Volume: 10 Number: 02 Category: 02 Page: 25-41 ISSN No: 1303-6319 Cilt: 10 Sayı: 02 Kategori: 02 Sayfa: 25-41

BAYES FAKTÖRÜ, BAYESCİ BİLGİ ÖLÇÜTÜ VE SAPMA BİLGİ ÖLÇÜTÜ KULLANIMIYLA BAYESCİ MODEL SEÇİMİNİN BİR UYGULAMASI

Mutlu KAYA* **Emel ÇANKAYA****

ÖZET

İstatistiksel modelleme çalışmalarında, artan ileri teknoloji ve metodolojik gelişmeler sayesinde veriyi ürettiği varsayılan alternatif modeller oluşturabilmek mümkün olmaktadır. Dolayısıyla, mevcut rakip modeller arasından "en iyi" olanı seçme işlemi, modelleme sürecine dahil edilmesi gereken önemli aşamalardan biri olarak ortaya çıkmaktadır. Bu çalışmada, istatistiksel model seçimi probleminin Bayesci yaklaşımla çözümünde tercih edilen Bayes faktörü tanıtılmış, analitik olarak hesaplanmasının mümkün olmadığı durumlarda kullanılabilen Bayesci Bilgi Ölçütü (BIC) yanı sıra Markov Zinciri Monte Carlo (MCMC) simülasyonuna dayalı Carlin ve Chib yöntemi açıklanmıştır. Ayrıca Bayes faktöründen tamamen farklı prensipte çalışan ve son yıllarda model seçimi uygulamalarında sıklıkla kullanılan Sapma Bilgi Ölçütü (DIC) ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Bir yarı-parametrik modelleme örneği olan kuantal modellemenin, literatürdeki bir uygulaması sonucu ortaya çıkan alternatif iki model Bayes faktörü, BIC ve DIC kullanılarak kıyaslanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bayes faktörü, Carlin ve Chib yöntemi, DIC, MCMC, BIC.

1. GİRİŞ

İstatistiksel bir modelin oluşturulması, değişkenler arasındaki ilişkinin matematiksel eşitlikler şeklinde formülasyonu olarak tanımlanabilir. Gerçek hayatta gözlenen bir olayı betimlemek için oluşturulan bir model, gelecekle ilgili tahmin yapmada önemli bir rol oynamaktadır. Bu yüzden, modelleme amaçlı yapılan istatistiksel bir çalışma; oluşturulan modelin yeterliliğinin, duyarlılığının ve alternatif modellerin varlığının test edilmesi işlemlerini içermelidir.

Günümüzde artan teknolojik ve metodolojik gelişmeler sayesinde daha karmaşık modeller oluşturulabildiğinden, aynı problemin çözümüne alternatif olabilecek model sayısında büyük bir artış olmuştur. Bu çalışmada, Box (1979, 202)'ın belirttiği "Aslında tüm modeller eksiktir ancak bazıları kullanışlıdır" ifadesini akılda tutarak, birbirine rakip modeller arasından "en kullanışlı" ya da "en iyi" olanı belirleme işlemi olan model seçimi problemi incelenecektir. Doğru modelin var olduğu varsayımı altında, model seçimi ifadesiyle, veriyi ürettiği varsayılan modelin oluşturulma işlemi değil, alternatif modellerin kıyaslanması işlemi kastedilmektedir.

Model seçimi problemi, regresyon modellemesi, karma modellemesi, çoklu değişim noktası problemi, değişkenlerin dağılımsal formunu belirlemek, hipotez testleri gibi istatistiksel çalışmalarda sıklıkla ortaya çıkmaktadır. Model seçimine klasik yaklaşımda, bilgi teorisine dayalı Akaike Bilgi Ölçütü (AIC), Bayesci Bilgi Ölçütü (BIC) ve Mallow'un Cp Ölçütü, tercih edilen yöntemlerden sadece birkaçıdır (Ucal, 2006).

*Arş. Gör., Sinop Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Sinop, e-posta: mutlu.alt@gmail.com
**Yrd. Doç. Dr., Sinop Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Sinop, e-posta: ecankaya@sinop.edu.tr

Çeşitli kaynaklardan elde edilen ön bilginin tahmin sürecine dahil edilmesine olanak sağlayan Bayesci yaklaşımda da model seçimi problemi popüler bir çalışma alanı olarak ortaya çıkmaktadır. Bayesci modelleme yapan araştırmacılar, bu amaç için sıklıkla Bayes faktörünü kullanmayı tercih etmişlerdir (Kass ve Raftery, 1995). İki rakip model kıyaslanmak istendiğinde kullanılan Bayes faktörü, modeller hakkındaki ön bilgiden son bilgiye geçişte modellerden biri lehine oddslarda ne kadarlık bir değişim olduğunun ölçüsüdür. Modeller hakkında bir ön bilginin olmaması durumunda dahi, modellerin doğruluğuna dair bir olasılık hesaplanmasına olanak tanıması ve bunların oranlanmasından elde edilmesi yorumu kolay, tutarlı ve otomatik olarak modelde "basitlik prensibine" sahip olması açısından tercih edilir bir yöntem olmuştur. Ayrıca $\mathrm{BF_{ij}} = \mathrm{BF_{ik}}\,\mathrm{BF_{kj}}$ formülüyle çoklu model karşılaştırması da yapılabilmektedir (Martino, 2007).

Bayes faktörünün hipotez testlerindeki kullanımı Jeffreys (1961) tarafından, model seçimindeki kullanımı ise ilk olarak Schwarz (1978) ve Raftery (1986) tarafından ortaya konulmuştur. Mccullogh ve Rossi (1992) eşlenik önselleri; Kass ve Wasserman (1995) ise referans önselleri kullanarak, model karşılaştırmasında Bayes faktörü uygulamaları sunmuşlardır. Han ve Carlin (2001) Bayes faktörü hesabı için Markov Zinciri Monte Carlo (MCMC) metodunu, Sinharay ve Stern (2002), Bayes faktörünün önsel dağılımlara duyarlılığını incelemiş olup, Bayes faktörü ve alternatif çeşitlerinin kullanımı Araujo ve Pereira (2007)'nın çalışmasında bazı simülasyon uygulamalarıyla gösterilmiştir.

Marjinal olabilirlikler oranı olan Bayes faktörünün analitik olarak hesaplanmasının mümkün olmadığı durumlarda, Laplace yaklaşım yöntemi, önem örneklemesi, Gauss kareleştirme ve MCMC simülasyonu en çok kullanılan yöntemler arasındadır (Rosenkranz ve Raftery, 1994). Bileşik model-parametre uzayı tarama yöntemlerinden Carlin ve Chib (1995) yöntemi ise model belirsizliğini bir model göstergesi yardımıyla belirleyip, MCMC yöntemini kullanarak modellerin karşılaştırılmasında Bayes faktörünün elde edilmesini göstermiştir. Ayrıca belli şartlar altında, Schwarz (1978) tarafından geliştirilen ve model parametrelerine önsel dağılım belirlemeyi gerektirmeyen BIC (Schwarz ölçütü) yardımıyla, Bayes faktörünün kabaca bir tahmini elde edilebilmektedir (Kass ve Wasserman, 1995).

