NORMAL MÜDAHALELİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜRECİNİN SINIR FONKSİYONELLERİ ÜZERİNE

Zulfiyya MAMMADOVA* Tahir KHANİYEV İhsan ÜNVER*****

ÖZET

Bu çalışmada Normal müdahaleli ödüllü yenileme süreci (X(t)) matematiksel olarak tanımlanmış ve bu sürecin iki sınır fonksiyoneli (N_1 ve τ_1) ele alınmıştır. Bu fonksiyonellerin momentleri arasında kesin bir bağıntı kurulmuş ve daha sonra hem N_1 hem de τ_1 in ilk dört momenti için asimptotik açılımlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ödüllü yenileme süreci, Normal müdahale, Sınır fonksiyonelleri, Momentler, Asimptotik açılım.

1. GİRİŞ

Envanter, stok kontrol, kuyruk teorisi, güvenirlik gibi uygulamalı alanlarda ortaya çıkan birçok problem yenileme, ödüllü yenileme ve rasgele yürüyüş süreçlerinin sınır fonksiyonelleri yardımıyla ifade edilebilir. Literatürde bu konuda önemli teorik sonuçlar mevcuttur: Aliyev et al. (2010), Alsmeyer (1991), Aras and Woodroofe (1993), Borovkov (1984), Brown and Solomon (1975), Feller (1971), Gihman and Skorohod (1975), Jewell (1967), Khaniyev et al. (2005), (2006), (2010), Lotov (1996), Nasirova (1998), Ross (1996). Ancak, elde edilen sonuçlar genellikle karmaşık matematiksel yapıya sahip oldukları için kullanışlı değillerdir. Bu karmaşık yapıyı daha kullanışlı bir hale getirmek için son yıllarda iki yönde araştırmalar yoğunlaştırılmıştır. Bir taraftan benzetim yöntemleri kullanılarak bilgisayar yardımı ile sayısal sonuçlar alınmakta; diğer taraftan ise asimptotik yöntemler kullanılarak yaklaşık, fakat yeterince sade ifadeler elde edilmektedir. Bu nedenle, literatürde asimptotik yöntemlerin uygulanmasına ait birçok değerli çalışmalar ortaya konulmuştur Alsmeyer (1991), Aras and Woodroofe (1993), Chang and Peres (1997), Khorsnov (1997), Lotov (1996). Bu çalışmalardan özellikle, Alsmeyer (1991) ve Lotov (1996) çalışmaları büyük ilgi görmektedirler. Alsmeyer (1991)'in çalışmasında harmonik yenileme fonksiyonu için iki terimli asimptotik açılım elde edilmiştir. Lotov (1996)'un çalışmasında ise Gauss rasgele yürüyüş sürecinin sınır fonksiyonelleri için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir.

Kesemen (2006)'in doktora tez çalışmasında ise, Gamma müdahaleli rasgele yürüyüş süreçlerinin sınır fonksiyonelleri asimtotik yöntemlerle incelenmiştir. Bununla birlikte rasgele faktörlerin etkisi altında değişen birçok dinamik sisteme gerektiğinde "dışarıdan müdahale edilmesi" aslında birçok faktörün toplam etkisi altında oluşmaktadır.

*Dr., Karadeniz Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, e-posta: zulfiyyamammadova@gmail.com
**Prof. Dr., TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Endüstri Mühendisliği, e-posta: tahirkhaniyev@etu.edu.tr
***Prof. Dr., Karadeniz Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, e-posta: ihsanunver@ktu.edu.tr

Bu çalışma 110T559 nolu proje kapsamında TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

Dolayısıyla, böyle kararlar verilirken birçok faktörün toplam etkisi göz önünde bulundurularak "müdahale" kararları verilmektedir. Merkezi Limit Teoremine göre etki gösteren faktörlerin sayısı arttıkça "müdahale"yi ifade eden rasgele değişkenin dağılımı yaklaşık da olsa normal dağılıma yakınsayacaktır.

Bu nedenle, çok sayıda rasgele faktörlerin etkisi altında faaliyet gösteren sistemler için "müdahale"nin Normal dağılıma sahip olduğunu kabul etmek daha mantıklı ve pratik açıdan elverişlidir. Ancak Normal müdahaleli süreçlerin incelenmesi, Gamma müdahaleli süreçlere göre çok daha karmaşıktır. Gamma müdahaleli süreçleri incelerken ortaya çıkan ifadeler genellikle bir yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü yardımı ile verilebilir. Fakat Normal dağılımlı müdahalelerde bu elverişli matematiksel yöntem kullanılmamaktadır. Bu nedenle, Normal müdahaleli süreçlerin incelenmesi hem bilimsel, hem de pratik öneme sahiptir.

