen matematiksel işlemler tarafından yönlendirilen fiziksel dünyadan ortaya çıkıyor? Ya da bilinç öncelikle kendisine "evren" dediğimiz yapının varlığının en derinlerinde bulunan bir aslî unsur mu veyahut da beyinlerimizin kendisinden oluştuğu son derece karmaşık bir nitelik mi? Eğer böyle ise bu karmaşık yapı sadece algoritmik yapılar ile anlaşılabilir mi? Ya da bilincin algoritmik yapılar ile anlaşılamayacak daha temel dayanakları var mı?

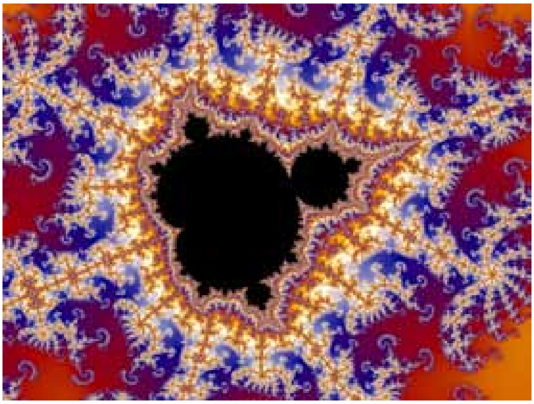
Bu dayanak sadece fiziksel gerçekliğin imkânları ile mi inşa edilebilir yoksa daha temelde yer aldığını düşünebileceğimiz bilincin fiziksel gerçeklikte ortaya çıkmasına zemin hazırlayan bir matematiksel yapı olabilir mi? Ya da tüm bu tanımlayabildiğimiz tanıdık kavramsal çerçevenin de ötesine mi geçmeliyiz? Tüm süreçlerin işlediğini gözlemlediğimiz fiziksel gerçeklik düzeyinde kendisini temsil eden soyut matematiksel nesnelerin olduğunu nasıl gösterebiliriz?

> "Matematiksel doğruluk fikri, formalizm kavramının sınırlarının çok ötesine uzanır. Matematiksel doğruluk kavramında, mutlak ve "Tanrı-vergisi" olan bir şey vardır. ...matematiksel platonculuğun ilgi alanı budur. Herhangi bir formel sistemde doğruluk kavramı geçici ve 'insan-yapısı' bir nitelik taşır. Formel sistemler, matematik üzerine tartış-

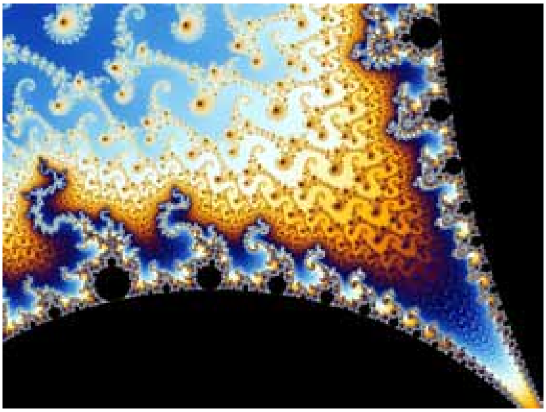
malarda gerçekten çok değerli roller üstlenirse de, doğruluğun saptanması yönünde sadece kısmı bir rehber olabilirler. Gerçek *matematiksel doğruluk* salt insan yapısının ötesine geçer."[74]

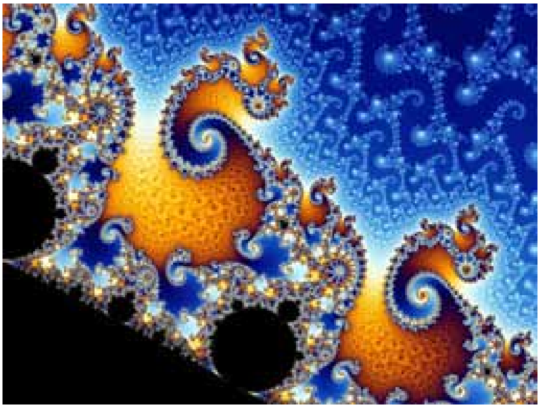
Penrose matematik nesnelerin insan zihninin zorunlu ürünlerinden başka bir şey olup olmadığını sormaktadır. Matematik nesnelerin sadece matematikçilerin zihninde oluşan kavramlar olmadığını ileri sürmekte, ancak soyut matematik nesneleri "kendine özgü olup bize yalnız bir kısmını gösteren gerçek" olarak tanımlamaktadır. Verdiği örneklerden en basit ve etkileyici olanı Mandelbrot kümesidir.