Bayes faktörü ile model karşılaştırmasının, model parametre sayısını bilmeyi gerektirmesi, parametre sayısının gözlemlerden sayıca fazla olduğu karmaşık hiyerarşik modellerde hesaplanmasının mümkün olmaması gibi problemler (Gelfand ve Dey., 1994; Kass ve Raftery, 1995), AIC'ye benzer prensipte çalışan yeni bir ölçütün, Sapma Bilgi Ölçütü (DIC) adıyla geliştirilmesine neden olmuştur (Spiegelhalter vd., 2002). Kullanımı son dönemlerde oldukça artan ve halen aktif araştırma konusu olan bu ölçütün özellikleri ve uygulamaları (Da Silva vd., 2004), Mislevy (2006), Spiegelhalter (2006a), Martino (2007), Asseburg (2007) ve Wilberg ve Bence (2008)'de bulunabilir.

Bu çalışmada, yarı parametrik modellemenin özel bir formu olan kuantal modellemenin, literatürdeki bir uygulaması sonucu ortaya çıkan alternatif iki modelin kıyaslaması, Bayes faktörü ve DIC hesaplanarak yapılacaktır. Bayes faktörü hesabı kullanım kolaylığı açısından Carlin ve Chib yöntemi ile yapılmıştır. İki yöntemin kullanım amaçlarındaki farklılıktan dolayı (Gelman vd., 2004; Spiegelhalter vd., 2002), sonuçların kıyaslanabilirliğini sağlamak açısından modeller için hesaplanan BIC değerleri de çalışmada sunulmuştur. Tüm işlemler için Winbugs 1.4.3 paket programı kullanılmıştır.

2. YÖNTEM

2.1 Bayes Faktörü

Sonlu sayıda modeller arasından "en iyi" modeli seçme problemiyle ilgilenelim. Rakip modeller kümesi $\mathbb{M}$ olmak üzere y gözlenen veri setinin, M_j ($j \in \mathbb{M}$) modeli tarafından üretildiği varsayılsın. Her modelin farklı bilinmeyen parametreleri θ_j vektörü ile gösterilsin.

Model j için, $P(M_j)$, modelin önsel olasılığı ($\sum_j P(M_j) = 1$); $P(\theta_j/M_j)$, model parametre vektörünün önsel dağılımı ve $P(y/\theta_j, M_j)$, olabilirlik fonksiyonu olarak tanımlanırsa bileşik dağılım,

$$P(y, \theta_j, M_j) = P(M_j)P(\theta_j/M_j)P(y/\theta_j, M_j) \qquad (1)$$

olur.

Bileşik dağılımın θ_j parametre vektörüne göre marjinallenmesi ve gözlenen veri üzerine koşullandırılması sonucu her bir modele ilişkin sonsal model olasılıkları,

$$P(M_j/y) = \frac{P(y, \theta_j, M_j)}{P(y)} = \frac{P(M_j)P(y/M_j)}{P(y)}$$

$$P(M_j/y) \propto P(M_j)P(y/M_j) \qquad (2)$$

ile hesaplanabilir (Martino, 2007). Burada $P(y/M_j)$, marjinal olabilirlik olup

$$P(y/M_j) = \int P(\theta_j / M_j)P(y/\theta_j, M_j)d\theta_j \qquad (3)$$

şeklinde hesaplanır.

Alternatif model sayısının iki olduğu durumda, kıyaslama işlemi sonsal model olasılıklarının oranlanması yoluyla yapılır. Birbirine rakip M_1 ve M_2 modelleri için bu oran;

$$\frac{P(M_1/y)}{P(M_2/y)} = \frac{P(M_1)}{P(M_2)}\frac{P(y/M_1)}{P(y/M_2)}$$

dır. Burada marjinal olabilirlikler oranı Bayes faktörüdür. Bu eşitlik sözel olarak,

[Sonsal Odds] = [Önsel Odds] x [Bayes faktörü]

ile ifade edilirse,

$$\mathrm{BF}_{12} = \frac{\text{Sonsal Odds}}{\text{Önsel Odds}} = \frac{\mathrm{P(M_1/y)P(M_2)}}{\mathrm{P(M_2/y)P(M_1)}} \tag{4}$$

şeklinde odds oranı olarak tanımlanan BF_{12} oranına M_2'ye kıyasla M_1 lehine Bayes faktörü adı verilir (Raftery, 1995). Bir başka deyişle BF_{12}, önselden sonsala geçişte odds'larda M_1 lehine ne kadarlık bir değişim olduğunun bir ölçüsüdür. Modellerin tercih edilebilirliği konusunda bir ön bilginin olmaması durumunda, önsel olasılıklar $\mathrm{P(M_1) = P(M_2)} = 0.5$ olarak seçilir ve dolayısıyla Bayes faktörü sonsal odds'a eşit olur. Sonsal model olasılıklarının toplamı bire eşit olduğundan formül 4,

$$\mathrm{BF}_{12} = \frac{\mathrm{P(M_1/y)}}{\mathrm{P(M_2/y)}} = \frac{\mathrm{P(M_1/y)}}{1 - \mathrm{P(M_1/y)}} \tag{5}$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. Hesaplanan Bayes faktörünün yorumu, Tablo 1 kullanılarak yapılır.

Tablo 1. Bayes faktörü değerinin model seçimindeki yorumu (Jeffreys, 1961)

Bayes faktörü değeri ($BF_{ij}{}^*$)	Yorum	Ok yönünde artan derecede
$BF_{ij} < 0.1$	M_j lehine güçlü kanıt	⇑
$0.1 < BF_{ij} < 0.3$	M_j lehine makul kanıt	M_j tercih edilir
$0.3 < BF_{ij} < 1$	M_j lehine zayıf kanıt	
$1 < BF_{ij} < 3$	M_i lehine zayıf kanıt	⇓
$3 < BF_{ij} < 10$	M_i lehine makul kanıt	M_i tercih edilir
$BF_{ij} > 10$	M_i lehine güçlü kanıt	

$^*BF_{ij}$: j. modele kıyasla i. model lehine hesaplanan Bayes faktörü değeri

Bayes faktörünün analitik olarak hesaplanabilmesi, eşitlik 3'de verilen integral işlemlerinin yapılmasını gerektirir. Modellerde yer alan bilinmeyen parametre sayısı arttığında, bu işlemleri gerçekleştirmek oldukça güçleşir hatta bazı durumlarda mümkün değildir. Karmaşık integrasyon teknikleri uygulamak yerine, koşullu dağılımlardan örneklem çekmek yoluyla parametre tahminlerinin elde edilmesini sağlayan MCMC yöntemi, model seçimi problemlerinde de etkin bir şekilde kullanılmaktadır (Gilks vd., 1996). Bu yaklaşıma sahip Carlin ve Chib yöntemi bir sonraki bölümde ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