Bu çalışmanın temel amacı, asimptotik yöntemleri kullanarak Normal müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin iki önemli sınır fonksiyonelinin momentleri için yaklaşık ifadeler elde etmektir. Bu sebeple, bu çalışmada Tauber - Abel teoremleri ve yenileme teorisinin temel sonuçları kullanılarak, sınır fonksiyonellerinin momentleri için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Ele alacağımız stokastik süreci matematiksel olarak tanımlamadan önce aşağıdaki fiziksel modeli ifade edelim.

Fiziksel Model: Başlangıç anında bir depodaki stok seviyesinin $z > 0$ olduğunu varsayalım. $T_1 = \xi_1, T_2 = \xi_1 + \xi_2, ..., T_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n, ...$ rasgele anlarında, depoya gelen talepler doğrultusunda $\eta_1, \eta_2, ...$ miktarlarda stok alınmaktadır. Burada $\xi_1, \xi_2, ...$' ler ardışık talepler arasında geçen süreleri; $\eta_1, \eta_2, ...$' ler ise talep miktarlarını gösteren pozitif değerli rasgele değişkenlerdir. Bu işlem, depodaki stok seviyesi sıfırın altına düşene kadar devam eder. Stok seviyesi sıfırın altına düştüğü anda deponun stok düzeyi, yeni başlangıç seviyesi ζ_1 durumuna getirilir. Varsayımımıza göre, bu yeni başlangıç seviyesi $[0, \infty)$ aralığında kısıtlı normal dağılıma sahip bir rasgele değişkendir. Bu işlemden sonra depo yeni başlangıç seviyesi ile benzer şekilde çalışmaya başlasın. Bu şekilde çalışan bir deponun stok seviyesinin değişimini "Normal müdahaleli ödüllü yenileme süreci" olarak bilinen bir stokastik süreç yardımıyla ifade etmek mümkündür. Amacımız, uzun süre bu şekilde çalışan bir deponun stok seviyesinin değişimini ifade eden süreci ve iki önemli sınır fonksiyonelini matematiksel olarak tanımlamak ve bu sınır fonksiyonellerinin momentlerini asimtotik yöntemlerle incelemektir. Bunun için öncelikle ele alacağımız stokastik sürecin ve sınır fonksiyonellerinin matematiksel tanımını verelim.

2. SÜRECİN VE SINIR FONKSİYONELLERİNİN MATEMATİKSEL TANIMI

$\{(\xi_n, \eta_n)\}, n = 1, 2, 3, ...$ dizisi $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız ve aynı dağılıma sahip pozitif değerli rasgele çiftler dizisi olsun. Ayrıca, ξ_n ve η_n rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız ve pozitif değerli olup, dağılım fonksiyonları bilinsin ve sırasıyla $F_\xi(t)$ ve $F_\eta(x)$ ile gösterilsin. Yani, $F_\xi(t) = P\{\xi_n \le t\}$ ve $F_\eta(x) = P\{\eta_n \le x\}; t, x \ge 0$ olsun. Buna ek olarak, $\{Y_n\}$, $n = 0, 1, 2, ...$ dizisi de bu olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız ve aynı (a, σ^2) parametreli Normal dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Bunların yanı sıra, $\zeta_n = \max\{0, Y_n\}, n = 1,2,3,...$ olsun. $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenler dizisinden yararlanarak, $\{T_n\}$ ve $\{S_n\}$ yenileme dizilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \,,\; S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \,,\; n \ge 1,\; T_0 = S_0 = 0 .$$

Şimdi de aşağıdaki tam değerli rasgele değişkenleri tanımlayalım:

$$N_0 \equiv 0 \,;\; N(z) = \inf\{\, k \ge 1;\; z - S_k < 0 \,\} \,;$$

$$N_1 \equiv N_1(\zeta_1) = \inf\{\, k \ge 1;\; \zeta_1 - S_k < 0 \,\} \,;$$

$$N_n = \inf\left\{k \ge N_{n-1} + 1 : \zeta_n - S_k + S_{N_{n-1}} < 0\right\},\; n = 2,3,...,$$

Ayrıca, $\inf\{\varnothing\} = +\infty$ olsun.

