Ankara Üniversitesi
SBF Dergisi,
Cilt 77, No.4, 2022, s. 853 - 875

Araştırma Makalesi
DOI: 10.33630/ausbf.1148831

KOALİSYON OLUŞUMU OYUNLARI: İÇSEL KARARLILIK*

Dr. Öğr. Üyesi Seçkin Özbilen
Özyeğin Üniversitesi
İşletme Fakültesi
ORCID: 0000-0001-8230-9789

• • •

Öz

Bu makalede hedonik koalisyon oluşumu oyunlarında kullanılan yeni bir denge kavramı olan içsel kararlılık ve içsel kararlı koalisyon yapılarını bulan İçsel Algoritma çalışılacaktır. İlk önce içsel kararlılık kavramının özellikleri işlenecek ve içsel kararlılık ile diğer kararlılık kavramları arasındaki ilişki analiz edilecektir. Daha sonra içsel algoritma tanıtılacak ve bu algoritma yardımı ile bir hedonik koalisyon oluşumu oyununda sıradan olmayan içsel kararlı koalisyon yapılarını bulmanın mümkün olduğu ispat edilecektir. Devamında da içsel algoritma ile içsel kararlı sıradan koalisyon yapıları arasında ilişki analiz edilecektir.

Anahtar Sözcükler: İşbirlikçi oyunlar, Koalisyon oluşumu, Hedonik oyun, Kararlılık, İçsel kararlılık

Coalition Formation Games: Internal Stability

Abstract

This paper is on hedonic coalition formation games. We focus on a new stability concept called internal stability and introduce an algorithm that always brings internally stable coalition structures. Firstly, we analyze the relation between internal stability and other stability concepts. Then, we prove that the algorithm we introduce also brings non-trivial internally stable coalition structures in the full domain. Then, we analyze the relation between trivial coalition structures and the behavior of the algorithm.

Keywords: Cooperative games, Coalition formation, Hedonic games, Stability, Internal stability

---

* Makale geliş tarihi: 17.07.2021
Makale kabul tarihi: 05.05.2022
Erken görünüm tarihi: 26.07.2022

Koalisyon Oluşumu Oyunları: İçsel Kararlılık*

Giriş

İnsanoğlu sosyal bir canlıdır. Hayatının neredeyse tüm kademelerinde diğer insanlarla karşılıklı iletişim, etkileşim ve işbirliği içindedir. Bu karşılıklı iletişim, etkileşim ve işbirliği gruplar/topluluklar halinde hareket etmek şeklinde ortaya çıkmaktadır. Meslek odaları, ticari topluluklar, bir işyerindeki proje grupları, bir sınıftaki ödev grupları, bir hastanedeki ameliyat ekipleri, hobi grupları, siyasi partiler arasındaki koalisyon ve ortaklıklar, ülkeler arasındaki bloklaşmalar, vs. hepsi gruplar halinde hareket etmeye birer örnektir. İnsanların gruplar halinde hareket etmesinin bir sürü sebebi bulunmaktadır. Proje ve ödev grupları oluşturmak, ameliyathane ekipleri kurmak işlerin daha hızlı, daha az maliyetle ve daha verimli yapılmasını sağlar. Siyasi partiler beraber hareket ettiklerinde daha fazla seçmen topluluklarına hitap edebilmekte ve daha çok oy alabilmektedirler. Ancak grup büyüklüğü arttığında, grup halinde hareket etmenin anlamı ve etkinliği azalmaktadır. Örneğin, bir ödev/proje grubunda ne kadar fazla birey yer alırsa diğerlerinin sırtından geçinen (free rider) veya ödeve/projeye hiçbir katkı yapmayan birey sayısı daha da artmaktadır. Siyasi partilerin oluşturduğu blok/siyasi koalisyon ne kadar çok büyürse, koalisyonun hitap ettiği topluluğu temsil eden aday bulmak gitgide zorlaşır. Öyle ki en sonunda tarafsız bir aday ortaya çıkar ve hiçbir seçmen kitlesi temsil ve tatmin edilemez. Ameliyathane ekipleri belirli bir sayının üzerine çıkarsa ameliyatların hızlı ve etkin biçimde gerçekleştirilmesi hedefinden sapılmış olunur. Bu durum hastanın hayatına bile mâl olabilmektedir. Tüm bunlar göz önünde bulundurulduğunda şu sorular ortaya çıkmaktadır: İnsanlar bir araya geldiklerinde hangi grupların oluşması beklenmektedir? İnsanlar bir araya geldiklerinde hangi büyüklükte grupların oluşması beklenmektedir? İnsanlar gruplara ayrıldıktan sonra neden bazı grup yapıları bozulur ya da yeni gruplaşmalar ortaya çıkar? Oluşturulan gruplar bütünlüğünü ne şartlar altında koruyabilmektedir? Yukarıda bahsedilen tüm konuların ve yöneltilen soruların

* Bu makale yazarın İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Yüksek Lisans Programı'nda yazdığı yüksek lisans tezi geliştirilerek yazılmıştır.

cevabı Oyun Teorisi'nin bir alt kolu olan Hedonik Koalisyon Oluşum Oyunları (kısaca Hedonik Oyunlar) kullanılarak verilebilmektedir.

Bu çalışma hedonik oyunlar ile ilgilidir. Hedonik tercihler ilk kez Drèze ve Greenberg (1980)'de ele alınmıştır. Hedonik oyunlar kavramı ise ilk kez Banerjee vd. (2001) ve Bogomolnaia ve Jackson (2002) tarafından çalışılmıştır. Bir hedonik oyunda sonlu sayıda birey yer almaktadır. Sonlu sayıdaki birey kümesinin boş olmayan tüm alt kümelerine ***koalisyon*** denmektedir. Her birey, sadece hangi diğer bireylerin kendi koalisyonu içerisinde yer alacağıyla ilgilenir. Kendisi dışındaki diğer bireylerin tercihleri ve öncelikleri ile ilgilenmez. Diğer bir deyişle, her bireyin, içerisinde yer aldığı koalisyonların üzerine tercihleri vardır. Kendisi dışındaki bireylerin oluşturduğu koalisyonlar ile ilgilenmez. Oda arkadaşı problemleri (Roth ve Sotomayor, 1990) ve evlenme problemleri (Gale ve Shapley, 1962) koalisyon büyüklüğünün maksimum iki olabileceği özel hedonik oyunlardır. Sonlu sayıda birey kümesi ve bireylerin tercihleri göz önünde bulundurulduğunda, bir hedonik oyunun çıktısı birey kümesinin birbirinden bağımsız koalisyonlara ayrılmasıdır. Her bir çıktıya, ***koalisyon yapısı*** ya da partisyon (bölüntü) denmektedir. Hedonik oyunlarda çıktının kalitesi ve tercih edilirliği kararlılık (stabilite) kavramları ile analiz edilmektedir. Literatürde üzerinde çalışma yapılmış birçok kararlılık kavramı mevcuttur[1]. Bir koalisyon yapısının kararlı olması bireysel olarak ya da grup halinde mevcut koalisyonun terk edilip başka bir koalisyona katılma, yeni koalisyon oluşturma, ya da tek başına kalma hareketleri ile tanımlanmaktadır. Bu hareketler genel olarak ***bloke etmek*** şeklinde tanımlanmaktadır.

Çekirdek kararlılık ve ***Nash kararlılık*** kavramları ve bu kavramların sırasıyla kuvvetli ve zayıf halleri (*sıkı çekirdek kararlılık* ile *bireysel kararlılık* ve *sözleşmeli bireysel kararlılık*) literatürde üzerinde en çok çalışma yapılmış kararlılık kavramlarıdır. Bir koalisyon yapısında, bir grup birey mevcut yerlerini (koalisyonlarını) terk edip kendi başlarına yeni bir koalisyon oluşturarak daha mutlu olabiliyorlar ise, yeni koalisyon bu koalisyon yapısını bloke ediyor denir. Eğer bir koalisyon yapısı hiçbir koalisyon tarafından bloke edilemiyor ise, bu koalisyon yapısına ***çekirdek kararlı*** koalisyon yapısı denir (Banerjee vd., 2001). Bir koalisyon yapısında, eğer hiçbir birey içinde yer aldığı koalisyonu terk edip kendi başına kaldığında ya da var olan başka bir koalisyona katıldığında daha mutlu olamıyor ise, bu koalisyon yapısına ***Nash kararlı*** denir (Bogomolnaia ve Jackson, 2002). En genel tanım kümesi[2] düşünüldüğünde çekirdek kararlı veya

---

1 Literatürde yer alan bazı kararlılık kavramlarının sınıflandırılması Sung ve Dimitrov (2007a) tarafından yapılmıştır.

2 En genel tanım kümesi = Tüm hedonik oyunlar kümesi. Tüm hedonik oyunlar kümesinin alt-tanım kümelerini (altkümelerini) elde etmek için bireysel tercihlerin

Nash kararlı koalisyon yapılarının varlığı garanti değildir. Çekirdek kararlılık ve Nash kararlılık sadece bazı altkümelerde mevcuttur[3]. Bunun sebebi, bloke etme kavramlarının çok talepkâr olmasıdır. Literatürde en çok, kararlı koalisyon yapılarının hangi altkümelerde var olabileceği[4] araştırılmakta, bu altkümelerde analiz ve karakterizasyon yapılmaktadır. Ancak, altkümelerde kararlılık analizi çalışıldığında tüm bireylerin tüm olası tercihleri göz ardı edilmekte, bireyler sadece özel tercih kalıpları içine sokulmuş olmaktadır. Böyle durumlarda ortaya çıkan koalisyon yapıları da doğal değildir. Bu durum, en geniş tanım kümesinde her zaman var olan (çekirdek kararlılık ve Nash kararlılık kadar talepkâr

---

üzerine ya da tercih listeleri/profilleri üzerine şartlar/kısıtlamalar konmaktadır. Alt-tanım kümelerine ***… özelliğini sağlayan hedonik oyunlar kümesi*** de denmektedir. Biz bu çalışma boyunca tüm hedonik oyunlar kümesine ***en genel tanım kümesi***, alt-tanım kümelerine ***altküme*** ve bazı yerlerde ***… özellikleri sağlayan hedonik oyunlar kümesi*** diyeceğiz.