Kıyaslanmak istenen modellerin ön olasılıklarının eşit olduğu durumlarda, Bayes faktörünün yaklaşık hesabı BIC yardımıyla aşağıdaki formül kullanılarak da yapılabilmektedir (Kass ve Wasserman, 1995):

$$-2\ln BF_{ij} \cong BIC_i - BIC_j \quad \text{ya da} \quad 2\ln BF_{ji} \cong BIC_i - BIC_j \tag{6}$$

Burada n= örnek genişliği, p= modeldeki parametre sayısı ve $\hat{\theta}$= parametre vektörünün en çok olabilirlik tahmin edicisi olmak üzere, BIC_i ve BIC_j;

$$BIC = -2\log P\left(\frac{y}{\hat{\theta}}\right) + p\log(n) \tag{7}$$

formülü kullanılarak, i. ve j. modeller için ayrı ayrı hesaplanmış değerlerdir. Modeldeki parametre sayısının artması, bu ölçütün değerinin log(n) oranında büyümesine neden olacağından, BIC de basit ya da boyutu küçük modelleri tercih etme eğilimindedir. Doğru modelin olduğu varsayımıyla, en küçük BIC değerli modelin en iyi model olduğu yönünde yorumlanması önerilmektedir (Burnham, 2004).

2.2 Carlin ve Chib Yöntemi

Bayes faktörünün elde edilmesinde gerekli olan sonsal model olasılıklarının hesaplanmasına olanak sağlayan yaklaşımlardan biri, MCMC prensiplerini kullanan Carlin ve Chib (1995) yöntemidir. Bu yaklaşımda, model belirsizliği bir parametre olarak tanımlanır ve aldığı değerler bir gösterge değişkeni ile belirlenir. Bu parametre yardımıyla birbirine rakip k modelin örneklem uzayları birbirine bağlanır ve böylece MCMC örneklemesinin bu bileşik model uzayının bir formundan örneklemler alması sağlanır.

Model parametresi, tamsayı değerli M ile ve tüm modellere ait θ_j vektörlerinin birleşimi ise θ ile gösterilsin. $M = j$ olduğunda, k rakip model için bileşik dağılım,

$$P(y, \theta, M_j) = P(y/\theta_j, M_j)\prod_{j=1}^{k} P(\theta_j / M_j)P(M_j) \tag{8}$$

olur. Gösterge değişken M, hangi θ_j vektörünün y ile ilişkili olduğunu belirlediğinden, $M = j$ verildiğinde y, diğer modellerin $\{\theta_{i\neq j}\}$ vektöründen bağımsızdır. Ayrıca, modellere ait θ_j vektörlerinin de birbirinden bağımsız olduğu varsayılır. Bu durumda, j. model altında $P(\theta_j/M \neq j)$ için kullanılan dağılımsal form Bayesci model tanımlamasında önemli olmadığından, bunlar için "sözde (pseudo) önsel" seçimi yapılabilir.

Burada sözde önsel gerçek bir önsel olmayıp, bileşik model-parametre uzayını tanımlayabilmek için uygun şekilde seçilmiş bir bağlantı dağılımıdır. Gibbs örneklemesini yürütmek için gerekli θ_j'nin tam koşullu dağılımı,

$$P(\theta_j/\theta_{i\neq j}, M, y) \propto \begin{cases} P(y/\theta_j, M_j)P(\theta_j/M_j) & ; \quad M = j \\ P(\theta_j/M \neq j) & ; \quad M \neq j \end{cases} \tag{9}$$

olarak tanımlanır. Burada, $M = j$ olduğunda tüm koşullu olasılıklar geçerli olan model j'den, $M \neq j$ olduğunda ise sözde önselinden üretilir.

Sonuçta Gibbs örneklemesinin j. modeli ziyaret sayısı, tüm örneklemler sayısına orantılanarak sonsal model $P(M_j/y)$ olasılıklarının tahminleri,

$$\hat{P}(\mathrm{M_j/y}) = \frac{\mathrm{M^{(g)}} = \mathrm{j}}{\mathrm{M^{(g)}}'\text{nin toplam sayısı}} \quad , \quad \mathrm{j} = 1,2,\ldots,\mathrm{k} \tag{10}$$

şeklinde elde edilebilir. Burada $\mathrm{M^{(g)}}$, Gibbs iterasyon sayısıdır (Carlin ve Chib, 1995). Bu tahmin değerlerinden elde edilen sonsal odds, önsel odds ile eşitlik 4'de ifade edildiği gibi birleştirilirse, modellerin ikişerli kıyaslamaları amaçlı Bayes faktörü hesaplanabilir.

2.3 Sapma Bilgi Ölçütü (DIC)

Klasik bir modelleme çalışmasında model kıyaslaması yapılmak istendiğinde, verinin modele uyumunu ölçen bir sapma istatistiği ile modeldeki parametre sayısının belirlediği model karmaşıklığı arasında denge kurmaya dayalı ölçütler kullanılır. Bunlardan bazılarının modeldeki parametre sayısını belirlemeyi gerektirmesi ve bazılarının ise parametreleri gözlemlerden sayıca üstün olan karmaşık hiyerarşik modellerde doğrudan uygulanamaması (Gelfand vd., 1992), son zamanlarda kullanımı yaygın olan alternatif bir Bayesci model seçim yöntemi Sapma Bilgi Ölçütünün geliştirilmesine sebep olmuştur.

DIC, iki bileşenden oluşmaktadır:

DIC	=	Uyum iyiliği	+	Karmaşıklık	(11)
		↓		↓	
		Kuramsal bir model ile örneklem verisi arasındaki uyumun bir ölçüsü		Artan model parametre sayısı için bir sınırlama terimi	

DIC'nin birinci bileşeni model yeterliliğinin bir tahmini olup, Dempster (1974) tarafından klasik sapma ifadesine dayalıdır.

$$\text{Sapma} = \mathrm{D}(\theta) = -2\log\mathrm{P}(\mathrm{y}/\theta) + 2\log\mathrm{P}(\mathrm{y}) \tag{12}$$

Burada $\mathrm{P}(\mathrm{y}/\theta)$; θ model parametre vektörüne dayalı olabilirlik fonksiyonu olup $\mathrm{P}(\mathrm{y})$ ise $\mathrm{P}(\mathrm{y}) = \int \mathrm{P}(\theta)\mathrm{P}(\mathrm{y}/\theta)\mathrm{d}\theta$ şeklinde sadece verinin fonksiyonu olan sabit bir terimdir. Bu terim model karşılaştırmasında tüm modeller için 1 alınarak aşağıda verilen formüllerin tümünde ihmal edilmesi sağlanır (Celeux vd., 2006).