"Mandelbrot kümesi, insan aklının buluşu değildir, bir keşiftir. Everest Dağı nasıl orada öylece duruyorsa, Mandelbrot kümesi de orada öylece duruyor."[75]



74 Penrose, *Kralın Yeni Usu*, c. I, s. 134.
75 Penrose, *Kralın Yeni Usu*, c. I, s. 112.





Penrose'un büyüleyici olarak nitelediği Mandelbrot kümeleri.

Karmaşık sayılar, yüksek mertebeden denklemlerin çözümündeki ikinci dereceden bilinmeyen değişkenin (x^2) eksi değere eşit olması şeklinde tanımlanmıştır. Bu karmaşık sayıların fiziksel dünyada ilk verilen tanımıdır. Daha sonra bu sayı tipinin farklı alanlarda kendini çözümlerde göstermesi ile daha fazla önem kazanmaya başladı. Bulunan yeni özelliklerin hiçbiri karmaşık sayıları kullanan Gauss, Euler ya da Wallis tarafından bu sayı kümesine yüklenmemiştir. Yüksek mühendislik hesapları içeren teorik yaklaşımların analitik çözümlerinde kullanılan Cauchy İntegralleri karmaşık sayılar kümesinde tanımlanmaktadır. Uçak kanat tasarımından bina dinamik yüklerine, bilgisayar devrelerindeki elektron hareketinden elektromanyetik alan çözümlerine dayalı anten tasarımına kadar tüm fiziksel süreçler kendisini karmaşık sayıların kullanıldığı bu analitik integraller ile *inşa etmek*tedir. Buna benzer kim bilir daha ne kadar sayı kümesi tanımı vardır. Bu yeni sayılar bizim fiziksel nesnelerimizin inşa edilmesine imkân sunacak mıdır yoksa hiçbir zaman uygulama alanı bulamayacak mıdır?

Platoncu matematik dünyasının varlığı kabul edildiğinde, fizik kanunlarının tamamıyla kuşatıldığı bir yapıyı da düşünmeliyiz. Böyle bir yapının varlığı son derece kuşatıcı olup uzay-zamanın dışında bağımsız varlığı ile insanlığın kültürel inşasından uzak bir sistemi işaret etmektedir. Fiziksel dünyanın işleyişine dair yapılan hesaplamalarda son derece hassas[76] ve zarif matematiksel teoriler kullanılmaktadır. Önemli örneklerden biri şu şekilde verilebilir: Otuz yıldır gözlemlenmekte olan çift nötron yıldızına (PSR 1913+16) ait pulsar sinyalinin periyodu ile Einstein'ın Genel İzafiyet Teorisi'nden elde edilen hesaplamalar yüz binde bir hassasiyet ile örtüşmüştür. Bu olgusal gerçeklik ile son derece karmaşık matematiksel teoriler arasındaki kaçınılmaz bağdaşıklığı göstermektedir. Bu uyumluluk, verilerin sadece bizim anlayışımıza uydurulması için düzenlenmiş yapısal bir sonuç değildir. "Orada bir yerde" bulunan ve hatta insanlığın evrende ortaya çıkmasından çok daha önce de orada olan ile fiziksel süreçlerin uyumunu göstermektedir. Bizden, zihnimizden bağımsız kendi varlığı ile fiziksel süreçleri inşa eden bir soyut nesneler dünyasıdır bu.

Penrose'un kendi yaklaşımını delillendirdiği en önemli bulgu Gödel Eksiklik Teorisi'dir. Penrose, katı bir platoncu olarak tanımladığı Gödel'in soyut matematik nesneler ile fiziksel nesneler arasında ilişki kurma yetisinin aslında doğal dünyayı algılamakta bizimle birlikte olan duyularımızdan pek farklı olmadığı görüşünü savunmaktadır.