Bundan başka,

$$\nu(t) = \max\{n \ge 0 :\; T_n \le t\},\; t > 0 \,;$$

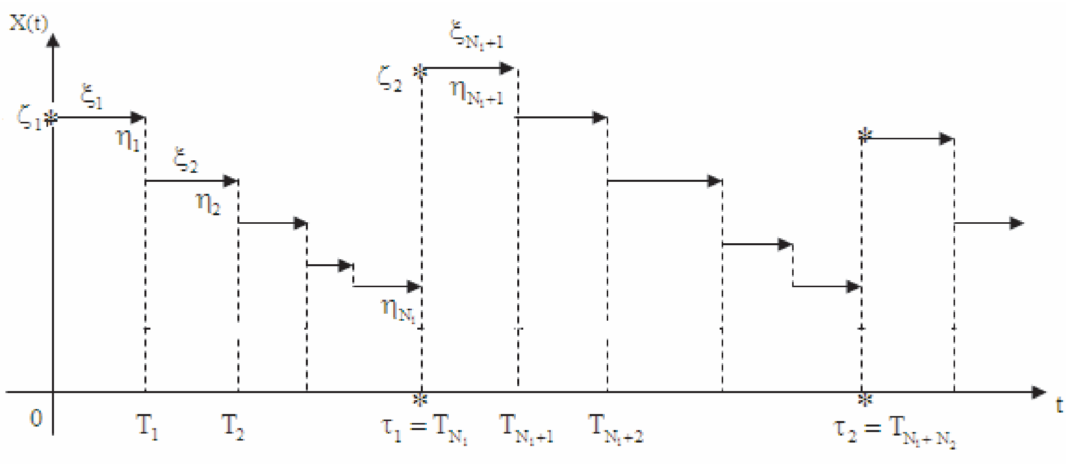
$$\tau_0 \equiv 0;\; \tau(z) = T_{N(z)} = \sum_{i=1}^{N(z)} \xi_i \;\;;\;\; \tau_1 \equiv \tau_1(\zeta_1) = T_{N_1(\zeta_1)} = \sum_{i=1}^{N_1(\zeta_1)} \xi_i;$$

$$\tau_n = T_{N_n} = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i \;;\; n \ge 2$$

olsun. Şimdi de ele alınacak stokastik süreci $(X(t))$ aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$X(t) = \zeta_n - S_{\nu(t)} + S_{N_{n-1}} \,,\;\; t \in [\tau_{n-1}, \tau_n),\; n = 1,2,3...$$

Literatürde, $X(t)$ sürecine "Normal Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci" denir. N_1 ve τ_1 rasgele değişkenleri X(t) sürecinin iki önemli sınır fonksiyonelleridir. Burada τ_1, X(t) sürecinin ilk kez sıfırın altına indiği anı, N_1 ise bu ana kadar olan sıçramaların sayısını belirtmektedir. Aşağıda Normal müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin bir izi gösterilmiştir.



Bu çalışmanın temel amacı, $X(t)$ sürecinin iki önemli sınır fonksiyoneli olan $N_1(\zeta_1)$ ve $\tau_1(\zeta_1)$ rasgele değişkenlerinin momentlerinin asimptotik davranışını $a \to \infty$ iken incelemektir.

3. SÜRECİN SINIR FONKSİYONELLERİ İÇİN ASİMTOTİK SONUÇLAR

Bu çalışmanın temel sonuçlarını vermeden önce Aliyev et al. (2010) çalışmasında bulunan aşağıdaki önermeyi sunalım.

Yardımcı Teorem 3.1 (Aliyev et al., 2010): $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenler dizisi $E(\eta_1^3)<\infty$ koşulunu da sağlamış olsun. Bu takdirde, $N(z)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için $z \to \infty$ iken aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

1) $$E(N(z)) = \frac{z}{m_1} + A_1 + o\left(\frac{1}{z}\right),$$

2) $$E(N^2(z)) = \frac{z^2}{m_1^2} + A_2 z + B_2 + o(1),$$

3) $$E(N^3(z)) = \frac{z^3}{m_1^3} + A_3 z^2 + B_3 z + o(z),$$

4) $$E(N^4(z)) = \frac{z^4}{m_1^4} + A_4 z^3 + B_4 z^2 + o(z^2),$$

burada

$$A_1 = \frac{m_2}{2m_1^2},\quad A_2 = \frac{2m_2 - m_1^2}{m_1^3},\quad A_3 = \frac{9m_2 - 6m_1^2}{2m_1^4},\quad A_4 = \frac{8m_2 - 6m_1^2}{m_1^5};$$

$$B_2 = \frac{3m_2^2 - 4m_1m_3 - m_1^2 m_2}{2m_1^4},\quad B_3 = \frac{9m_2^2 - 3m_1m_3 - 6m_1^2 m_2 + m_1^4}{2m_1^5},$$

$$B_4 = \frac{30m_2^2 - 8m_1m_3 - 27m_1^2 m_2 + 7m_1^4}{m_1^6};\quad m_k = E(\eta_1^k),\ k=1,2,3$$

biçimindedir.