3 Banerjee vd. (2001) ***zayıf üst koalisyon özelliği***ni sağlayan hedonik oyunlarda her zaman çekirdek kararlı koalisyon yapılarının var olduğunu, ***üst koalisyon özelliği***ni sağlayan hedonik oyunlarda ise var ve tek olduğunu ispatlamışlardır. Bogomolnaia ve Jackson (2002), ***sıralı dengelilik*** veya ***zayıf ardışıklık*** özelliklerini sağlayan hedonik oyunlar kümesinde çekirdek kararlı koalisyon yapılarının her zaman var olduğu, ***toplanır ayrılabilirlik*** ve ***simetri*** özelliklerini aynı anda sağlayan hedonik oyunlarda ise her zaman Nash kararlı koalisyon yapılarının var olduğunu göstermişlerdir. Alcalde ve Revilla (2004), ***üst duyarlılık*** özelliğini sağlayan hedonik oyunlar kümesinde her zaman çekirdek kararlı koalisyon yapılarının olduğunu göstermişlerdir. Dimitrov ve Sung (2007) ***üst duyarlılık*** özelliğini sağlayan hedonik oyunlarda her zaman ***sıkı çekirdek kararlı*** koalisyon yapılarını bulmanın da mümkün olduğunu ispatlamışlardır. Dimitrov ve Sung (2007) ayrıca ***üst duyarlılık*** ve ***simetri*** özelliklerini aynı anda sağlayan hedonik oyunlarda Nash kararlı koalisyon yapılarının var olduğunu da ispatlamışlardır. Burani ve Zwicker (2003) ***yalnızca kardinal tercihler***den oluşan hedonik oyunlar kümesinde ve ***azalan ayrılabilir tercihler***den oluşan hedonik oyunlar kümesinde her zaman çekirdek kararlı ve Nash kararlı koalisyon yapılarının aynı anda var olduğunu ispatlamışlardır. Alcalde ve Romero-Medina (2006) ***birleşim duyarlılık***, ***kesişim duyarlılık***, ***tekillik*** ve ***esaslılık*** adında birbirinden bağımsız dört özellik tanıtmış ve bu özellikleri sağlayan hedonik oyunlar kümelerinde her zaman çekirdek kararlı koalisyon yapılarının var olduğunu ispatlamışlardır. Dimitrov vd. (2006) ***arkadaşların sempatikliği*** ve ***düşmanların iticiliği*** özelliklerini sağlayan hedonik oyunlarda her zaman çekirdek kararlı koalisyon yapılarının var olduğunu göstermişlerdir. Iehle (2007) çekirdek kararlılık için hem gerek hem de yeter koşul olan ***eksensel dengelilik*** özelliğini sunmuştur.

4 Herhangi bir kararlılık kavramını sağlayan koalisyon yapısının var olması şu anlama gelmektedir: Belirtilen tanım kümesinden alınacak rastgele bir hedonik oyunda belirtilen kararlılık kavramını sağlayan en az bir koalisyon yapısı her zaman ama her zaman vardır.

olmayan) ve koalisyon yapılarının analiz edilebilmesi ve tercih edilmeyen koalisyon yapılarının ayrımının yapılabilmesi için yeni kararlılık kavramlarına ihtiyacı arttırmaktadır[5].

Yukarıda belirtilen ihtiyaç ve sebeplerden yola çıkarak, bu makalede içsel kararlılık kavramı ve içsel kararlı koalisyon yapılarını veren içsel algoritma analiz edilecektir. İçsel kararlı koalisyon yapıları en geniş tanım kümesinde her zaman vardır. Bu özelliği sayesinde içsel kararlılık kavramının temsiliyet yeteneği çekirdek kararlılık ve Nash kararlılık kavramlarına göre daha yüksektir. Bireylerin tercihlerinin hiçbir şekilde kısıtlanmasına gerek olmadığı için koalisyon yapılarının analizini içsel kararlılık kavramı ile yapmak hem daha fazla seçenek hem de daha fazla serbestlik sağlamaktadır.

İçsel kararlılık kavramını yerel seviyede dağıtımsal etkinliğin minimum şartı olarak tanımlamak da mümkündür. Böylelikle, birey kümesinin büyüklüğünden bağımsız olarak içsel kararlılık ile yerelde etkinlik her zaman sağlanmaktadır. Hâlbuki Nash kararlılık, çekirdek kararlılık ve diğer kararlılık kavramlarının temsiliyet yeteneği birey kümesinin büyüklüğüne göre farklılık göstermektedir. İçsel kararlılık, bu özelliği sayesinde de ön plana çıkmaktadır.

Bir koalisyonda, koalisyon içi bir grup birey koalisyonu terk edip kendi başlarına yeni bir koalisyon oluşturarak daha mutlu olamıyor ise, bu koalisyona ***içsel kararlı koalisyon*** denir. Eğer bir koalisyon yapısında tüm koalisyonlar içsel kararlı ise o koalisyon yapısına ***içsel kararlı koalisyon yapısı*** denir. İçsel kararlı koalisyon ve içsel kararlı koalisyon yapısı kavramlarını ilk kez Dimitrov vd. (2006) ve Alcalde ve Romero-Medina (2006) tanıtmışlardır. Dimitrov vd. (2006) *arkadaşların sempatikliği* ve *düşmanların iticiliği* özelliklerini sağlayan hedonik oyunlar kümelerinde çekirdek kararlı koalisyon yapılarının varlığını, içsel kararlı koalisyon ve içsel kararlı koalisyon yapısı kavramlarını kullanarak ispatlamışlardır. Alcalde ve Romero-Medina (2006) *kesişim duyarlılık* özelliğini sağlayan hedonik oyunlar kümesinde çekirdek kararlı koalisyon yapılarının varlığını, içsel kararlı koalisyon kavramını kullanarak ispatlamışlardır. Liu vd. (2014) içsel kararlılık kavramını eşleşme ve değişim kavramlarına uyarlamışlardır. Schlueter ve Goldsmith (2020) içsel kararlılık ve Nash kararlılık

---

5 Hedonik oyunlar alanında yapılmış diğer çalışmalar için Hajdukova (2006) ve Aziz ve Savani (2016) literatür incelemelerine bakılabilir. Hedonik oyunlar alanındaki güncel çalışmalar için (Karakaya, 2011), (Karakaya ve Klaus, 2017), (Gallo ve Inarra, 2018) ve (Özbilen, 2019) incelenebilir. Tüm hedonik oyunlar kümesinde ya da bazı özel hedonik oyunlar kümelerinde kararlı koalisyon yapılarının bulunması veya verilen bir koalisyon yapısının kararlı olup olmadığının gösterilmesi ile alakalı hesaplama karmaşıklığı çalışmaları için (Ballester, 2004), (Sung ve Dimitrov, 2007b), (Sung ve Dimitrov, 2010), (Cechlarova ve Hajdukova, 2002), (Cechlarova ve Hajdukova, 2004a), ve (Cechlarova ve Hajdukova, 2004b) incelenebilir.

kavramları arasındaki gerektirme ilişkisini farklı altkümeler üzerinde araştırmışlardır.

Bu çalışma içsel kararlılık konusunda bu güne kadar yapılmış en kapsamlı çalışmadır. İlk önce en geniş tanım kümesinde içsel kararlılık ile diğer kararlılık kavramları arasındaki ilişki analiz edilmiştir. Devamında en geniş tanım kümesinde tanımlı içsel algoritma tanıtılmıştır. İçsel algoritma ile tüm içsel kararlı koalisyon yapılarını bulmak mümkündür. En geniş tanım kümesinde içsel kararlı sıradan olmayan koalisyon yapıları her zaman vardır. İçsel algoritmanın sıradan koalisyon yapılarını vermesi durumunda bu koalisyon yapılarının sağladığı diğer özellikler analiz edilmiştir. Böylelikle içsel algoritma yardımıyla en geniş tanım kümesinde tüm içsel kararlı koalisyon yapıları karakterize edilmiştir.

Bu makalede sırasıyla şu çalışmalar yapılacaktır. İkinci ünitede temel kavramlar ve literatürde en çok çalışılan kararlılık kavramları tanıtılacaktır. Üçüncü ünitede ilk önce içsel kararlılık kavramı ile diğer kararlılık kavramları arasında ilişki analiz edilecektir. Devamında en geniş tanım kümesinde çalışan İçsel Algoritma tanıtılacak ve bu algoritma yardımıyla sıradan olmayan içsel kararlı koalisyon yapılarının bulunabileceği ispatlanacaktır. Ayrıca içsel algoritma ile sıradan içsel kararlı koalisyon yapılarının ilişkisi de açıklanacaktır. Son bölümde yaptığımız çalışma özetlenecek ve konu ile alakalı ileriye yönelik araştırma alanlarından bahsedilecektir.

1. Temel Kavramlar

Her ***birey kümesi*** N, potansiyel birey kümesi (pozitif tam sayılar kümesi) $\mathbb{Z}^+$'nın boş olmayan sonlu bir alt kümesidir, yani $N \subset \mathbb{Z}^+$ ve $N \neq \emptyset$ ve $|N| < \infty$. Eğer $|N| = n$ ise, birey kümesi $N = \{1, 2, \dots n\}$ şeklinde gösterilmektedir. Birey kümesinin her elemanı sayı, bir bireyi temsil etmektedir. i, j, k gibi harfler birey kümesinden alınan rastgele temsili bireyleri anlatmak için kullanılacaktır. N birey kümesinin boş olmayan tüm alt kümelerine ***koalisyon*** denmektedir. Koalisyonlar A, B, C, S, T gibi büyük harfler ile gösterilecektir. $\mathcal{C}^N = \{S \subseteq N : S \neq \emptyset\}$ kümesi N birey kümesinin tüm koalisyonları kümesini, $\mathcal{C}_i^N = \{S \in \mathcal{C}^N : i \in S\}$ kümesi de i bireyinin içerisinde yer aldığı N'in tüm koalisyonları kümesini gösterecektir. Eğer $P \subseteq N$ ise $\mathcal{C}_i^P = \{S \in \mathcal{C}^P : i \in S\}$ kümesi i bireyinin içerisinde yer aldığı P'nin tüm koalisyonları kümesini gösterecektir. Bir T koalisyonu i, j ve k bireylerinden oluşuyor ise bu koalisyon $T = (i, j, k)$ şeklinde gösterilecektir.