> "Matematiksel doğruluğun mutlak, dışsal ve ebedi olduğunu ve insan-yapısı kriterlere dayanmadığını, matematik nesnelerin kendilerine özgü ve zamanla sınırlı olmayan bir varlığa sahip olduklarını, insan toplumuna da belirli fiziksel nesnelere de bağlı olmadığını savunan platoncu görüşe yakınlık duyduğumu gizlemiyorum."[77]

Zihinlerimiz son derece karmaşık matematiksel delilleri ve işlemleri kavrayabilmektedir. Bu kavrayış yetisi nasıl ortaya çıkmaktadır?

76 Hesaplamalar sonucu elde edilen sonuçların noktadan sonraki değerli hane sayısı için kullanılan bir kavram. Sayısal hesaplarda elde edilen değeri geçerli kılmak için kullanılan ölçek (*precision*).

77 Penrose, *Kralın Yeni Usu*, c. I, s. 139.

Penrose, Gödel eksiklik teoremleri üzerinden[78]bizi bilinçli zihinsel süreçlerin algoritmik olamayacağı sonucuna ulaştırmaktadır. Bu ise fiziksel gerçekliğe bağlı 'beyin'den bilincin nasıl çıkabileceği sorusu ile karşılaşmamıza neden olmaktadır. Penrose tam bu noktada elimizdeki fiziksel teorilerin yeterli olmadığını ancak edinebildiğimiz tecrübeyi göz önüne aldığımızda çözüm imkânının klasik/kuantum fiziği sınırından gelebileceğini iddia etmektedir. Fiziksel süreçlere dair yüzyıllık birikimimizin son sözü söylemek adına atılacak ilk adımda yol gösterici olacağını ve kritik kavramın *zaman* olduğunu belirtmektedir.

> "Bilincin, özde (*in essence*), gerekli bir gerçeği görmek olduğunu, Platon'un soyut matematiksel kavramlarıyla bir tür aslî teması (*actual contact*) temsil etmektedir."[79]

Aslî temasın gerçekleşmesini mümkün kılan, süreçlerin bilince ait "zamanı" ile zamansız kabul edilen platoncu soyut nesnelerin ilişkisidir. Karşımızda duran sorun ise, bu ilişkinin nasıllığıdır. Bu noktada Penrose, (henüz tanımlanmamış) kuantum kütle çekim kuramı (CQG) ile simetrik ve simetrik olmayan uzay-zaman operatörlerinin, bilincin kendi kendini gözlemlediği durumu temsil edebileceği ve böylece zamansız soyut nesneler ile ilişkisini anlayabileceğimiz görüşündedir.[80] Penrose zihnin beynin fiziksel işlevselliğinde ortaya çıktığını düşünmesine rağmen bunun güçlü yapay zekâ görüşünde olduğu gibi algoritmaya bağlı gerçekleşmediğini iddia etmektedir. Zihin hesaplanabilir olmayan süreçlerin üzerine inşa edilmiş aşkın bir varlık zeminini işaret etmektedir. Bu aşkın hesaplanabilir olmayan işlemlerin ne olduğu ise günümüzde kullanılmakta olan fizik yasalarında bulunmamaktadır. Ancak bu fizik yasalarının bulunacağı gün gelecektir.

> "Platon'un idealar dünyasını sadece matematik formları açıklamak için kullandım. Matematik her ne kadar "Gerçek" ideali ile sıkı bir ilişki içinde olsa da, Platon "*İyi*" ve "Güzel" gibi iki temel ideanın daha olduğunu ısrarla vurguluyor. B*öyle idealerın olduğunu kabul etmiyor değilim ve Platon*'un idealar dünyasının tüm bunları kapsayabileceğini düşünüyorum."[81]

78 Penrose, *Kralın Yeni Usu*, c. I, s. 128-149.

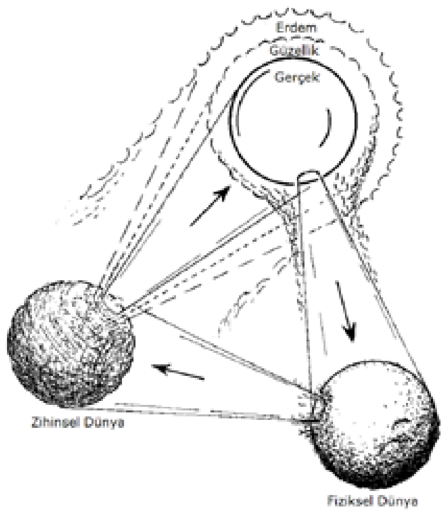
79 Penrose, Roger, *Kralın Yeni Usu: Us Nerede*, c. III (çev. Tekin Dereli, Ankara: TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, 1999), s. 177.