Şimdi de $N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için elde edilen sonuçları aşağıdaki teorem şeklinde ifade edelim.

Teorem 3.1: $E(\eta_1^3)<\infty$ ve $a\to\infty$ iken $\sigma/a\to 0$ şartları altında, $N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için $a\to\infty$ iken aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$E(N_1(\zeta_1))=\frac{a}{m_1}+A_1+o(\frac{1}{a}),$$

$$E(N_1^2(\zeta_1))=\frac{a^2}{m_1^2}+A_2a+\left[B_2+\frac{\sigma^2}{m_1^2}\right]+o(1),$$

$$E(N_1^3(\zeta_1))=\frac{a^3}{m_1^3}+A_3a^2+\left[B_3+\frac{3\sigma^2}{m_1^3}\right]a+o(a),$$

$$E(N_1^4(\zeta_1))=\frac{a^4}{m_1^4}+A_4a^3+\left[B_4+\frac{6\sigma^2}{m_1^4}\right]a^2+o(a^2),$$

Burada $a=E(Y_1)$; $\sigma^2=Var(Y_1)$ ‘dır. A_1,A_2,A_3,A_4 ve B_2,B_3,B_4 katsayıları yukarıda verilen Yardımcı Teorem 1’ deki gibi hesaplanır.

İspat: Tanımı gereği, $EN_1(\zeta_1)=\int_0^\infty E(N(z)d\pi(z)$ ’dır. Burada $\pi(z)$ fonksiyonu, $\zeta_1=\max\{0,Y_1\}$, $(Y_1\in N(a,\sigma^2))$, rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonudur ve aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$z\geq 0$ olduğunda $\pi(z)=\Phi\left(\frac{z-a}{\sigma}\right)$; $z<0$ olduğunda ise $\pi(z)=0$ olur.

Burada $\Phi(u)$ fonksiyonu ile standart normal dağılım fonksiyonu gösterilmiştir.

$\pi(z)$ fonksiyonu z=0 noktasında $\Phi(-a/\sigma)$ kadar sıçrama yapan bir dağılım fonksiyonudur.

$$E(N_1(\zeta_1))=\int_0^\infty E(N(z))d\pi(z)=E(N(0))\ \Phi(-a/\sigma)+$$

$$\int_{+0}^\infty E(N(z))\frac{1}{\sigma}\ \varphi\left(\frac{z-a}{\sigma}\right)dz=\Phi(-a/\sigma)+\int_0^\infty E(N(z))\ \varphi_\sigma(z-a)dz \qquad (1)$$

Burada, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$ fonksiyonu standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $\varphi_\sigma(u)=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$ dır.

Teorem 3.1'in şartına göre, $a \to \infty$ iken $T \equiv \frac{a}{\sigma} \to \infty$ olur. Dolayısıyla, Milln Teoremi'ne göre (Abramowitz and Stegun, 1964),

$$\Phi(-T) = 1 - \Phi(T) = \int_T^\infty \varphi(u)du \sim \frac{\varphi(T)}{T} = \frac{\sigma}{a}\varphi(\frac{a}{\sigma})$$

asimptotik denklik yazılabilir. $M_1(z) \equiv E(N(z))$ tanımını kullanarak (1)'in ikinci terimini aşağıdaki gibi iki kısma ayıralım:

$$\int_0^\infty E\left(N(z)\right)\, \varphi_\sigma(z-a)dz = \int_0^a E\left(N(z)\right)\, \varphi_\sigma(z-a)dz + \int_a^\infty E\left(N(z)\right)\, \varphi_\sigma(z-a)dz =$$

$$\int_0^a M_1(z)\, \varphi_\sigma(a-z)dz + \int_a^\infty M_1(z)\, \varphi_\sigma(z-a)dz = I_{11}(a) + I_{12}(a) \qquad (2)$$

Burada, $I_{11}(a) = M_1(a) * \varphi_\sigma(a); I_{12}(a) = \int_a^\infty E\left(N(z)\right)\, \varphi_\sigma(z-a)dz$ 'dir.