Sapmanın sonsal dağılımının ortalaması uyum iyiliği ölçüsü olarak kullanılır. Bu ifade Dbar şeklinde adlandırılır ve $\overline{\mathrm{D}(\theta)}$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{D}(\theta)} &= \mathrm{E}_{\theta/\mathrm{y}}[\mathrm{D}(\theta)] \\ &= \mathrm{E}_{\theta/\mathrm{y}}[-2\log\mathrm{P}(\mathrm{y}/\theta)] \\ &= \frac{1}{\mathrm{C}}\sum_{\mathrm{c}=1}^{\mathrm{C}} -2\log_{\mathrm{e}}\mathrm{P}(\mathrm{y}/\theta_{\mathrm{c}}) \end{aligned} \tag{13}$$

Burada C, burn-in (yakınsama) periyodu çıkarılmış MCMC simülasyonlarının sayısı olup $\log_e P(y/\theta_c)$ ise olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritmasıdır (Spiegelhalter vd., 2002). Bu eşitlikten görüldüğü gibi Dbar, Gibbs örneklemesinin bir iterasyonunun sonunda hesaplanmış log-olabilirliklerin ortalamasıdır.

DIC eşitliğinde yer alan ikinci bileşen ise, θ'nın sonsal ortalaması $(\hat{\theta})$ kullanılarak hesaplanan sapmaya dayalıdır. Dhat diye adlandırılan ve $D(\hat{\theta})$ ile gösterilen bu ifade,

$$D(\hat{\theta}) = D\left(E_{\theta/y}[\theta]\right) = -2\log P\left(y/\hat{\theta}\right) \tag{14}$$

şeklinde tanımlıdır. Bir başka deyişle θ'nın sonsal ortalamasını kullanarak hesaplanmış log-olabilirliktir.

Veriyle en iyi uyumu sağlayan bir modelde yer alması gereken etkin parametre sayısı olarak ölçülen model karmaşıklığı, pD ile gösterilir ve

$$pD = \overline{D(\theta)} - D(\hat{\theta}) \tag{15}$$

eşitliği ile elde edilir. Burada pD, modeldeki parametre sayısı için bir sınırlama terimidir ve model parametre sayısının yaklaşık değerini verir.

Bu tanımları kullanarak DIC ölçütü,

$$DIC = \overline{D(\theta)} + pD = D(\hat{\theta}) + 2pD \tag{16}$$

şeklinde ifade edilir (Spiegelhalter vd., 2002).

Literatürde, modeldeki parametre sayısı aynı kalmak koşuluyla model parametrelerinin yeniden ifadelendirilmesi sonucu pD'nin değerinde büyük değişiklikler olabileceği konusunda yapılan uyarılar nedeniyle; Spiegelhalter ve Bull (1997), Gelman vd. (2004) tarafından pD yerine sapmanın sonsal varyansının yarısı şeklinde tanımlı pV'nin kullanımı önerilmiştir.

Matematiksel ifadeyle,

$$pV = 0.5\mathrm{Var}_{\theta/y}\left(D(\theta)\right) \tag{17}$$

olarak gösterilir.

Veriyi ürettiği varsayılan iyi bir modelin olabilirliğinin büyük değerli olması, $\overline{D(\theta)}$'nın daha küçük değerlere ulaşmasını ve dolayısıyla DIC'nin küçük değerli olmasını sağlayacaktır. Sonuç olarak, en küçük DIC değerine sahip model, rakip modeller arasından en iyi model olarak seçilebilir.

DIC değeri daima pozitif olmayıp negatif değerler de verebilmektedir. Standart sapması küçük olan bir $P(y/\theta)$ olabilirliğinin sebep olduğu böylesi durumlarda negatif değerler de dikkate alınarak en küçük DIC'ye sahip model lehinde seçim yapılır (Spiegelhalter, 2006b).

Bayes faktörünün aksine DIC'nin mutlak büyüklüğünün model karşılaştırmasında bir önemi yoktur. Önemli olan sadece DIC değerleri arasındaki farkın mutlak büyüklüğüdür. (Spiegelhalter vd., 2002), minimum değerli DIC değeri ile arasında 2'den daha az fark olan modellerin eşit derecede iyi model olarak dikkate alınması gerektiğini, 2−7 arasında fark değerli modellerin ise daha az desteğe sahip modeller olarak değerlendirilmesini önermiştir.

3. BULGULAR

3.1 Kuantum Modelleme

İstatistiksel modellemenin özel bir formu, kuantal modelleme adı altında pek çok farklı disiplinde karşımıza çıkmaktadır. Bir yarı-parametrik modelleme örneği olan kuantal modellemede; verilen herhangi bir örneklem verisinin bir temel birim olan kuantumun tamsayı katları ($\pm$ rastgele hata) olarak ifade edilip edilemeyeceği sorusuna cevap aranmaktadır. Bu sorgudaki en önemli nokta böyle bir kuantum değerinin var olup olmadığının önceden bilinmemesidir. Ancak böyle bir değer varsa veriden tahmin edilmek yoluyla hesaplanmalıdır (Acar, 2000).

$\{Y_i\}_{i=1}^{n}$ örneklem verisi olmak üzere matematiksel olarak basit kuantum modeli,

$$Y_i = m_i q + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1,2,\dots,n \quad ; \quad m_i \in N \;\; \text{ve} \;\; -\frac{q}{2} \leq \varepsilon_i < \frac{q}{2} \tag{18}$$

olarak ifade edilir. Burada q = kuantum, m_i = round $\left({}^{Y_i}/_{q}\right)$ şeklinde hesaplanan tamsayı değerler (round = bölümün en yakın tamsayıya yuvarlanması), ε_i hata değerleri sıfır civarında ve $\frac{q}{2}$ 'ye kıyasla küçük değerler alacaktır.

Kuantum modelleme ilk olarak, İngiltere, İskoçya ve Galler'de pek çok sayıda bulunan Stonehenge isimli, dairesel formdaki tarihi taş dikitlerin yarıçaplarının (Thom, 1955) tarafından ölçülmesi sonucunda ortaya çıkmıştır. Megalitik dönemi insanlarının bu yapıtları oluştururken, temel bir ölçü birimi ve onun katlarını kullanmış olabilecekleri savı ortaya atılmış ve klasik istatistiksel yöntemlerle analiz edilmesi sonucunda q = 5.44 inç değerinin kuantum ya da literatürdeki ünlü adıyla "Megalitik Yard" olabileceğine dair önemli bulgular elde edilmiştir (Kendall, 1974).

Bu problemin Bayesci yaklaşımla ilk analizi ise Freeman (1976) tarafından yapılmış ve kuantum için 5.44 yanı sıra 4 ve 7.5 değerlerinin de alternatif olabileceği çıkarsamasında bulunulmuştur. Modern Bayesci yöntemlerden MCMC kullanılarak problemin yeniden analizi (Acar, 2000) sonucunda elde edilen iki alternatif kuantum tahmin değeri q = 5.439 ve q = 7.480, Freeman (1976)'ın sonuçları ile tutarlıdır.