$\succsim_i$ her $i \in N$ bireyi için $\mathcal{C}_i^N$ üzerine tanımlı ***karşılaştırılabilir*** ve ***geçişken*** bir ***sıralama bağıntısı***nı gösterecektir[6]. Her $i \in N$ bireyi için, $\succsim_i$ sıralama bağıntısına i ***bireyinin*** $\mathcal{C}_i^N$ ***üzerine tanımlı tercihi*** diyeceğiz. $\succsim_i$ sıralama bağıntısının **sıkı** hali $\succ_i$ ile kayıtsız hali ise $\sim_i$ ile gösterilmektedir. Rastgele $A, B \in \mathcal{C}_i^N$ için $A \succ_i B \Leftrightarrow A \succsim_i B$ ve $B \not\succsim_i A$ olur. $A \sim_i B \Leftrightarrow A \succsim_i B$ ve $B \succsim_i A$ olur.

Her $i \in N$ için $L(\mathcal{C}_i^N)$ kümesine, i bireyinin $\mathcal{C}_i^N$ üzerine tanımlı tüm $\succsim_i$ tercihleri kümesi diyeceğiz. $N = \{1, 2, \dots, n\}$ birey kümesi için, $\mathcal{R}^N = L(\mathcal{C}_1^N) \times L(\mathcal{C}_2^N) \times \dots \times L(\mathcal{C}_n^N)$ kartezyen kümesine ***tüm tercih profilleri kümesi*** diyeceğiz. Rastgele bir $\succsim = (\succsim_1, \dots, \succsim_n) \in \mathcal{R}^N$ listesine ***tercih profili*** diyeceğiz.

Tanım 1.1: N rastgele bir birey kümesi ve $\succsim \in \mathcal{R}^N$ tercih profili olsun. Her $(N, \succsim)$ ikilisine **hedonik koalisyon oluşumu oyunu** (kısaca hedonik oyun) denir.

$\mathcal{G} = \{(N, \succsim) : N \subset \mathbb{Z}^+, N \neq \emptyset$ ve $|N| < \infty$ ve $\succsim \in \mathcal{R}^N\}$ en geniş tanım kümesini (tüm hedonik oyunlar kümesi) göstermektedir. Her $i \in N$ bireyi için $L(\mathcal{C}_i^N)$ üzerine veya genel olarak $\mathcal{R}^N$ üzerine kısıtlamak konularak $\mathcal{G}$ kümesinin altkümeleri (… özelliğini sağlayan hedonik oyunlar kümesi) elde edilmektir. Örneğin, her $i \in N$ bireyi için $\mathcal{C}_i^N$ üzerine tanımlı karşılaştırılabilir ve geçişken $\succsim_i$ tercihleri yerine sadece sıkı tercihleri $\succ_i$ alırsak bir kısıtlama yapmış oluruz. Sıkı tercihler, bireylerin farklı koalisyonlar arasında kayıtsız kalmasına izin vermemektedir. Bu sebeple en geniş tanım kümesinden koalisyonlar arası kayıtsız kalmaya izin verilen tüm hedonik oyunları atmış oluruz ve $\mathcal{G}' = \{(N, \succ)\} \subset \mathcal{G}$ elde ederiz. **Ek Bölüm A**'da literatürde üzerinde çalışma yapılmış bazı altkümeler tanıtılmıştır.

Rastgele bir hedonik oyun $(N, \succsim)$ verildiğinde, bu oyunun çıktıları birey kümesi N'in birbiriyle kesişimi olmayan alt kümelere bölümlenmesidir (partisyonudur). Başka bir deyişle, $\pi = \{T_1, T_2, \dots, T_K\}$ ($K < |N|$ pozitif sayı) $(N, \succsim)$ hedonik oyununda herhangi bir çıktı ise

- $\forall l \in \{1,2, \dots, K\}$ $T_l \neq \emptyset$,
- $\forall l \neq m \in \{1,2, \dots, K\}$, $T_l \cap T_m = \emptyset$ ve
- $\bigcup_{l=1}^{K} T_l = N$ olur.

$\pi = \{T_1, T_2, \dots, T_K\}$'ye **koalisyon yapısı** denmektedir. $\pi(i)$, π koalisyon yapısında i bireyinin içerisinde yer aldığı koalisyonu simgelemektedir. Tüm

6 $\succsim_i$ bağıntısının ***karşılaştırılabilirlik özelliği***: $\forall A, B \in \mathcal{C}_i^N$, $A \succsim_i B$ veya $B \succsim_i A$. $\succsim_i$ bağıntısının ***geçişkenlik özelliği***: $\forall A, B, C \in \mathcal{C}_i^N$, $A \succsim_i B$ ve $B \succsim_i A \Longrightarrow A \succsim_i C$.

bireylerin tek başına olduğu koalisyon yapısı $\{(1),(2),\dots,(n)\}$'nı $\mathcal{I}$ sembolü ile göstereceğiz. Herkesin bir arada olduğu büyük koalisyon yapısı $\{(1,2,\dots,n)\}$'nı ise $\mathcal{N}$ sembolü ile göstereceğiz. Bu iki koalisyon yapısına $(N,\succsim)$ hedonik oyununun **sıradan koalisyon yapıları** denmektedir. Bunların dışında kalan tüm koalisyon yapılarına ise **sıradan olmayan koalisyon yapıları** denmektedir. Sıradan koalisyon yapıları en uç durumları temsil etmektedir. $\mathcal{I}$ koalisyon yapısı hiçbir bireyin işbirliği yapmadığı durumları, $\mathcal{N}$ koalisyon yapısı ise tüm bireylerin bir arada oldukları tam işbirliği olan durumları temsil etmektedir.

Bir birey kümesi N düşünüldüğünde $\prod^N$ tüm koalisyon yapıları kümesini, $\prod_0^N = \prod^N \backslash \{\mathcal{I},\mathcal{N}\}$ de tüm sıradan olmayan koalisyon yapıları kümesini gösterecektir.

Örnek 1.1: $N = \{1,2,3\}$ birey kümesi ve $\succsim = \{\succsim_1,\succsim_2,\succsim_3\}$ tablodaki gibi bir tercih profili olsun.

$\succsim_1$	$\succsim_2$	$\succsim_3$
$13 \sim 123$	123	13
12	23	23
1	12	123
	2	3

$N = \{1,2,3\}$ için bu oyunda toplam 5 tane çıktı bulunmaktadır. Bunlar sırasıyla $\pi^1 = \{(1,3),(2)\}$, $\pi^2 = \{(1),(2,3)\}$, $\pi^3 = \{(1,2),(3)\}$, $\pi^4 = \mathcal{N} = \{(1,2,3)\}$ ve $\pi^5 = \mathcal{I} = \{(1),(2),(3)\}$ koalisyon yapılarıdır. $\prod_0^N = \{\pi^1,\pi^2,\pi^3\}$'tür.

Tanım 1.2: $(N,\succsim)$ bir hedonik oyun ve $\pi \in \prod^N$ olsun.

- $S \in \mathcal{C}^N$ olsun. $\forall\, i \in N,\ S \succ_i \pi(i)$ ise S koalisyonu π koalisyon yapısını ***bloke ediyor*** denir.
- π koalisyon yapısı hiçbir $S \in \mathcal{C}^N$ tarafından bloke edilemiyor ise ***çekirdek kararlı***dır denir, yani, π **çekirdek kararlı** (ÇK) ancak ve ancak $\nexists\, S \in \mathcal{C}^N$ öyle ki $\forall i \in S, S \succ_i \pi(i)$.
- $S \in \mathcal{C}^N$ olsun. $\forall\, i \in N,\ S \succsim_i \pi(i)$ ve $\exists\, j \in N,\ S \succ_j \pi(j)$ ise S koalisyonu π koalisyon yapısını ***zayıf bloke ediyor*** denir.

- π koalisyon yapısı hiçbir $S \in \mathcal{C}^N$ tarafından zayıf bloke edilemiyor ise ***sıkı çekirdek kararlı***dır denir, yani, π **sıkı çekirdek kararlı** (SÇK) ancak ve ancak $\nexists S \in \mathcal{C}^N$ öyle ki $\forall i \in S$, $S \succsim_i \pi(i)$ ve $\exists j \in S$, $S \succ_j \pi(j)$.
- π **Nash kararlı** (NK) ancak ve ancak $\nexists i \in N$, $\nexists S \in (\pi \cup \{\emptyset\})$ öyle ki $(S \cup \{i\}) \succ_i \pi(i)$.
- π **bireysel kararlı** (BK) ancak ve ancak $\nexists i \in N$, $\nexists S \in (\pi \cup \{\emptyset\})$ öyle ki $(S \cup \{i\}) \succ_i \pi(i)$ ve $\forall j \in S$, $(S \cup \{i\}) \succsim_j S$.
- π **sözleşmeli bireysel kararlı** (SBK) ancak ve ancak $\nexists i \in N$, $\nexists S \in (\pi \cup \{\emptyset\})$ öyle ki $(S \cup \{i\}) \succ_i \pi(i)$ ve $\forall j \in S$, $S \cup \{i\} \succsim_j S$ ve $\forall k \in (\pi(i)\backslash\{i\})$, $(\pi(i)\backslash\{i\}) \succsim_k \pi(k)$.
- π **bireysel rasyonel** (BR) ancak ve ancak $\forall i \in N$, $\pi(i) \succsim_i \{i\}$.
- π **Pareto optimal** (PO) ancak ve ancak $\nexists \pi' \in \prod^N$ öyle ki $\forall i \in N$, $\pi'(i) \succsim_i \pi(i)$ ve $\exists j \in N$, $\pi'(j) \succ_j \pi(j)$.