Önce, (2) eşitliğinin birinci toplananını

$$I_{11}(a) = M_1(a) * \varphi_\sigma(a) \qquad (3)$$

inceleyelim. (3) eşitliğinin her tarafına, a parametresine göre Laplace dönüşümünü uygularsak,

$$\tilde{I}_{11}(\lambda) = \tilde{M}_1(\lambda)\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) \qquad (4)$$

olur. Burada $\tilde{G}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda a}G(a)da$ ile $G(a)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü gösterilmiştir. $\lambda \to 0$ iken $\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^3}{4}\lambda^2 + o(\lambda^2) \qquad (5)$$

Burada σ^2=Var(Y_1) dir. Diğer taraftan, Yardımcı Teorem 3.1' den aşağıdaki sonuç elde edilebilir:

$$\tilde{M}_1(\lambda) = \frac{1}{m_1\lambda^2} + \frac{A_1}{\lambda} + C_1 + o(1) \qquad (6)$$

Burada, $A_1 = \frac{m_2}{2m_1}$; $C_1 = \frac{m_2^2}{4m_1^2} - \frac{m_3}{6m_1}$ 'dır.

(5) ve (6) açılımlarını (4)'de göz önünde bulundurup gereken hesaplamaları yaparak aşağıdaki açılım elde edilebilir:

$$\tilde{I}_{11}(\lambda) = \tilde{M}_1(\lambda)\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) = \frac{1}{2m_1}\frac{1}{\lambda^2} + \left[\frac{m_2}{4m_1^2} - \frac{\sigma}{m_1\sqrt{2\pi}}\right]\frac{1}{\lambda}$$

$$+\left[\frac{A_1}{2m_1} - \frac{\sigma m_2}{m_1^2\sqrt{2\pi}} + \frac{\sigma^2}{4m_1}\right] + o(1) \tag{7}$$

(7) açılımına Tauber – Abel Teoremi' ni uygulayarak $a \to \infty$ iken aşağıdaki açılım elde edilir (Feller, 1971):

$$I_{11}(a) = \frac{a}{2m_1} + \left[\frac{m_2}{4m_1^2} - \frac{\sigma}{m_1\sqrt{2\pi}}\right] + o\left(\frac{1}{a}\right) \tag{8}$$

Şimdi de (2) eşitliğinin ikinci toplananını inceleyelim:

$$I_{12}(a) \equiv \int_a^\infty E(N(z))\varphi_\sigma(z-a)dz\,. \tag{9}$$

$z \to \infty$ iken

$$E(N(z)) = \frac{z}{m_1} + \frac{m_2}{m_1^2} + o\left(\frac{1}{z}\right) \tag{10}$$

yazılabilir. (10) açılımını (9)'da göz önünde bulundurarak aşağıdaki açılım elde edilir:

$$I_{12}(a) = \frac{a}{2m_1} + \left[\frac{m_2}{4m_1^2} + \frac{\sigma}{m_1\sqrt{2\pi}}\right] + o\left(\frac{1}{a}\right). \tag{11}$$

(8) ve (11) açılımlarını (2) eşitliğinde yerine yazıp gerekli hesaplamaları yaparak aşağıdaki açılımı elde ederiz:

$$\int_0^\infty E(N(z))\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a}{m_1} + \frac{m_2}{m_1^2} + o\left(\frac{1}{a}\right). \tag{12}$$

(12) açılımı (1) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$E(N_1(\zeta_1)) = \frac{a}{m_1} + \frac{m_2}{m_1^2} + o\left(\frac{1}{a}\right)$$

olur.

Şimdi de ikinci momentin asimptotik davranışını inceleyelim. Yardımcı Teorem 3.1'de aşağıdaki asimptotik sonuç elde edilmiştir:

$$E(N^2(z)) = \frac{z^2}{m_1^2} + A_2 z + B_2 + o(1)\,. \tag{13}$$

Bu takdirde,

$$E(N_1^2(\zeta_1)) = \int_0^\infty E(N^2(z))\varphi_\sigma(z-a)dz + \Phi\left(-\frac{a}{\sigma}\right) \quad (14)$$

olur. Diğer taraftan,

$$\int_0^\infty E(N^2(z))\varphi_\sigma(z-a)dz = \int_0^a E(N^2(z))\varphi_\sigma(z-a)dz + \int_a^\infty E(N^2(z))\varphi_\sigma(z-a)dz$$

$$= \int_0^a M_2(z)\varphi_\sigma(a-z)dz + \int_a^\infty E(N^2(z))\varphi_\sigma(z-a)$$

$$= M_2(a) * \varphi_\sigma(a) + \int_a^\infty E(N^2(z))\varphi_\sigma(z-a)dz = I_{21}(a) + I_{22}(a) \quad (15)$$

olur. Burada, $I_{21}(a) = M_2(a) * \varphi_\sigma(a);\ I_{22}(a) = \int_a^\infty E(N^2(z))\varphi_\sigma(z-a)dz$ ‘dır.