Bu çalışmada yukarıda özetlediğimiz çalışmalar sonucu elde edilmiş farklı kuantum tahmin değerlerinin oluşturduğu iki basit kuantum modelinin kıyaslanması Bayes faktörü, BIC ve DIC kullanılarak yapılmıştır. Literatürde, kuantal olma özelliğine en fazla sahip olduğu sıklıkla atfedilen good rings (n=16) veri seti (Thom, 1967), bu çalışma uygulaması için tercih edilmiştir.

Modeller matematiksel olarak,

Model 1 : $y_i = m_{1i}q_1 + \varepsilon_i \quad , \quad \varepsilon_i \sim N(0, \tau_1) \quad , \quad i = 1,2,\ldots,16$

Model 2 : $y_i = m_{2i}q_2 + {}_i \quad , \quad {}_i \sim N(0, \tau_2) \quad , \quad i = 1,2,\ldots,16 \qquad (19)$

şeklinde tanımlanır. Burada $\tau_1 = \sigma_1^{-2}$, $\tau_2 = \sigma_2^{-2}$ olup q_1 = 7.480 ve q_2 = 5.439 'dur.

3.2 Kuantum Modellerinin Carlin ve Chib Yöntemiyle Kıyaslanması

Model göstergesi M, Gibbs örneklemesi boyunca zincirin ürettiği j değerlerini ($j = 1,2$) kullanarak bileşik modellemeyi gerçekleştiren bir parametre olup kuantum modellerinden model 1 ve model 2'ye ilişkin bilinmeyen parametreler ise sırasıyla θ_1=(q_1, τ_1) ve θ_2=(q_2, τ_2)'dir.

Basit kuantum modelleme çalışmalarında, sıfıra yakın çok küçük değerlerin gerçek kuantum olamayacağı ve ayrıca maximum gözlemden daha büyük değerli bir tahminin mümkün olmadığı vurgulanmış, "Megalitik Yard" örneği verisinin klasik yöntemlerle analizinde [q_{min}=2, q_{max}=10] aralığında tarama yapılarak bir tahmin sonucuna ulaşılmıştır (Kendal, 1974). Ancak daha güncel bir çalışmada (Acar, 2000), t=1/q değişkeninin Uniform dağılıma sahip olduğu ispatlanmış ve taramanın [t_{min}=1/q_{max}, t_{max}=1/q_{min}] aralığında yapılması önerilmiştir. Aynı verinin kullanıldığı bu çalışmada, bu parametre için önsel dağılım olarak 0.1 ve 0.5 parametreli Uniform dağılım seçilmiştir.

Herhangi bir verinin kuantal olduğundan bahsedilebilmek için; model hata teriminin (ε_i) eşitlik 18 ile tanımlı değerlerinin $\pm \frac{q}{2}$ 'ye kıyasla küçük ve "0" civarında yoğunlaşması, bir başka deyişle hata varyansının (σ^2), test edilen kuantum değerine kıyasla küçük olması gerekmektedir. Bu çalışmada kullanılan verinin, Freeman (1976) tarafından Bayesci yaklaşımla yapılan ilk çözümlenmesinde, hata varyansının "2" den büyük olması durumunda, veride var olabilecek bir kuantal yapının ortaya çıkarılamayacağından bahsedilmiş ve bu parametre için $\chi^2_{(2)}$ önsel dağılımı kullanılmıştır. Dolayısıyla çalışmanın ilerleyen bölümlerinde, σ^2 için bu önsel ile benzer değerler üretebilecek şekilde parametrize edilmiş bir Gamma önseli, Winbugs model formülasyonunda $\tau = \sigma^{-2}$ parametresi için kullanılmıştır.

Bu bilgiler ışığında, iki kuantal model kıyaslaması için gerekli önsel dağılımlar, $P(\theta_j/M_j)$;

$$P(t_1/M_1) = P(t_2/M_2) \sim U(0.1\,, 0.5) \qquad (20)$$

$$P(\tau_1/M_1) = P(\tau_2/M_2) \sim Ga(1\,, 0.5) \qquad (21)$$

şeklinde belirlenmiştir. Burada $t_1 = {}^1/_{q_1}$ ve $t_2 = {}^1/_{q_2}$'dir.

Bileşik model tanımlamasını sağlamak için gerekli sözde önseller, aynı veri setinin MCMC yaklaşımı ile çözümlenmesinden elde edilen (Acar, 2000) ve Tablo 2'de sunulan parametre tahminlerinin %95 Bayesci güven aralıklarından faydalanılarak elde edilmiştir.

Tablo 2. Yakınsaklık testlerini geçen parametrelerin farklı başlangıç değerleri için sonsal tahminleri

Zincir	Parametre	Başlangıç Değeri	Sonsal Ortalama	%95 Güven Aralığı
1	t	0.13414	0.134	[0.1323, 0.1352]
	q	---	**7.480**	[7.395, 7.559]
	τ	0.33128	1.371	[1.034, 1.707]
	σ	---	0.586	[0.3437, 0.9346]
2	t	0.16003	0.184	[0.183, 0.185]
	q	---	**5.439**	[5.410, 5.470]
	τ	0.67310	2.190	[0.949, 3.870]
	σ	---	0.709	[0.509, 1.030]