Her sıkı çekirdek kararlı koalisyon yapısı aynı zamanda çekirdek kararlı, Pareto optimal, bireysel kararlı ve bireysel rasyoneldir. Tüm çekirdek kararlı koalisyon yapıları bireysel rasyoneldir. (Sıkı) çekirdek kararlılık ve Nash kararlılık arasında herhangi bir gerektirme ilişkisi bulunmamaktadır, bu kavramlar birbirinden bağımsızdır. Eğer bir koalisyon yapısı Nash kararlı ise aynı zamanda bireysel kararlı, sözleşmeli bireysel kararlı ve bireysel rasyoneldir. Ayrıca tüm bireysel kararlı koalisyon yapıları aynı zamanda sözleşmeli bireysel kararlı ve bireysel rasyoneldir. Bireysel rasyonellik ve sözleşmeli bireysel kararlılık kavramları arasında ise bir gerektirme ilişkisi yoktur. Çekirdek kararlılık veya Nash kararlılıktan başlayarak ilgili olan kararlılık kavramlarının sınıflandırılması Sung ve Dimitrov (2007a)'da yapılmıştır.

En geniş tanım kümesi $\mathcal{G}$ düşünüldüğünde, her hedonik oyun için Pareto optimal koalisyon yapıları, sözleşmeli bireysel kararlı koalisyon yapıları ve bireysel rasyonel koalisyon yapıları her zaman mevcuttur (Dimitrov ve Sung, 2007). Diğer koalisyon yapılarının varlığı $\mathcal{G}$'nin bazı alt kümelerinde mümkündür.

Örnek 1.1'i düşünelim. $N = \{1, 2, 3\}$ için bu oyunda toplam 5 tane çıktı bulunmaktadır. Bunlar sırasıyla $\pi^1 = \{(1,3),(2)\}$, $\pi^2 = \{(1),(2,3)\}$, $\pi^3 = \{(1,2),(3)\}$, $\pi^4 = \mathcal{N} = \{(1,2,3)\}$ ve $\pi^5 = \mathcal{I} = \{(1),(2),(3)\}$ koalisyon yapılarıdır. Bu koalisyon yapılarının kararlılıklarını inceleyelim:

- $\pi^1 = \{(1,3),(2)\}$ koalisyon yapısı sıkı çekirdek kararlıdır. Dolayısıyla aynı zamanda Pareto optimal, çekirdek kararlı, bireysel kararlı, sözleşmeli bireysel kararlı ve bireysel rasyoneldir. Ancak Nash kararlı değildir. Çünkü 2 numaralı birey var olan (1,3) koalisyonuna katılarak daha yüksek bir tercihinde yer almış olur ve böylelikle bu koalisyon yapısını bireysel olarak bloke eder.

- $\pi^2 = \{(1), (2,3)\}$ koalisyon yapısı Pareto optimaldir. Çekirdek kararlı değildir. Çünkü $(1,3)$ koalisyonu bir araya gelerek kendi başlarına yeni bir koalisyon oluştururlar ve bu koalisyondaki tüm bireyler daha yüksek tercihlerinde yer alırlar. Yani $(1,3)$ bu koalisyon yapısını bloke eder. Nash kararlı değildir. Çünkü 1 numaralı birey var olan (2,3) koalisyonuna katılarak daha yüksek bir tercihinde yer almış olur ve böylelikle bu koalisyon yapısını bireysel olarak bloke eder. Bu koalisyon yapısı bireysel kararlı değildir, ancak sözleşmeli bireysel kararlıdır. Bireysel kararlı olmamasının sebebi, 3 numaralı bireyin var olan (1) koalisyonuna katıldığında 1 numaralı bireyin daha mutlu olmasıdır. Sözleşmeli bireysel kararlıdır, çünkü hiçbir birey şimdiki koalisyonundan ayrılıp var olan başka bir koalisyona katılırsa ya da yalnız kalırsa, katıldığı koalisyondaki herkesi ve geride bıraktığı herkesi aynı anda en az daha mutlu edememektedir.
- $\pi^4 = \{(1,2,3)\}$ koalisyon yapısı Nash kararlı, çekirdek kararlı ve Pareto optimaldir. Ancak sıkı çekirdek kararlı değildir. Çünkü (1,3) koalisyonu zayıf olarak bu koalisyon yapısını bloke etmektedir (1 numaralı birey kayıtsız kalmakta, 3 numaralı birey daha mutlu olabilmektedir).
- $\pi^3 = \{(1,2), (3)\}$ ve $\pi^5 = \{(1), (2), (3)\}$ koalisyon yapıları sadece ve sadece bireysel rasyoneldir. Bu koalisyon yapıları, tekil bireylerin var olan bir koalisyona katılması şeklinde ya da birkaç bireyin yeni bir koalisyon oluşturması şeklinde bloke edilebilmektedir. Pareto optimal olmamalarının sebebi sırasıyla şöyledir: π^4 koalisyon yapısı π^3'e Pareto baskındır, yani tüm bireyler π^4 koalisyon yapısındaki yerlerinde π^3'teki yerlerine göre en az daha mutludurlar. Aynı şekilde π^1, π^2, π^3 ve π^4 koalisyon yapıları da π^5'e Pareto baskındır.

Örnek 1.2: $N = \{1, 2, 3\}$ birey kümesi ve $\succsim = \{\succsim_1, \succsim_2, \succsim_3\}$ tablodaki gibi bir tercih profili olsun.

$\succsim_1$	$\succsim_2$	$\succsim_3$
12	23	13
13	12	23
123	123	3
1	2	123

$N = \{1, 2, 3\}$ için bu oyunda toplam 5 tane koalisyon yapısı bulunmaktadır. Sırasıyla $\pi^1 = \{(1,2), (3)\}$, $\pi^2 = \{(1), (2,3)\}$, $\pi^3 = \{(1,3), (2)\}$, $\pi^4 = \mathcal{N} = \{(1,2,3)\}$ ve $\pi^5 = \mathcal{I} = \{(1), (2), (3)\}$ koalisyon yapılarını düşünelim. Bu koalisyon yapılarından hiçbiri çekirdek kararlı, Nash kararlı ve bireysel kararlı değildir. $\pi^* = \{(i,j), (k)\}$ şeklindeki tüm koalisyon yapıları sözleşmeli bireysel kararlı, Pareto optimal ve bireysel rasyoneldir. π^4 koalisyon yapısı ise hiçbir kararlılık kavramını sağlamamaktadır. Pareto optimal ve bireysel rasyonel de değildir. Tüm $\pi^* = \{(i,j), (k)\}$ koalisyon yapıları π^4'e Pareto baskındır. 3 numaralı birey ise tek başına kalmayı $(1,2,3)$'ün içinde yer almaya tercih ettiğinden dolayı bireysel rasyonellik bozulmaktadır.

2. İçsel Kararlılık

Bu ünitede ilk önce içsel kararlılık tanıtılacaktır. Devamında en geniş tanım kümesinde içsel kararlılık ile çekirdek kararlılık, Nash kararlılık, Pareto optimallik ve bireysel rasyonellik kavramları arasındaki ilişki analiz edilecektir. Daha sonra içsel algoritma tanıtılacak ve içsel algoritma yardımı ile sıradan olmayan tüm içsel kararlı koalisyon yapılarını bulmanın mümkün olduğu ispat edilecektir. Son olarak içsel algoritma ile içsel kararlı sıradan koalisyon yapıları arasında ilişki analiz edilecektir.

2.1. İçsel Kararlılık

Tanım 2.1: $(N, \succsim)$ bir hedonik oyun, $S \in \mathcal{C}^N$ ve $\pi = \{S_1, \dots, S_K\} \in \prod^N$ olsun.

- Eğer $\nexists\, T \subset S$ öyle ki $\forall\, i \in T,\ T \succ_i S$ ise S koalisyonuna ***içsel kararlı koalisyon*** denir.
- $\pi = \{S_1, \dots, S_K\}$ koalisyon yapısı içerisinde yer alan tüm koalisyonlar içsel kararlı ise π'ye ***içsel kararlı*** denir, yani, π **içsel kararlı** (İK) ancak ve ancak $\nexists S_l \in \pi,\ \nexists T \subset S_l$ öyle ki $\forall i \in T,\ T \succ_i S_l$.

Yorum: Tüm bireylerin tek başına bulundukları koalisyon yapısı $\mathcal{I}$, tanım gereği doğrudan içsel kararlıdır. Ancak bu çalışmanın odak noktalarından biri de en geniş tanım kümesinde sıradan olmayan içsel kararlı koalisyon yapılarının içsel algoritma yardımı ile bulunabileceğini göstermektir. Bunun temel sebebi, koalisyon oluşturma oyunlarının ortaya çıkışına dayanmaktadır (Aumann ve Dreze, 1974). Tüm bireylerin tek başına olduğu koalisyon yapılarında işbirliği kavramından söz edilemez. Tüm bireylerin hepsinin büyük koalisyonu oluşturduğu durumlar da her zaman geçerli değildir, çünkü koalisyon büyüklüğü arttıkça parçalanmalar başlamaktadır. Dolayısıyla kararlılık kavramlarının sıradan olmayan koalisyon yapıları üzerinde çalışılması daha verimli olmaktadır.