80 Penrose, *Kralın Yeni Usu*, c. III, s. 178-179.

81 Roger Penrose, *Road to Reality* (London: Random House Company, 2004), s. 22.

Sonuç Yerine

Sonuç kısmında matematik felsefesi bağlamında ele aldığımız yukarıdaki tartışmayı yeniden özetlemek ve belirli türden cevaplarla bitirmek yerine matematiksel platonculuğun özellikle Penrose'un kişisel yorumları ışığında ne türden etik ve estetik içerimleri olabileceği sorusuna değinebiliriz. Penrose, fiziksel teorilerin ve matematiksel tutarlılıkların kabul edilmesinde "gerçek" ile "güzellik" arasında kurulan ilişkiyle yakından bir bağ olduğunu düşünmektedir. Bu noktada Gödel de insanda bulunan estetik algısının insan tekinin zihinsel süreçlerini hesaplanabilir sınırların ötesine geçirebildiğine inanıyordu. Penrose'un fiziksel gerçeklikten bahsederken doğal olarak çok ilişkili görülmeyeceğini ancak öneminin insanlık için bir kenara da bırakılmayacağını düşündüğü önemli idealardan biri de "erdem"dir. İyi nedir? Kötü nedir? Zihnimiz nasıl oluyor da bu değerleri ayırt edebiliyor? "Erdem"in zihinsel dünya ile olan derin ilişkisi açık iken "Bilinçli varlıkların duygusal hayatı olmasaydı ne olabilirdi?" sorusunu cevaplamak oldukça zor bir sınırı işaret etmektedir. İyi ve kötüyü ayırt etmemizi sağlayan sadece duygusallığımız mıdır?[82] Daha önce verilen üç dünyanın birbiriyle olan ilişkisini gösteren temsilî şekil, Penrose tarafından tüm insani soyutlukların içerildiği biçimiyle yeniden görselleştirilmiştir.



Platoncu idealarin Penrose tarafından temsil edilişi.[83]

82 Penrose, *Road to Reality*, s. 1028.

83 Penrose, *Road to Reality*, s. 1029.

"Doğa'nın sırlarına ne kadar çok ulaşmaya gayret göstersek, kaçınılmaz olarak Platoncu matematik nesnelerin dünyasına da o kadar derinlemesine düşüyoruz."[84]Görünen o ki, erdem, güzellik ve iyi ideaları bizi fiziksel nesnelerin kuruluşunda da zihinsel düşüncenin kuruluşunda da yalnız bırakmıyor.

Kaynakça

Arslan, Ahmet, *İlkçağ Felsefe Tarihi -Sofistlerden Platon'a-,* c. 2, 3 bs., İstanbul: Bilgi Üniversitesi Yayınları, 2010.

Balaguer, Mark, *Platonism and anti-Platonism in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 1998.

Balaguer, Mark, "Mathematical Platonism", *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy* içinde, ed. B. Gold and R. A. Simons, Mathematical Association of America Publications: 2008, s. 179-204.

Benacerraf, Paul, "Matematiksel Hakikat", *Matematik Felsefesi* içinde, ed. Bekir S. Gür, Ankara: Kadim Yayıncılık, 2004, s. 239-264.

Chu-Carroll, Mark C., *Good Math: A Geek's Guide to the Beauty of Numbers, Logic, and Computation*, Dallas Teksas: The Pragmatic Bookshelf, 2013.

Clark, Michael, *Paradokslar Kitabı*, çev. Ahmet Fethi, 2. bs., İstanbul: Hil Yayıncılık, 2011.

Copleston, Frederick, *Felsefe Tarihi - Platon*, çev. Aziz Yardımlı, 4. bs., İstanbul: İdea Yayınevi, 1998.

Cottingham, John, *Akılcılık*, çev. Bülent Gözkan, İstanbul: Doruk Yayınları, 1995.