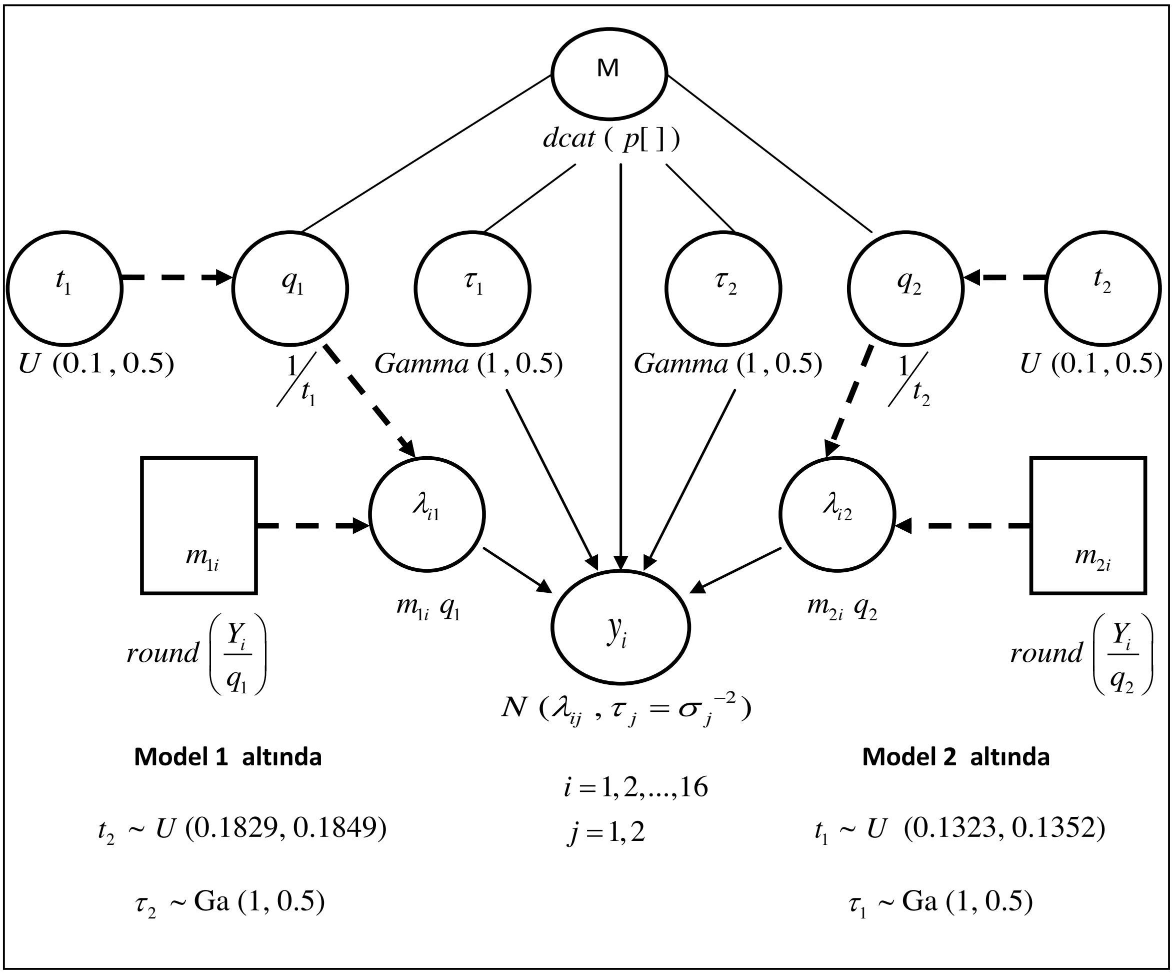
Not: Gibbs örneklemesi başlangıç değerleri ataması, sadece önsel dağılım tanımlanan model parametreleri t ve τ için gereklidir. Tahmin edilmek istenen q ve σ parametreleri için zincir değerleri, t=1/q ve $\tau = \sigma^{-2}$ deterministik ilişkiler kullanılarak oluşturulmaktadır.

Bu durumda pseudo önselleri $P\ (\theta_j / M\ \neq j)$,

Model 1 için (j=1), $t_1 \sim$ U (0.1323 , 0.1352) , $\tau_1 \sim$ Ga (1 , 0.5)
Model 2 için (j=2), $t_2 \sim$ U (0.1829 , 0.1849) , $\tau_2 \sim$ Ga (1 , 0.5)

olarak alınmıştır.

Formül 19'da verilen iki kuantum modelini, model göstergesi (M) yardımıyla kıyaslamak ve bileşik modellemeyi belirlemek amacıyla, modellerin Winbugs programı içindeki grafiksel gösterimi Şekil 1'de görüldüğü gibidir. Model parametresi M'nin alabileceği "1" ve "2" değerlerini üretmek amacıyla, Winbugs programında tanımlı *dcat* kategorik dağılımı kullanılmıştır. Dağılım parametresi $p[j]$; j= 1, 2 ise modellerin önsel olasılıklarına karşılık gelip, $\sum_j p[j]$ = 1 sağlamaktadır. Şekildeki kesikli çizgili oklar ise deterministik ilişkileri göstermek amacıyla kullanılmaktadır.



Şekil 1. Carlin ve Chib yöntemi ile iki Kuantum modelinin kıyaslanmasının grafiksel gösterimi

Elde edilen bu bilgiler kullanılarak Carlin ve Chib yöntemi ile yazılan programın Winbugs Paket Programı'nda çalıştırılması sonucu 2. kuantum modelinin sonsal model olasılığının tahmini $\text{P}(\text{M}_2/\text{y}) = 0.5005$ olarak bulunur. (MC hata = 0.01259)

Bu durumda model 1'e kıyasla model 2 lehine Bayes faktörü formül 4'den,

$$\text{BF}_{21} = \frac{0.5005\ \ 0.999995}{(1 - 0.5005)\ 0.000005} = 200399 \tag{22}$$

olarak hesaplanır. Bu hesaplamada modellerin önsel olasılıkları, zincirin j değerini eşit sayıda üretmesini sağlamak amacıyla $\text{P}(\text{M}_1) = 0.999995$ ve $\text{P}(\text{M}_2) = 0.000005$ olarak seçilmiştir.

Elde edilen BF_{21} değerinin, Tablo 1'e göre 10'dan oldukça büyük bir değer olması sebebiyle, veriyi ürettiği varsayılan en iyi kuantum modelinin M_2 modeli; dolayısıyla en olası kuantum değerinin 5.439 olması yönünde güçlü bir kanıtın bulunduğu söylenebilir.

3.3 Kuantum Modellerinin BIC ve DIC Kullanılarak Kıyaslanması

DIC hesabı (formül 16) için gerekli olan sapma; $D(\theta)$ (formül 12), Dbar (formül 13), Dhat (formül 14) ve pD (formül 15) kullanılarak Winbugs paket programında yazılan programların çalıştırılması sonucunda her iki kuantum modeli için ayrı ayrı hesaplanan DIC değerleri, Tablo 3'te görüldüğü gibi elde edilmiştir. Bilgi ölçütü temelinde kıyaslamaya olanak tanıması açısından formül 7 ile tanımlanan BIC hesap değerleri de aynı tabloda sunulmuştur.

Tablo 3. M_1 ve M_2 modellerinin BIC ve DIC hesap değerleri

Model	Dbar	Dhat	p	pD	pV	$Var_{\theta/y}(D(\theta))$	DIC	BIC
M_1	57.662	55.706	2	1.957	1.930	3.8612	59.619	60.058
M_2	33.613	31.648	2	1.965	1.919	3.8377	35.578	36.018

Sonuçlar yorumlandığında, en küçük BIC ve DIC değerlerinin aynı modeli işaret ettiği, bir başka deyişle veri setini en iyi temsil eden kuantum modelinin M_2 modeli olduğu görülmektedir.

Model 1'e karşı model 2 lehine Bayes faktörü değeri ise formül 6 kullanılarak,

$$2lnBF_{21} \cong 60.058 - 36.018$$
$$BF_{21} \cong 166042$$

şeklinde bulunur. Bu değerin, formül 22'de Carlin ve Chib yöntemiyle tam olarak hesaplanan Bayes faktörünün kaba bir tahmini olduğunu hatırlatarak, $BF_{21} = 166042 > 10$ olması sebebiyle M_1 modeline karşı M_2 modeli lehine kesin kanıt olduğu sonucuna bir kere daha ulaşılabilir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Günümüz istatistiksel modelleme çalışmalarında, ne kadar kompleks olursa olsun hemen hemen her problemin modellenmesinin mümkün olduğu görülmektedir. Mevcut modeller arasından en uygun modeli seçmek için bir araç gereksinimi gitgide arttığından halen pek çok metot geliştirilmektedir. Metotların çeşitliliği ve sayıca fazla olması problem çeşitliliğinden, gerekli analitik işlemlerin zorluk derecesinden ya da modelin oluşturulma amacından kaynaklıdır.