Örnek 1.2'yi düşünelim. Bu hedonik oyundaki çıktılardan hiçbiri (sırasıyla $\pi^1 = \{(1,2),(3)\}$, $\pi^2 = \{(1),(2,3)\}$, $\pi^3 = \{(1,3),(2)\}$, $\pi^4 = \{(1,2,3)\}$ ve $\pi^5 = \{(1),(2),(3)\}$) çekirdek kararlı, Nash kararlı ve bireysel kararlı değildir. Ancak, $\pi^* = \{(i,j),(k)\}$ şeklindeki tüm sıradan olmayan koalisyon yapıları içsel kararlıdır ve bu koalisyon yapılarının her birinde en az iki birey için işbirliği söz konusudur.

2.2. İçsel Kararlılık ve Diğer Kararlılık Kavramları

Bu ünitedeki tüm sonuçlar en geniş tanım kümesinde elde edilmektedir. İlk önce içsel kararlılık ile bireysel rasyonellik, çekirdek kararlılık, Nash kararlılık ve Pareto optimallik arasında gerektirme ilişkileri gösterilecektir. Devamında İçsel algoritma tanıtılacaktır. En geniş tanım kümesinden rastgele bir hedonik oyun alındığında içsel algoritma yardımıyla tüm sıradan olmayan ve sıradan olan içsel kararlı koalisyon yapıları bulunabileceği gösterilecektir. Devamında içsel algoritmanın sıradan koalisyon yapılarını vermesi durumunda bu koalisyon yapılarının özellikleri gösterilecektir.

Teorem 2.1: $(N, \succsim)$ bir hedonik oyun, $\pi = \{S_1, \dots, S_K\} \in \prod^N$ bir koalisyon yapısı olsun. Eğer π içsel kararlı ise aynı zamanda bireysel rasyoneldir.

İspat: $\pi = \{S_1, \dots, S_K\} \in \prod^N$ içsel kararlı bir koalisyon yapısı olsun. Aksine, π bireysel rasyonel olmasın. O zaman, $\exists i \in N$ öyle ki $\{i\} \succ_i \pi(i)$ olur. Ancak $\pi(i) := S_l$ ve $T := \{i\}$ şeklinde yeniden yazarsak, tanım gereği $T = \{i\}$ alt koalisyonu S_l 'i bloke eder. Bu durum, π'nin içsel kararlı olmasıyla **çelişki**dir. Sonuç olarak her içsel kararlı koalisyon yapısı aynı zamanda bireysel rasyoneldir. ■

Teorem 2.2: $(N, \succsim)$ bir hedonik oyun, $\pi = \{S_1, \dots, S_K\} \in \prod^N$ bir koalisyon yapısı olsun. Eğer π çekirdek kararlı ise aynı zamanda içsel kararlıdır.

İspat: $\pi = \{S_1, \dots, S_K\} \in \prod^N$ çekirdek kararlı bir koalisyon yapısı olsun. Aksine, π içsel kararlı olmasın. O zaman, $\exists S_l \in \pi, \exists T \subset S_l$ öyle ki $\forall i \in T, T \succ_i S_l$ olur. Ancak T koalisyonu bu durumda π'yi de bloke etmektedir. Bu durum, π'nin çekirdek kararlı olmasıyla **çelişki**dir. Sonuç olarak her çekirdek kararlı koalisyon yapısı aynı zamanda içsel kararlıdır. ■

İçsel kararlı koalisyon yapıları çekirdek kararlı olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örneği düşünelim.

Örnek 2.1: $N = \{1, 2, 3, 4\}$ birey kümesi ve $\succsim = \{\succsim_1, \succsim_2, \succsim_3, \succsim_4\}$ tablodaki gibi bir tercih profili olsun.

$\succsim_1$	$\succsim_2$	$\succsim_3$	$\succsim_4$
123	12	23	14
12	23	123	24
14	123	13	34
13	24	34	234
…	234	234	…
1	…	3	4
	2	…	1234

$\pi^1 = \{(1,4), (2,3)\}$ koalisyon yapısı içsel kararlıdır, ancak çekirdek kararlı değildir. Çünkü $S = (1,2)$ koalisyonu bir araya gelerek π^1 koalisyon yapısını bloke eder.

Teorem 2.3: $(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. İçsel kararlılık ile Nash kararlılık birbirinden bağımsız kavramlardır. Bir diğer deyişle, İK $\nLeftrightarrow$ NK $\nLeftrightarrow$ İK.

İspat için en az bir tane içsel kararlı olup Nash kararlı olmayan ve Nash kararlı olup içsel kararlı olmayan koalisyon yapısı bulmak yeterlidir.

İspat: Örnek 2.1'i düşünelim. Bu hedonik oyunda $\pi^2 = \{(1,2,3), (4)\}$ koalisyon yapısı Nash kararlıdır ancak içsel kararlı değildir. Çünkü (2,3) koalisyonu bir araya gelerek π^2'yi içsel bloke eder. $\pi^3 = \{(1,2), (3,4)\}$ koalisyon yapısı içsel kararlıdır, ancak Nash kararlı değildir. 3 numaralı birey var olan (1,2) koalisyonuna katılarak tercih sırasında daha yukarı çıkabilmektedir. Sonuç olarak İK $\nLeftrightarrow$ NK $\nLeftrightarrow$ İK olur. ■

Hem Nash kararlılığı hem de içsel kararlılığı sağlayan koalisyon yapıları ile her ikisini birden sağlamayan koalisyon yapılarını bulmak mümkündür. Örneğin, Örnek 2.1'deki $\pi^5 = \{(1), (2,3,4)\}$ koalisyon yapısı ne içsel kararlı ne de Nash kararlıdır. Örnek 1.1'deki $\pi^4 = \{(1,2,3)\}$ koalisyon yapısı ise hem Nash kararlı hem de içsel kararlıdır.

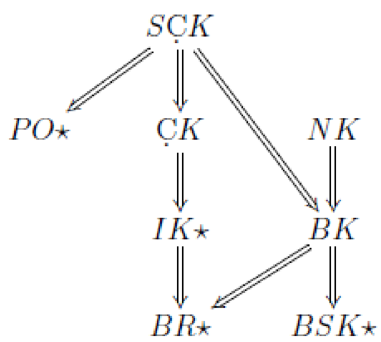
Teorem 2.4: $(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. İçsel kararlılık ile Pareto optimallik birbirinden bağımsız kavramlardır. Bir diğer deyişle, İK $\nLeftrightarrow$ PO $\nLeftrightarrow$ İK.

İspat için en az bir tane içsel kararlı olup Pareto optimal olmayan ve Pareto optimal olup içsel kararlı olmayan koalisyon yapısı bulmak yeterlidir.

İspat: Örnek 2.1'i düşünelim. Bu hedonik oyunda $\pi^2 = \{(1,2,3),(4)\}$ koalisyon yapısı Pareto optimaldir ancak içsel kararlı değildir. Bunun sebebi (2,3) koalisyonunun π^2'yi içsel bloke etmesidir. $\pi^4 = \{(1,3),(2,4)\}$ koalisyon yapısı içsel kararlıdır, ancak Pareto optimal değildir. $\pi^3 = \{(1,4),(2,3)\}$ koalisyon yapısı π^4'e Pareto baskındır. Sonuç olarak IK $\nRightarrow$ PO $\nRightarrow$ IK olur. ■

Hem Pareto optimalliği hem de içsel kararlılığı sağlayan koalisyon yapıları ile her ikisini birden sağlamayan koalisyon yapılarını bulmak mümkündür. Örnek 2.1'i düşünelim. $\pi^1 = \{(1,4),(2,3)\}$ koalisyon yapısı hem Pareto optimal hem de içsel kararlıdır. $\pi^5 = \{(1),(2,3,4)\}$ koalisyon yapısı ne içsel kararlı ne de Pareto optimaldir.

İçsel kararlılık kavramı ile 1. ünitede tanıttığımız diğer kararlılık kavramları arasındaki ilişki Şekil 1'de açıklanmaktadır. Tek taraflı gerektirme okunun anlamı şu şekildedir: yukarıdaki kararlılık kavramı aşağıdaki kararlılık kavramını gerektirmektedir. Aralarında doğrudan ya da dolaylı bir şekilde gerektirme oku (okları) bulunmayan kararlılık kavramları birbirinden bağımsızdır. Yanında yıldız işareti bulunan kararlılık kavramları en geniş tanım kümesinde her zaman vardır. Diğer kararlılık kavramları sadece belirli altkümelerde mevcuttur.



Şekil 1: Kararlılık kavramları arasındaki ilişki.

2.3. İçsel Algoritma

$(N,\succsim)$ bir hedonik oyun olsun. $\forall i \in N$, $\mathcal{A}_i$ kümesini ve $ArgMax_{\succsim_i}\{.\}$ operatörünü şu şekilde tanımlayalım:

- $\mathcal{A}_i = \{S \in C_i^{P_\alpha} : \forall j \in S, S \succsim_j (j)\}$. $\mathcal{A}_i$ kümesi $C_i^{P_\alpha}$ koalisyonları arasında tüm bireyler için bireysel rasyonel olan koalisyonlar topluluğudur. İçsel algoritmanın ilk kısmında her adımda P_α kümesi yeniden belirlenecektir.
- $ArgMax_{\succsim_i}\{.\}$ operatörü, $\{.\}$ kümesi içerisinde yer alan koalisyonlar arasından, i bireyinin tercih listesinde en üstte yer alan **rastgele** bir koalisyonu seçer.

İçsel Algoritma

1. Kısım: N birey kümesini düşünelim.

1.1.1:$P_1^1 := N$ birey kümesiyle başlayalım. **Rastgele bir birey seçelim** ve bireye i_1 diyelim.

1.1.2: $S_1 := ArgMax_{\succsim_{i_1}} \mathcal{A}_{i_1}$ koalisyonunu seçelim.

1.2.1: $P_2^1 := N \backslash S_1$ birey kümesini düşünelim. **Rastgele bir birey seçelim** ve bireye i_2 diyelim.

1.2.2: $S_2 := ArgMax_{\succsim_{i_2}} \mathcal{A}_{i_2}$ koalisyonunu seçelim.