Önce $I_{21}(a)$ ’yı inceleyelim. Bunun için Yardımcı Teorem 3.1’de elde edilmiş aşağıdaki asimptotik sonucu kullanacağız: $M_2(z) \equiv E(N^2(z)) = \frac{z^2}{m_1^2} + A_2 z + B_2 + o(1)$.

$\lambda \to 0$ iken, $M_2(z)$ ’in Laplace dönüşümü için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$\tilde{M}_2(\lambda) = \frac{2}{m_1^2\lambda^3}\left\{1 + \frac{A_2 m_1^2}{2}\lambda + \frac{B_2 m_1^2}{2}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\} \quad (16)$$

(5) ve (16) açılımlarını $I_{21}(a)$ ’nın Laplace dönüşümünde göz önünde bulundurarak ve gereken hesaplamaları yaparak aşağıdaki açılımı elde ederiz:

$$\tilde{I}_{21}(\lambda) = \frac{1}{m_1^2}\frac{1}{\lambda^3} + \left(\frac{A_2}{2} - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}m_1^2}\right)\frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{B_2}{2} - \frac{A_2\sigma}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sigma^2}{2m_1^2}\right)\frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (17)$$

(17) açılımına Tauber -Abel teoremini uygulayarak $a \to \infty$ iken aşağıdaki açılımı elde etmek mümkündür:

$$I_{21}(a) = \frac{a^2}{2m_1^2} + \left(\frac{A_2}{2} - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}m_1^2}\right)a + \left(\frac{B_2}{2} - \frac{A_2\sigma}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sigma^2}{2m_1^2}\right) + o(1). \quad (18)$$

Şimdi de $I_{22}(a)$ ’yı inceleyelim. Bu amaçla aşağıdaki açılımları kullanacağız:

$$\int_a^\infty z^n\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{1}{2}a^n + \frac{n\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^{n-1} + \frac{n(n-1)\sigma^2}{4}a^{n-2} + o(a^{n-2}), n = 0,1,2,... \quad (19)$$

(13) ve (19) açılımlarını $I_{22}(a)$ ’nın ifadesinde dikkate alırsak aşağıdaki açılım yazılabilir:

$$I_{22}(a)=\frac{a^2}{2m_1^2}+\left(\frac{A_2}{2}+\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}m_1^2}\right)a+\left(\frac{B_2}{2}+\frac{A_2\sigma}{\sqrt{2\pi}}+\frac{\sigma^2}{2m_1^2}\right)+o(1). \qquad (20)$$

(18) ve (20) açılımları (15) eşitliğinde yerine yazarsak aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\int_0^\infty E(N^2(z))\varphi_\sigma(z-a)dz=\frac{a^2}{m_1^2}+A_2a+\left(B_2+\frac{\sigma^2}{m_1^2}\right)+o(1)$$

ve buradan ikinci moment için üç terimli asimptotik açılıma ulaşılır:

$$E(N_1^2(\zeta_1))=\frac{a^2}{m_1^2}+A_2a+\left(B_2+\frac{\sigma^2}{m_1^2}\right)+o(1).$$

Benzer şekilde, $N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin üçüncü ve dördüncü momentleri için de $a\to\infty$ iken üç terimli asimptotik açılımlar elde edilebilir. Bu da Teorem 3.1'in ispatını tamamlar.