Bu çalışmada, model seçimi problemine Bayesci yaklaşımlardan Bayes faktörü ve Sapma Bilgi Ölçütü (DIC), ilkinin literatürde sıklıkla kullanılması ve diğerinin son dönemlerde geliştirilmiş olması sebebiyle tanıtılmış ve bir uygulaması gösterilmiştir. Bayes faktöründen tamamen farklı yapıda ve prensipte çalışan DIC'nin kıyaslanabilirliğini sağlamak amacıyla Bayesci Bilgi Ölçütü (BIC) de çalışmaya dahil edilmiştir. Bayes faktörünün analitik işlemleri için, MCMC simülasyonuna dayalı

Carlin ve Chib yöntemi uygulama kolaylığı açısından tercih edilmiştir. Bayes faktörünün BIC yardımıyla yaklaşık olarak hesabı da kısaca açıklanmıştır.

İki model karşılaştırmasında ve özellikle hipotez testlerinde sıklıkla tercih edilen Bayes faktörü oldukça kullanışlı olmasına rağmen, önsel dağılım seçimine ve modelin yeniden parametrize edilmesine karşı duyarsız değildir. Özelikle kıyaslanacak modellerin farklı boyutlarda olması, uygunsuz ya da muğlak önsel seçimi Bayes faktörünün kullanımını geçersiz kılmaktadır (Hall, 2012). Ayrıca parametre sayısı gözlem sayısından fazla olan hiyerarşik modellerin kıyaslanmasında Bayes faktörü uygulanamamaktadır. Bu dezavantajlardan bazılarının üstesinden gelmek için Bayes faktörünün versiyonları (sonsal, kısmi, içsel ve kesirli Bayes faktörü) geliştirilmiş olmasına rağmen, bunların kullanım koşulları da halen tartışma konusudur (Araujo ve Pereira, 2007).

BIC, farklı sayıda parametre içeren farklı modeller arasından seçim yapmak için kullanılması önerilen ölçütlerden biridir (Burnham, 2004). Artan değişken sayısının uyumda sağladığı iyileşmeyi, artan parametre sayısı ile log(n) oranında cezalandırdığından, modelde basitlik prensibine dayanır. Örneklem büyüklüğü arttığında tutarlı bir metottur. Bir başka deyişle, eğer alternatif modeller arasında doğru model var ise onu bulur. Parametreler için önsel dağılım belirtmeyi gerektirmediğinden, ön bilgi yetersizliğinde tercih edilebilmektedir.

Son dönemlerde, özellikle kompleks hiyerarşik modellemede karşılaşılan problemleri gidermek amacıyla geliştirilen DIC ölçütü, Bayes faktöründen tamamen farklı bir yapıda olup, AIC ve BIC ile benzer prensipte çalışmaktadır. Bu yaklaşım, veriye uygunluğu test edilen modelde yer alması gereken etkin parametre sayısının tahminini sağlaması, MCMC yöntemi ile kolaylıkla hesaplanabilmesi, önsel seçimine duyarlı olmaması gibi avantajlara sahip olmasına rağmen, her modelleme türüne uygulanamaması ve büyük örneklemlerde gereksiz sayıda parametreye sahip büyük modelleri tercih etmesi gibi dezavantajlara da sahiptir.

Bir modelleme çalışmasında hangi metot ya da metotlarla model seçimi yapılacağı, modellerin oluşturulma amacına göre belirlenmelidir. Eğer amaç öngörü yapmak ise, Bayes faktörü ve DIC (ya da BIC) kullanımıyla model kıyaslamasının aynı sonuca işaret etmesi beklenmemelidir. Çünkü ikisi de farklı amaca hizmet etmektedir. Bayes faktörü, sadece bir modelin doğru olduğu varsayımıyla, alternatif modeller arasından bu doğru modelin seçilmesi amacıyla kullanılır. DIC kullanımında ise amaç, diğer bilgi ölçütleri (AIC, BIC, AIC_c, vs) kullanımlarında olduğu gibi, doğru model olmasa bile veriyle en uyumlu modeli seçmektir. Özellikle hiyerarşik modellemede, öngörünün hiyerarşinin hangi seviyesi için yapılacağına bağlı olarak model seçim ölçütü tercihinin yapılması gerektiği önemle vurgulanmıştır (Spiegelhalter, 2006b).

İstatistiksel modelleme alanında farklı bir yere sahip kuantal modellemede ise amaç, gözlemlenen veride olması muhtemel bir yapının (kuantal olma) ortaya çıkarılmasına yönelik tanımlayıcı bir model oluşturmaktır. Literatürde "Megalitik Yard" adıyla bilinen bir örneğinde, antik dönem insanlarının yapı inşaatlarında, günümüz metrik sistemindeki gibi yerleşik bir temel uzunluk ölçüsü (kuantum) kullanıp kullanmadıkları sorusuna cevap aranmaktadır. Burada model parametresi kuantumun birden fazla tahmini mümkün olduğundan, parametrenin hangi değerinin verinin quantal yapısını tanımlayan en iyi/en doğru değer olduğu tespiti Bayes faktörü, DIC ve BIC ile yapılabilir. Bu çalışmada, "Megalitik Yard" probleminin bir veri setine üç yöntemin uygulanması sonucu, Megalit yapı inşaatında kullanılmış olabilecek temel ölçü birimi için q=7.480'e kıyasla q=5.439 inç değerini destekler yönde ortak bulguya ulaşılmıştır.

Bu çalışma için seçilen yöntemlerden aynı doğrultuda sonuç elde edilmiştir. Ancak model seçim ölçütlerinin farklı sonuçlar verdiği bir başka uygulama çalışmasında; modelleme alanına ve amacına, örneklem genişliğine, modeldeki parametre sayısına, modellerin içiçe geçmiş olup olmadığına vs. bakılarak sonuçlar yorumlanmalıdır. Örneğin, büyük örneklemler için modelin gereksiz derecede büyük olma ihtimaline önlem olarak BIC tercih edilirken, küçük örneklemlerde AIC prensibinde çalışan DIC daha iyi sonuçlar vermektedir. Bayes Faktörü, BIC, AIC ve DIC model seçim yöntemlerinin simülasyona dayalı bir gözden geçirme çalışması ve daha ayrıntılı kıyaslamaları Ward (2008)'da bulunabilir.

5. KAYNAKLAR

Acar, E., 2000. Extensions of Quantal Problems. PhD. Thesis. University of Sheffield Department of Probability and Statistics, UK. (in English).