……..…

1.k.1: $P_k := N \backslash (\bigcup_{i=1}^{k-1} S_i)$ birey kümesini düşünelim. **Rastgele bir birey seçelim** ve bireye i_k diyelim.

1.k.2: $S_\mathrm{k} := ArgMax_{\succsim_{i_\mathrm{k}}} \mathcal{A}_{i_\mathrm{k}}$ koalisyonunu seçelim.

……..…

$|N| < \infty$ ve $\forall i \in N$ $|C_i^N| < \infty$ olduğu için algoritmanın ilk kısmı sonlu bir adımda duracaktır, yani, $\exists K_1 < |N|$ öyle ki $N \backslash (\bigcup_{m=1}^{K_1} S_m) = \emptyset$ ve S_{K_1} son seçilen koalisyon olur.

2. Kısım:

2.1: $\forall l \in \{1, 2, \ldots, K_1\}$ eğer $\exists T_l \subset S_l$ öyle ki $\forall j \in T_l$, $T_l \succ_j S_l$ ise $C_l^1 := T_l$, değil ise $C_l^1 := S_l$ şeklinde tanımlayalım.

Bu adımda $C_l^1 := T_l$ seçilirken şu ölçüt dikkate alınmalıdır: $\nexists T_l' \subset T_l \subset S_l$ öyle ki $\forall i \in T_l'$, $T_l' \succ_i T_l \succ_i S_l$. Eğer böyle bir T_l' var ise $C_l^1 := T_l'$ seçilmelidir. Eğer T_l' içindeki tüm bireyler ya da bir kısmı T_l içinde yer alma durumu ile kayıtsız kalıyorlar ise bu durumda **rastgele** $C_l^1 := T_l$ veya $C_l^1 := T_l'$ seçilebilir.

2.2: $\bigcup_{l=1}^{K_1} (S_l \backslash T_l)$ birey kümesini oluşturalım.

2.3: $\bigcup_{l=1}^{K_1} (S_l \backslash T_l)$ kümesini, $P_1^2 := \bigcup_{l=1}^{K_1} (S_l \backslash T_l)$ şeklinde tanımlayarak 1. Kısım'a girdi olarak sokalım.

2.4: 1. Kısım'ı her çalıştırdığımızda K sonlu adımlarına ait alt indisleri ve 2. Kısım'daki üst indisleri bir arttıralım.

3. Kısım: Sonuç

$|N| < \infty$ ve $\forall i \in N$ $|\mathcal{C}_i^N| < \infty$ olduğu için 1. ve 2. Kısım'daki tüm taramalar sonlu sayıda adım sonra (var sayalım ki L. adımda) duracaktır.

3.1: $\pi = \{C_1^1, \dots, C_{K_1}^1, \dots, C_1^L, \dots, C_{K_L}^L\}$ koalisyon yapısını oluşturalım.

Yorum: İçsel algoritma her çalıştırıldığında birbirinden farklı koalisyon yapıları verecektir. Bunun sebebi 1. ve 2. kısımlardaki rastgele seçimlerdir. 1. Kısım'da her ilk adımda rastgele bireyler seçilmektedir. Devamında $ArgMax_{\succsim_i}\{.\}$ operatörü her seçilen birey için en üst tercihte yer alan koalisyonlardan rastgele birini seçmektedir. 2. kısımda kayıtsızlık durumunda da rastgele seçim yapılmaktadır. İçsel algoritmanın bu özelliği sayesinde, verilen bir hedonik oyunda içsel algoritma sonlu kez çalıştırılarak içsel kararlı tüm koalisyon yapılarını bulmak mümkündür.

Teorem 2.5: $(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. İçsel algoritmanın ürettiği her $\pi \in \prod_0^N$ koalisyon yapısı içsel kararlıdır.

İspat: $(N, \succsim)$ hedonik oyununa içsel algoritmayı uygulayalım. $|N| < \infty$ ve $\forall i \in N$ $|\mathcal{C}_i^N| < \infty$ olduğu için içsel algoritmanın L tekrarlama sonrası durduğunu farz edelim.

$\pi \in \prod_0^N$ içsel algoritma tarafından üretilen sıradan olmayan bir koalisyon yapısı olsun ve $\pi = \{C_1^1, \dots, C_{K_1}^1, \dots, C_1^L, \dots, C_{K_L}^L\}$ şeklinde olsun. $\forall C_m^l$ $(l \leq L$ ve $m \leq K_l)$, $\forall T_m \subset C_m^l$, $\forall j \in T_m$, $C_m^l \succsim_j T_m$. Bu sonuç algoritmanın 2. Kısım'ı tarafından garanti edilmektedir. Var sayalım ki böyle bir şey olmasın. Yani, $\exists T_m \subset C_m^l$ öyle ki $\forall j \in T_m$, $T_m \succ_j C_m^l$ olsun. O zaman algoritmanın 2. Kısım'ında $C_m^l = T_m$ seçilmiş olması gerekiyordu. Bu da her C_m^l koalisyonun içsel kararlı olmasıyla ve algoritmanın çalışma şekli ile **çelişki** yaratmaktadır. Bu bütün $l \leq L$ ve $m \leq K_l$ için doğrudur. Sonuç olarak içsel algoritmanın getirdiği $\pi = \left\{C_1^1, \dots, C_{K_1}^1, \dots, C_1^L, \dots, C_{K_L}^L\right\} \in \prod_0^N$ sıradan olamayan tüm koalisyon yapıları içsel kararlıdır. ■

Teorem 2.6: $(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. Eğer içsel algoritma $\mathcal{I} = \{(1),(2),\dots,(n)\}$ sıradan koalisyon yapısını veriyor ise $\mathcal{I}$ çekirdek kararlıdır.

İspat: $(N, \succsim)$ hedonik oyununa içsel algoritmayı uygulayalım. İçsel algoritmanın getirdiği koalisyon yapısı $\mathcal{I} = \{(1),(2),\dots,(n)\} = \{C_1^1,\dots,C_{K_1}^1,\dots,C_1^L,\dots,C_{K_L}^L\}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{A}_i = \{S \in \mathcal{C}_i^{P_\alpha} : \forall j \in S, S \succsim_j (j)\}$ kümesinin tanımı gereği en iyimser durumda, her birey tek başına kalmak ile herhangi bir koalisyon içerisinde yer almak arasında kayıtsızdır, yani, $\forall\, i \in N,\ \forall\, S \in \mathcal{C}_i^N,\ (i) \succsim_i S$. Bu durumda $\nexists\, S \in \mathcal{C}^N$ öyle ki $\forall\, i \in S,\ S \succ_i \pi(i) = (i)$ olur (eğer böyle bir $S \in \mathcal{C}^N$ olsaydı, algoritmanın ilk kısmında $\mathcal{A}_i$ kümesi içerisinden S 'nin seçilmesi gerekecekti ve içsel algoritma $\mathcal{I} = \{(1),(2),\dots,(n)\}$ dışında bir koalisyon yapısı verecekti). Sonuç olarak $\mathcal{I} = \{(1),(2),\dots,(n)\}$ çekirdek kararlıdır. ■

Teorem 2.7: $(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. Eğer içsel algoritma $\mathcal{N} = \{(1,2,\dots,n)\}$ sıradan koalisyon yapısını veriyor ise $\mathcal{N}$ içsel kararlı, çekirdek kararlı ve Nash kararlıdır.

İspat: : $(N, \succsim)$ hedonik oyununa içsel algoritmayı uygulayalım. İçsel algoritmanın getirdiği koalisyon yapısı $\mathcal{N} = \{(1,2,\dots,n)\}$ olsun. İlk önce $\mathcal{N}$'in çekirdek kararlı olduğunu gösterelim. $\mathcal{A}_i = \{S \in \mathcal{C}_i^{P_\alpha} : \forall j \in S, S \succsim_j (j)\}$ kümesinin tanımı gereği en iyimser durumda, her birey $(1,2,\dots,n)$ koalisyonu içinde yer almak ile herhangi bir koalisyon içerisinde yer almak arasında kayıtsızdır, yani, $\forall\, i \in N,\ \forall\, S \in \mathcal{C}_i^N,\ (1,2,\dots,n) \succsim_i S$. Bu durumda $\nexists\, S \in \mathcal{C}^N$ öyle ki $\forall\, i \in S,\ S \succ_i \pi(i) = (1,2,\dots,n)$ olur. Yani hiçbir koalisyon $\mathcal{N}$'yi bloke edememektedir (eğer böyle bir $S \in \mathcal{C}^N$ olsaydı, algoritmanın ilk kısmında $\mathcal{A}_i$ kümesi içerisinden S 'nin seçilmesi gerekecekti ve içsel algoritma $\mathcal{N}$ dışında bir koalisyon yapısı verecekti). Sonuç olarak $\mathcal{N} = \{(1,2,\dots,n)\}$ çekirdek kararlı, dolayısıyla da içsel kararlıdır.