Çalışmanın ikinci kısmında $\tau_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için üç terimli asimptotik açılımların elde edilmesi amaçlanmaktadır. Bunun için Aliyev et al. (2010) çalışmasındaki bir sonuçtan yararlanacağız. Aliyev et al. (2010) çalışmasında $\tau(z)$ ile $N(z)$ sınır fonksiyonellerinin momentleri arasında kesin ilişkiler kurulmuştur. Bu sonucu aşağıdaki yardımcı teorem şeklinde verelim:

Yardımcı Teorem 3.2 (Aliyev et al., 2010): $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenler dizileri aşağıdaki ek koşulları sağlamış olsun:

$$\text{i) } \alpha_4=E(\xi_1^4)<\infty \;;\; \text{ii) } m_3=E\left(\eta_1^3\right)<\infty.$$

Bu durumda, $\tau(z)$ sınır fonksiyonelinin ilk 4 momenti, $N(z)$ sınır fonksiyonelinin aynı momentleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

1) $E(\tau(z))=\alpha_1E(N(z))$,
2) $E(\tau^2(z))=\alpha_1^2E(N^2(z))+\left(\alpha_2-\alpha_1^2\right)E(N(z))$,
3) $E(\tau^3(z))=\alpha_1^3E(N^3(z))+3\alpha_1\left(\alpha_2-\alpha_1^2\right)E(N^2(z))+\left(2\alpha_1^3-3\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_3\right)E(N(z))$,
4) $E(\tau^4(z))=\alpha_1^4E(N^4(z))+6\alpha_1^2\left(\alpha_2-\alpha_1^2\right)E(N^3(z))+\left(11\alpha_1^4-18\alpha_1^2\alpha_2+4\alpha_1\alpha_3+3\alpha_2^2\right)E(N^2(z))+\left(\alpha_4+12\alpha_1^2\alpha_2-4\alpha_1\alpha_3-3\alpha_2^2-6\alpha_1^4\right)E(N(z))$.

Burada $\alpha_k=E\left(\xi_1^k\right)$ k=1,2,3,4 'tür.

Nihayet, Teorem 3.1 ve Yardımcı Teorem 3.2'den yararlanarak $\tau_1\equiv\tau_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin asimptotik davranışı hakkında aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2: Aşağıdaki ek koşullar sağlanmış olsun:

i) $E(\xi_1^4)<\infty$; ii) $E(\eta_1^3)<\infty$; iii) $a\to\infty$ iken $\sigma/a\to 0$ olsun.

Bu takdirde, $a\to\infty$ iken, $\tau_1\equiv\tau_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki üç terimli asimtotik açılımları yazmak mümkündür:

1) $$E(\tau_1(\zeta_1))=\frac{\alpha_1}{m_1}a+\frac{m_2}{2m_1^2}\alpha_1+o(\frac{1}{a}),$$

2) $$E(\tau_1^2(\zeta_1))=\frac{\alpha_1^2}{m_1^2}a^2+\left[\left(A_2-\frac{1}{m_1}\right)\alpha_1^2+\frac{\alpha_2}{m_1}\right]a+\left[\left(B_2-A_1+\frac{\sigma^2}{m_1^2}\right)\alpha_1^2+A_1\alpha_2\right]+o(1),$$

3) $$E(\tau_1^3(\zeta_1))=\frac{\alpha_1^3}{m_1^3}a^3+\left[\frac{\left(A_3m_1^2-3\right)\alpha_1^3+3\alpha_1\alpha_2}{m_1^2}\right]a^2+$$
$$\left\{\left[B_3+\frac{3\sigma^2}{m_1^3}-3A_2+\frac{2}{m_1}\right]\alpha_1^3+\frac{3A_2m_1\alpha_1\alpha_2-3\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_3}{m_1}\right\}a+o(a),$$

4) $$E(\tau_1^4(\zeta_1))=\frac{\alpha_1^4}{m_1^4}a^4+\left(A_4\alpha_1^4+\frac{6\alpha_1^2\left(\alpha_2-\alpha_1^2\right)}{m_1^3}\right)a^3+$$
$$\left[\left(B_4+\frac{6\sigma^2}{m_1^4}\right)\alpha_1^4+6\alpha_1^2\left(\alpha_2-\alpha_1^2\right)A_3+\frac{11\alpha_1^4-18\alpha_1^2\alpha_2+3\alpha_2^2+4\alpha_1\alpha_3}{m_1^2}\right]a^2+o(a^2)$$

,

burada $\alpha_n=E(\xi_1^n)$, $m_n=E(\eta_1^n)$, $n=1,2,3$ 'tür.

A_n ve B_n katsayılarının aşikar şekilleri de Yardımcı Teorem 3.1'in ifadesinde verilmiştir.