Araujo, M. I., Pereira, B.B., 2007. A Comparison of Bayes factors for Separated Models: Some Simulation Results. Communications in Statistics, Simulation and Computation, 36, 297-309.

Asseburg, C., 2007. An Introduction to Using WinBUGS for Cost-Effectiveness Analyses in Health Economics Centre for Health Economics, University of York, UK.

Box, G. E. P., 1979. Robustness in the Strategy of Scientific Model Building. In R.L.Launer & G. N. Wilkinson, (Eds.) Robustness in Statistics New York: Academic Press, 201-236.

Burnham, K. P. 2004. Multimodel Inference: Understanding AIC and BIC in Model Selection. Colorado Cooperative F&W Research Unit, Coloroda State University, Amsterdam Workshop on model selection, USA.

Carlin, B., Chib, S., 1995. Bayesian Model Choice via Markov Chain Monte Carlo Methods. J. Royal Statist. Society Series B, 57(3), 473-484.

Celeux, G., Forbes, F., Robert, C. P., Titterington, D. M., 2006. Deviance Information Criteria for Missing Data Models. Bayesian Analysis, 4, 651-674.

Da Silva, S. A., Melo, L. L. M., Ehlers, R., 2004. Spatial Analysis of Incidence Rates: A Bayesian Approach. Biostatistics, 1-17.

Dempster, A. P., 1974. The Direct Use of Likelihood for Significance Testing in Proceedings of Conference on Foundational Questions in Statistical Inference. University of Aarhus, 335-352.

Freeman, P. R., 1976. A Bayesian Analysis of the Megalithic Yard. J. R. Statist. Soc. A, 139, 20-55.

Gelfand, A. E., Dey, D. K., Chang, H., 1992. Model Determination Using Predictive Distributions with Implementation via Sampling-based Methods (with discussion). In Bayesian Statistics , Oxford University Press, 4, 147-167.

Gelfand, A. E., Dey, D. K., 1994. Bayesian Model Choice: Asymptotics and Exact Calculations. Journal Royal Statistics Soc. B., 56.

Gilks, W. R., Richardson, S., Spiegelhalter, D. J., 1996. Markov Chain Monte Carlo in Practice. Chapman & Hall / CRC, London.

Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Rubin, D. B., 2004. Bayesian Data Analysis. Second Edition, Chapman and Hall / CRC, Boca Raton, FL.

Hall, B., 2012. Bayesian Inference. Statisticat, http://www.statisticat.com/laplacesdemon.html

Han, C., Carlin, B. P., 2001. MCMC Methods for Computing Bayes Factors: A Comparative Review. Journal of the American Statistical Association, 96, 1122-1132.

Jeffreys, H., 1961. Theory of Probability. Oxford University Press, Oxford, U.K.

Kass, R. E., Raftery, A. E., 1995. Bayes Factors. Journal of the American Statistical Association, 90, 773-795.

Kass, R. E., Wasserman, L., 1995. A Reference Bayesian Test for Nested Hypotheses and Its Relationship to the Schwarz Criterion. Journal of the American Statistical Association, 90(431), 928-934.

Kendall, D. G., 1974. Hunting Quanta. Phil. Trans. R. Soc. A, 276, 231-266.

Martino, S., 2007. Recent Methods for Bayesian Model Comparison. Department of Mathematical Science, NTNU.

Mccullogh, R., Rossi, P. E., 1992. A Bayesian Approach To Testing The Arbitrage Pricing Theory. Journal of Econometrics, 49, 141-168.

Mislevy, R. J., 2006. An Introduction to the DIC Index. University of Maryland.

Raftery, A. E., 1986. Choosing Modeles for Cross-Classiffications. American Sociological Review, 51, 145-146.

Raftery, A. E., 1995. Bayesian Model Selection in Social Research. Sociological Methodology, Marsden, P. V. Cambridge, Mass., Blackwells, 111-196.

Rosenkranz, S. L., Raftery, A. E., 1994. Covariate Selection in Hierarchical Models of Hospital Admission Counts: A Bayes Factor Approach No.268 Department of Statistics, GN 22 University of Washington Seattle, Washington, 98195 USA.

Schwarz, G., 1978. Estimating the Dimension of a Model. Annals of Statistics, 6(2), 461-464.

Sinharay, S., Stern, H. S., 2002. On the Sensitivity of Bayes Factors to the Prior Distributions. The American Statistician, 56(3), 196-201.

Spiegelhalter, D. J., Bull, K., 1997. Tutorial in Biostatistics Survival Analysis in Observational Studies. Statistics in Medicine, 16(9), 1041-1074.

Spiegelhalter, D. J., Best, N. G., Carlin, B. P., Van der Linde, A., 2002. Bayesian Measures of Model Complexity and Fit. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Methodological, 64(4), 583-616.

Spiegelhalter, D. J., 2006a. Two Brief Topics on Modelling with WinBUGS. MRC Biostatistics Unit, Cambridge.

Spiegelhalter, D. J., 2006b. Some DIC Slides. MRC Biostatistics Unit, Cambridge.

Thom, A., 1955. A Statistical Examination of the Megalithic Sites in Britain. J. R. Statist. Soc. A., 118, 275-295.

Thom, A., 1967. Megalithic Sites in Britain. Clarendon Press, Oxford.

Ucal, M. Ş., 2006. Ekonometrik Model Seçim Kriterleri Üzerine Kısa Bir İnceleme. C.Ü. İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi, 7(2), 41-57.

Ward, E. J., 2008. A Review and Comparison of Four Commonly Used Bayesian and Maximum Likelihood Selection Tools. Ecological Modelling, 211, 1-10.

Wilberg, M. J., Bence, J. R., 2008. Performance of Deviance Information Criterion Model Selection in Statistical Catch-at-age Analysis. Fisheries Research, 93, 212-221.

AN APPLICATION OF THE BAYESIAN MODEL SELECTION BY USING BAYES FACTOR, BAYESIAN INFORMATION CRITERION AND DEVIANCE INFORMATION CRITERION

ABSTRACT

In statistical modelling studies, due to the advanced technology and methodological developments, it is possible to construct alternative models assumed to generate the data. Therefore, the process of choosing "the best model" among available competing models appears to be one of the crucial steps that has to be included in the modelling process. In this study, Bayes factor, which is a preferred Bayesian approach to the solution of statistical model selection problem, is introduced. For the cases when analytical computation of Bayes factor is not possible, in addition to Bayesian Information Criterion (BIC), Carlin and Chib method based on Markov Chain Monte Carlo (MCMC) simulation is explained. Besides, a frequently used criteria in the recent years of model selection applications, namely Deviance Information Criterion (DIC), which has a completely different working principle than Bayes factor, is described in detail. Two models appeared in the literature as a result of an application of quantal modelling, which is an example of a semi-parametric modelling, are compared by means of Bayes factor, BIC and DIC.

Keywords: Bayes factor, Carlin and Chib method, DIC, MCMC, BIC.