Demos, Raphael, "Formlar ve Şeyler", *İdealar Kuramı: Platon'un Felsefesi Üzerine Araştırmalar*, içinde, der. Ahmet Cevizci, Ankara: Gündoğan Yayınları, 1989, s. 109-126.

Everdell, William R., *İlk Modernler*, çev. Hülya Kocaoluk, İstanbul: Yapı Kredi Yayınları, 2007.

Frege, Gottlob, *Aritmetiğin Temelleri: Sayı Kavramı Üzerine Mantıksal-Matematiksel Bir İnceleme*, çev. H. Bülent Gözkân, İstanbul: Yapı Kredi Yayınları, 2008.

84 Penrose, *Road to Reality*, s. 1032.

Gödel, Kurt, “Cantor’un Süreklilik Problemi Nedir?”, *Matematik Felsefesi* içinde, haz. Bekir S. Gür, Ankara: Kadim Yayıncılık, 2004, s. 217-238.

Gödel, Kurt, *Principia Mathematica ve İlişkili Dizgelerin Biçimsel Olarak Kararlaştırılamayan Önermeleri Üzerine – I*, çev. Özge Ekin, İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, 2010.

Gribbin, John, *Schrödinger’in Kedisinin Peşinde*, çev. Nedim Çatlı, İstanbul: Metis Yayınları, 2006.

Heimsoeth, Heinz, *Immanuel Kant’ın Felsefesi*, çev. Takiyettin Mengüşoğlu, Ankara: Doğu-Batı Yayınları, 2007.

Hofstadter, Douglas R., *Gödel, Escher, Bach: Bir Ebedi Gökçe Belik - Lewis Carroll’un İzinde Zihinlere ve Makinelere Dair Metaforik Bir Füg*, çev. Ergün Akça ve Hamide Koyukan, İstanbul: Kabalcı Yayınevi, 2001.

Karadağ, Nilüfer, “Süreklilik Hipotezi”, *Bilim Teknik Dergisi* 446, (2005): 70-71.

Karakaş, Halil İbrahim, *Matematiğin Temelleri*, 2. bs., Ankara: ODTÜ Yayıncılık, 2011.

King, Jerry P., *Matematik Sanatı*, çev. Nermin Arık, Ankara: TÜBİTAK Popüler Bilim Kitaplığı, 1999.

Linnebo, Øystein, “Platonism in the Philosophy of Mathematics”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2011 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/platonism-mathematics/.

Maddy, Penelope, *Realism in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 1990.

Muller, Ian, “Mathematical Method and Philosophical Truth”, *The Companion to Plato* içinde, haz. Richard Kraut, Cambridge: Cambridge University Press, 2005, s. 170-199.

Nagel, Ernest, James R. Newman, *Gödel Kanıtlaması*, çev. Bülent Gözkân, 2. bs., İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, 2008.

Penrose, Roger, *Kralın Yeni Usu: Bilgisayar ve Zeka*, c. I, çev. Tekin Dereli, Ankara: TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, 1999.

Penrose, Roger, *Kralın Yeni Usu: Us Nerede*, c. III, çev. Tekin Dereli, Ankara: TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, 1999.

Roger Penrose, *Road to Reality*, London: Random House Company, 2004.

Platon, *Devlet* (*Politeia*), çev. Sabahattin Eyüboğlu, M. Ali Cimcoz, 25. bs., İstanbul: İş Bankası Kültür Yayınları, 2013.

Platon, *Diyaloglar 1*, çev. Adnan Cemgil, 4. bs., İstanbul: Remzi Kitabevi, 1996.

Platon, *Symposion*, çev. Eyüp Çoraklı, İstanbul: Kabalcı Yayınları, 2007.

Platon, *Timaios*, çev. Erol Güney, Lütfi Ay, 3. bs., İstanbul: MEB Yayınları, 1997.

Poincaré, Henri, *Bilim ve Hipotez*, çev. Fethi Yüzel, 2. bs., Ankara: MEB Yayınları, 1964.

Quine, W.V.O., *From a Logical Point of View*, 2nd ed., New York: Harper and Row, 1961.

Russell, Bertrand, *Felsefe Sorunları*, çev. Vehbi Hacıkadiroğlu, 2. bs., İstanbul: Kabalcı Yayınları, 2000.

Yıldırım, Cemal, *Matematiksel Düşünme*, İstanbul: Remzi Kitapevi, 1996.