Yine $\mathcal{A}_i$ kümesinin tanımı gereği ve yukarıda tanımladığımız duruma göre hiçbir birey $(1,2,\dots,n)$ koalisyonundan ayrılıp tek başına kalmak istememektedir (var olan bir koalisyona katılma durumu da yoktur çünkü tek var olan koalisyon $(1,2,\dots,n)$'dur). Bu durumda $\mathcal{N} = \{(1,2,\dots,n)\}$ koalisyon yapısı aynı zamanda Nash kararlıdır. ■

Teorem 2.6 ve Teorem 2.7'den yola çıkarak şu sonuçlara varabiliriz. Eğer içsel algoritma $\mathcal{I} = \{(1),(2),\dots,(n)\}$ koalisyon yapısını getiriyor ise tüm bireyler tek başlarına kaldıkları durum ile herhangi bir koalisyon içerisinde yer aldıkları durum arasında en az kayıtsız kalmaktadırlar. Bazı bireyler ise tek başına kaldıkları durumu herhangi bir koalisyon içinde yer almaya tercih etmektedirler. Bu durum gerçek hayatta nadir gözlenmektedir ve böyle zamanlarda herhangi bir işbirliği / takım çalışması mümkün olmamaktadır. Bütün insanların hepsinin farklı siyasi görüşe sahip olduğu durumlar, tüm ülkelerin birbirine düşman olduğu durumlar, bir toplumdaki herkesin birbiriyle kavgalı olduğu durumlar, bir hastanede veya eğitim kurumunda hiçbir bireyin beraber çalışmak istemediği durumlar, vs. buna örnek gösterilebilir. İçsel algoritma $\mathcal{N} = \{(1,2,\dots,n)\}$ koalisyon yapısını getiriyor ise toplumdaki tüm bireyler hep bir arada oldukları durum ile herhangi bir koalisyon içerisinde yer aldıkları durumlar arasında en az kayıtsız kalmaktadırlar. Bazı bireyler ise hep bir arada oldukları durumu herhangi bir koalisyon içinde yer almaya tercih etmektedirler. Ancak gerçek hayatta bireylerin hem fikir oldukları çok az durum mevcuttur. En uç durumlarda bile mutlaka gruplara parçalanmalar olmaktadır. İçsel algoritmanın $\mathcal{I}$ veya $\mathcal{N}$ sıradan koalisyon yapılarını verdiği durumlar çok uç durumlar olduğu için ve toplumun genel tercihlerini yansıtmadığı için bu koalisyon yapıları içsel kararlı olmanın yanı sıra çekirdek kararlılık veya Nash kararlılık gibi kuvvetli kararlılık kavramlarını da sağlamaktadırlar. Bu sebeple bu çalışmada sıradan olmayan koalisyon yapıları vurgulanmaktadır. Kararlılık kavramlarının sıradan olmayan koalisyon yapıları üzerinde çalışılması daha doğru olmaktadır çünkü bu koalisyon yapıları gerçek hayatta ortaya çıkabilecek tüm koalisyon yapıları modellemektedir.

Sonuç

Bu makalede içsel kararlılık kavramı ve içsel algoritma çalışılmıştır. İlk önce içsel kararlılık kavramı tanıtılmıştır ve içsel kararlılık kavramı ile diğer kararlılık kavramları arasındaki ilişki açıklanmıştır. Devamında içsel algoritma tanıtılmıştır. İçsel algoritmanın en geniş tanım kümesinde ürettiği sıradan olmayan tüm koalisyon yapılarının içsel kararlı olduğu ispat edilmiştir. Ayrıca, içsel algoritmanın sıradan koalisyon yapılarını getirdiği durumlarda bu koalisyon yapılarının özellikleri analiz edilmiş ve içsel kararlı olmanın yanı sıra diğer kuvvetli kararlılık kavramlarını da sağlayabildikleri gösterilmiştir. Ancak içsel algoritmanın sıradan koalisyon yapılarını verdiği durumlar uç noktalardır ve gerçek hayatta karşılaşabileceğimiz işbirliklerini modellemekten uzaktadırlar. İçsel kararlı sıradan olmayan koalisyon yapılarının ise temsiliyet yeteneği daha fazladır.

Bu çalışmada sadece içsel kararlılık ve içsel algoritma tanıtılmıştır. Bir koalisyon oluşumu fonksiyonu olarak içsel algoritmanın özellikleri (sağladığı aksiyomlar) nelerdir ve en geniş tanım kümesinde sıradan olmayan içsel kararlı koalisyon yapılarının bulunması probleminin hesaplama karmaşıklığı nedir soruları henüz çalışılmamıştır. Bu sorular ileriye yönelik açık araştırma konularıdır.

Kaynakça

Alcalde, Jose ve Pablo Revilla (2004), "Researching with Whom? Stability and Manipulation", *Journal of Mathematical Economics*, 40(8): 869-887.

Alcalde, Jose ve Antonio Romero-Medina (2006), "Coalition Formation and Stability", *Social Choice and Welfare*, 27(2): 365-375.

Aumann, Robert John ve Jacques Dreze (1974), "Cooperative Games with Coalition Structures", *International Journal of Game Theory*, 3(4): 217-237.

Aziz, Haris ve Rahul Savani (2016) "Hedonic Games", Brandt, Felix, Vincent Conitzer, Ulle Endriss, Jerome Lang ve Ariel D. Procaccia (Der.), *Handbook in Computational Social Choice* (New York: Cambridge University Press): 356-376.

Ballester, Coralio (2004), "NP-Completeness in Hedonic Games", *Games and Economic Behavior*, 49(1): 1 - 30.

Banerjee, Suryapratim, Hideo Konishi ve Tayfun Sönmez (2001), "Core in a Simple Coalition Formation Game", *Social Choice and Welfare*, 18: 135-153.

Bogomolnaia, Anna ve Matthew Owen Jackson (2002), "The Stability of Hedonic Coalition Structures", *Games and Economic Behavior*, 38(2): 201-230.

Burani, Nadia ve William Seymour Zwicker (2003), "Coalition Formation Games with Separable Preferences", *Mathematical Social Sciences*, 45(1): 27-52.

Cechlarova, Katarina ve Jana Hajdukova (2002), "Computational Complexity of Stable Partitions with *β*-Preferences", *International Journal of Game Theory*, 31: 353-364.

Cechlarova, Katarina ve Jana Hajdukova (2004a), "Stable Partitions with *w*-Preferences", *Discrete Applied Mathematics*, 138(3): 333-347.

Cechlarova, Katarina ve Jana Hajdukova (2004b), "Stability of Partitions Under *wβ*-Preferences and *βw*-Preferences"*, International Journal of Information Technology and Decision Making*, 3(4): 605-618.

Dimitrov, Dinko ve Shao-Chin Sung (2006), "Top Responsiveness and Nash Stability in Coalition Formation Games", *Kybernetica*, 42(4): 453-460.

Dimitrov, Dinko ve Shao-Chin Sung (2007), "On Top Responsiveness and Strict Core Stability", *Journal of Mathematical Economics*, 43(2): 130-134.

Dimitrov, Dinko, Peter Borm, Ruud Hendrickx ve Shao-Chin Sung (2006), "Simple Priorities and Core Stability in Hedonic Games", *Social Choice and Welfare*, 26(2): 421-433.

Dreze, Jacques ve Joseph Greenberg (1980), "Hedonic Coalitions: Optimality and Stability", *Econometrica*, 48(4): 987-1003.

Gale, David ve Lloyd Stowell Shapley (1962), "College Admissions and the Stability of Marriage", *American Mathematical Monthly*, 69(1): 9-15.

Gallo, Oihane ve Elena Inarra (2018), "Rationing Rules and Stable Coalition Structures", *Theoretical Economics*, 13(3): 933-950.

Hajdukova, Jana (2006), "Coalition Formation Games: A Survey", *International Game Theory Review*, 8(4): 613-641.

Iehle, Vincent (2007), "The Core-Partition of a Hedonic Game", *Mathematical Social Sciences*, 54(2): 176-185.

Karakaya, Mehmet (2011), "Hedonic Coalition Formation Games: A New Stability Notion", *Mathematical Social Sciences*, 61(3): 157-165.

Karakaya, Mehmet ve Bettina Klaus (2017), "Hedonic Coalition Formation Games with Variable Populations: Core Characterizations and (Im)possibilities", *International Journal of Game Theory*, 46(2): 435-455.

Liu, Yicheng, Pingzhong Tang ve Wenyi Fang (2014), "Internally Stable Matchings and Exchanges", *Proceedings of the Twenty-Eighth AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 28(1): 1433-1439.

Özbilen, Seçkin (2019), *Three Essays on Coalition Formation Games*, İstanbul Bilgi Üniversitesi, Doktora Tezi, İstanbul.

Roth, Alvin Eliot ve Marilda Oliveira Sotomayor (1990), *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modelling and Analysis* (New York: Cambridge University Press).

Schlueter, Jacob ve Judy Goldsmith (2020), "Internal Stability in Hedonic Games", *Proceedings of the Thirty-Third International FLAIRS Conference*, 154-159.

Sung, Shao-Chin ve Dinko Dimitrov (2007a), "On Myopic Stability Concepts for Hedonic Games", *Theory and Decision*, 62: 31-45.

Sung, Shao-Chin ve Dinko Dimitrov (2007b), "On Core Membership Testing for Hedonic Coalition Formation Games", *Operations Research Letters*, 35: 155-158.

Sung, Shao-Chin ve Dinko Dimitrov (2010), "Computational Complexity in Additive Hedonic Games", *European Journal of Operational Research*, 203(3): 635-639.

Ek A

Tanım A.1: **Üst Koalisyon Özelliği** (Top coalition property)

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun, $S \subseteq N,\ S \neq \emptyset$, $T \subseteq S$ ve $T \neq \emptyset$ olsun. Eğer $\forall i \in T,\ T \succ_i U$ öyle ki $U \subseteq S$ ve $i \in U$ ise T'ye S'nin **üst koalisyonu** denir. Eğer her $S \subseteq N$ ve $S \neq \emptyset$ için S'nin üst koalisyonu var ise, $(N, \succsim)$ hedonik oyunu **üst koalisyon özelliğini sağlıyor** denir.

T boş olmayan koalisyonunun S'nin üst koalisyonu olması demek, T'deki tüm bireylerin T'yi S'nin tüm alt kümelerine tercih etmesi demektir. T'deki tüm bireyler T'yi tercihlerinin en üstüne koyarlar.

Tanım A.2: **Zayıf Üst Koalisyon Özelliği** (Weak top coalition property)

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun, $S \subseteq N,\ S \neq \emptyset$, $T \subseteq S$ ve $T \neq \emptyset$ olsun. T'ye S'nin **zayıf üst koalisyonu** denir ancak ve ancak T'nin $\{T^1, T^2, \dots, T^l\}$ şeklinde sıralı bir partisyonu vardır öyle ki:

- $\forall i \in T^1$, $\forall U \subseteq S$ öyle ki $i \in U$, $T \succ_i U$ ve
- $\forall k > 1$, $\forall i \in T^k$, $\forall U \subseteq S$ öyle ki $i \in U$, $U \succ_i T \Rightarrow T \cap (\cup_{m<k} S^m) \neq \emptyset$.

Eğer her $S \subseteq N$ ve $S \neq \emptyset$ için S'nin zayıf üst koalisyonu var ise, $(N, \succsim)$ hedonik oyunu **zayıf üst koalisyon özelliğini sağlıyor** denir.

T boş olmayan alt koalisyonunun S'nin zayıf üst koalisyonu olması demek T'nin $\{T^1, T^2, \ldots, T^l\}$ şeklinde sıralı bir partisyonu olması ve

- T^1'deki tüm bireylerin T'yi S'nin tüm alt kümelerine tercih etmesi
- T^2'deki tüm bireylerin T'den daha iyi bir koalisyonun içinde yer alabilmesi için T^1'den en az bir elemanın işbirliğine ihtiyaçları olması
- T^3'deki tüm bireylerin T'den daha iyi bir koalisyonun içinde yer alabilmesi için $T^1 \cup T^2$'den en az bir elemanın iş birliğine ihtiyaçları olması
- ... demektir.

Tanım A.3: **Sıralı Dengelilik Özelliği** (Ordinal balancedness)

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ bir koalisyonlar topluluğu olsun. Eğer $\forall i \in N$, $\sum_{S \in \mathcal{B}, i \in S} d_S = 1$ şartını sağlayan bir d_S pozitif oranlar vektörü var ise $\mathcal{B}$ topluluğuna **dengeli** denir. Her dengeli koalisyon topluluğu $\mathcal{B}$ için $\forall i \in N$, $\exists S \in \mathcal{B}$ ile birlikte $i \in S$ olan $\pi(i) \succsim_i S$ özelliğini sağlayan bir π koalisyon yapısı var ise $(N, \succsim)$ oyununa **sıralı dengeli hedonik oyun** denir.

Tanım A.4: **Zayıf Ardışıklık Özelliği** (Weak consecutiveness)

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun ve $f: N \to N$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer $f(i) < f(j) < f(k)$ iken $i \in S$ ve $k \in S \Longrightarrow j \in S$ ise $S \subset N$ koalisyonuna f'ye göre **ardışık** denir. Eğer birebir ve örten bir f fonksiyonu var iken, ne zaman ki $\pi \in \prod^N$ koalisyon yapısı bir T koalisyonu tarafından bloke edildiğinde, π'yi bloke eden f'e göre ardışık bir T' koalisyonu var ise $(N, \succsim)$ hedonik oyununa **zayıf ardışık hedonik oyun** denir.

Tanım A.5: **Toplanır Ayrılabilirlik Özelliği** (Additive separability)

$i \in N$ bireyini düşünelim. Eğer $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{C}_i^N$ için $S_1 \succsim_i S_2 \Leftrightarrow \sum_{j \in S_1} v_i(j) \geq \sum_{j \in S_2} v_i(j)$ özelliğini sağlayan bir $v_i: N \to \mathbb{R}$ fonksiyonu var ise i bireyinin tercihlerine **toplanır ayrılabilir** denir. Tüm bireylerin tercihleri toplanır ayrılabilir ise $(N, \succsim)$ hedonik oyunu **toplanır ayrılabilirlik özelliği**ni sağlıyor denir.

$\succsim \in \mathcal{R}^N$ toplanır ayrılabilir bir tercih profili olsun. Eğer $\forall i, j \in N$, $v_i(j) = v_j(i)$ ise $\succsim$'e **simetrik** denir. Eğer $\forall i, j \in N$, $v_i(j) \geq 0 \Leftrightarrow v_j(i) \geq 0$ ise $\succsim$'e **karşılıklı** denir.

Tanım A.6: **Üst Duyarlılık Özelliği** (Top responsiveness)

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun, $S \in \mathcal{C}^N$ ve $i \in S$ olsun. $CH(i, S) = \{S' \subseteq S: (i \in S') \text{ ve } (S' \succsim S'', \forall S'' \subseteq S)\}$ kümesine S'nin **üst seçimler kümesi** denir. Eğer $|CH(i, S)| = 1$ ise bu kümenin tek elemanı $ch(i, S)$ ile gösterilir. Eğer

- $\forall S \in \mathcal{C}_i^N$, $|CH(i, S)| = 1$,
- $\forall S, T \in \mathcal{C}_i^N$, $ch(i, S) \succ_i ch(i, T) \Rightarrow S \succ_i T$ ve
- $\forall S, T \in \mathcal{C}_i^N$, $ch(i, S) = ch(i, T) \wedge S \subset T \Rightarrow S \succ_i T$

şartları sağlanıyor ise i bireyinin tercihlerine **üst duyarlı** denir. Tüm bireylerin tercihleri üst duyarlı ise $(N, \succsim)$ hedonik oyunu **üst duyarlılık özelliği**ni sağlıyor denir.

Tanım A.7: **Birleşim Duyarlılık Özelliği** (Union responsiveness)

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun ve $i \in N$ olsun. Eğer $\forall S, T \in \mathcal{C}_i^N,\ T \subset S$ ve $T \neq ch(i, S) \Rightarrow S \succ_i T$ şartı sağlanıyor ise i bireyinin tercihlerine **birleşim duyarlı** denir. Tüm bireylerin tercihleri birleşim duyarlı ise $(N, \succsim)$ hedonik oyunu **birleşim duyarlılık özelliği**ni sağlıyor denir.

Tanım A.8: **Kesişim Duyarlılık Özelliği** (Intersection responsiveness)

$N, \succsim)$ bir hedonik oyun ve $i \in N$ olsun. Eğer $\forall\ S, T \in \mathcal{C}_i^N,\ S \succ_i T \Rightarrow (S \cap T) \succsim_i T$ şartı sağlanıyor ise i bireyinin tercihlerine **kesişim duyarlı** denir. Tüm bireylerin tercihleri kesişim duyarlı ise $(N, \succsim)$ hedonik oyunu **kesişim duyarlılık özelliği**ni sağlıyor denir.

Tanım A.9: **Tekillik Özelliği** (Singularity)

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun ve $i \in N$ olsun. Eğer $\forall S \in \mathcal{C}_i^N,\ S \succ_i \{i\} \Rightarrow S = ch(i, S)$ şartı sağlanıyor ise i bireyinin tercihlerine **tekil** denir. Tüm bireylerin tercihleri tekil ise $(N, \succsim)$ hedonik oyunu **tekillik özelliği**ni sağlıyor denir.

Tanım A.10: **Esaslılık Özelliği** (Essentiality)

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun ve $i \in N$ olsun.

- $\varepsilon_i = \{i\} \Rightarrow \{i\} \succ_i S,\ \forall S \neq \{i\} \in \mathcal{C}_i^N$
- $\varepsilon_i = \{i\} \Rightarrow \{i\} \succ_i S \Leftrightarrow \varepsilon_i \backslash S \neq \emptyset$ ve $\forall S, T \in \mathcal{C}_i^N,\ \varepsilon_i \subseteq S \subset T \Rightarrow S \succ_i T$

şartını sağlayan bir $\varepsilon_i \in \mathcal{C}_i^N$ koalisyonu var ise i bireyinin tercihlerine **esaslı** denir. Tüm bireylerin tercihleri esaslı ise $(N, \succsim)$ hedonik oyunu **esaslılık özelliği**ni sağlıyor denir.

Tanım A.11: **Arkadaşların Sempatikliği Özelliği** (Appreciation of friends)

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. $\forall i \in N,\ F_i := F(\succsim_i) = \{j \in N : (i, j) \succsim_i (i)\}$ kümesine i**'nin arkadaşları kümesi**, bu kümenin tümleyeni $E_i = N \backslash F_i$ kümesine de i**'nin düşmanları kümesi** denir.

$$\forall\ i \in N,\quad S, T \in \mathcal{C}_i^N,\quad S \succsim_i T \Leftrightarrow \begin{cases} |S \cap F_i| > |T \cap F_i| \quad \text{veya} \\ |S \cap F_i| = |T \cap F_i| \ \text{ ve } \ |S \cap E_i| \leq |T \cap E_i| \end{cases}$$

ise, $\succsim$ tercih profiline ve $(N, \succsim)$ hedonik oyununa **arkadaşların sempatikliği özelliği**ni sağlıyor denir.

Tanım A.12: **Düşmanların Antipatikliği Özelliği** (Aversion to enemies)

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun.

$$\forall\ i \in N,\quad S, T \in \mathcal{C}_i^N,\quad S \succsim_i T \Leftrightarrow \begin{cases} |S \cap E_i| < |T \cap E_i| \quad \text{veya} \\ |S \cap E_i| = |T \cap E_i| \ \text{ ve } \ |S \cap F_i| \geq |T \cap F_i| \end{cases}$$

ise, $\succsim$ tercih profiline ve $(N, \succsim)$ hedonik oyununa **düşmanların antipatikliği özelliği**ni sağlıyor denir.

Tanım A.13: **Eksensel Dengelilik Özelliği** (Pivotal balancedness)
$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. $S \in \mathcal{C}^N$, $\mathrm{I}(S) \subseteq S$ ve $\mathrm{I}(S) \neq \emptyset$ olsun. $\mathrm{I} = (\mathrm{I}(S))_{S \in \mathcal{C}^N}$ ailesine **eksensel dağılım** denir. Eğer $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}^N$ için $(\mathrm{I}(S))_{S \in \mathcal{B}}$ dengeli ise $\mathcal{B}$ ailesine I-**dengeli** denir.
I-dengeli $\mathcal{B}$ ailesi için $(\forall j \in N, \exists S \in \mathcal{B}$ öyle ki $\pi(j) \succsim_j S)$ şartını sağlayan $\pi \in \prod^N$ koalisyon yapısının var olduğu bir I eksensel dağılımı var ise $(N, \succsim)$ hedonik oyununa **eksensel dengeli** denir.