4. SONUÇ

Bu çalışmada, Normal müdahaleli bir ödüllü yenileme süreci tanımlanmış ve bu sürecin iki önemli sınır fonksiyoneli için asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Elde edilen asimtotik açılımlar kesin formüllerle karşılaştırmada yeteri kadar sadedir. Bunun yanı sıra elde edilen asimtotik açılımların kesin ifadelere yeteri kadar yakın olduğu da gözlemlenmiştir. Dolayısıyla, elde edilen formüller uygulama açısından kolaylık sağlamaktadır. Bu da kuyruk teorisi, stok kontrol ve güvenirlik teorilerinin birçok problemini etkin bir biçimde çözmeye olanak sağlar. Yapılan bu çalışmanın, yarı-Markov süreçleri teorisindeki bir eksikliği giderebileceği umulmaktadır. Bununla beraber bu çalışmayı birçok yönlerde de geliştirebilmek mümkündür. Örneğin, kesikli müdahaleyi ifade eden rasgele değişkenin dağılımını, Normal dağılım sınıfından daha geniş bir sınıftan seçerek benzer süreçlerin analitik ve asimptotik özellikleri incelenebilir. Diğer taraftan benzer problemler, talep miktarları (η_n) ile talepler arasında geçen süreler (ξ_n) birbirlerine bağımlı olduklarında martingaller yöntemi uygulanarak; ağır kuyruklu rasgele değişkenler için ise, düzenli varyasyonlar yöntemi kullanılarak incelenebilir (Feller, 1971).

Kuyruk teorisi, güvenirlik, stok kontrol, matematiksel sigorta, stokastik finans, matematiksel biyoloji vs. gibi dalların birçok problemlerinin rasgele yürüyüş süreçleri ile ifade edildiği de bilinmektedir. Bu çalışmada önerilen yöntemler rasgele yürüyüş süreçlerinin sınır fonksiyonellerinin incelenmesi için de kullanılabilir.

5. KAYNAKLAR

Abramowitch, M., Stegun, I.A., 1964. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. John Wiley, New York.

Aliyev, R., Okur, B., N., Khaniyev, T., Unver, I., 2010. Asymptotic expansions for the moments of the boundary functionals of the renewal-reward process with a discrete interference of chance. Mathematical and Computational Applications, 15**,** 117-126.

Alsmeyer, G., 1991. Some Relations Between Harmonic Renewal Measure and Certain First Passage Times. Statistics and Probability Letters, 12 (1): 19-27.

Aras, G., Woodroofe, M., 1993. Asymptotic Expansions for the Moments of a Randomly Stopped Average. Annals of Statistics, 21, 503-519.

Borovkov, A.A., 1984. Asymptotic Methods in Queuing Theory. J. Wiley, New York.

Brown, M., Solomon, H., 1975. A Second-Order Approximation for Variance of a Renewal Reward Process. Stochastic Processes and their Application, 3, 301-314.

Chang, J.T., Peres, Y., 1997. Ladder Heights, Gaussian Random Walks and the Riemann Zeta Function. Annals of Probability, 25, 787–802.

Feller, W., 1971. An Introduction to Probability Theory and its Applications II. John Wiley, New York.

Gihman, I.I., Skorohod, A. V., 1975. Theory of Stochastic Processes II. Springer-Verlag, Berlin.

Janssen, A.J.E.M., van Leeuwarden, J.S.H., 2007. On Lerch's Transcendent and the Gaussian Random Walk. Annals of Applied Probability, 17, 421-439.

Jewell, W. S., 1967. Fluctuation of a Renewal-reward Process. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 19**,** 309-329.

Kesemen, T., 2006. Rasgele Hacimli Genişletilmiş (S, S) Tipli Modellerin Analitik ve Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi. Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon (Türkçe).

Khaniyev, T.A., 2005. About Moments of Generalized Renewal Process. Transactions of NAS of Azerbaijan, Series of Phys. Tech. and Math. Sciences, 25 (1): 95-100.

Khaniyev, T., Mammadova, Z., 2006. On The Stationary Characteristics of the Extended Model of Type (S,S) With Gaussian Distribution of Summands. Journal of Statistical Computation and Simulation, 76(10): 861-874.

Khaniev, T., Atalay, K., 2010. On the Weak Convergence of the Ergodic Distribution in an Inventory Model of Type (s, S). Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39(4): 599-611.

Khorsunov, D., 1997. On Distribution Tail of the Maximum of a Random Walk. Stochastic Processes and Applications, 72, 97–103.

Lotov, V.I., 1996. Some Boundary Crossing Problems for Gaussian Random Walks. The Annals of Probability, 24(4): 2154–2171.

Nasirova, T. I., Yapar, C., Khaniev, T. A., 1998. On Probability Characteristics of the Stock Level in the Model of Type (s, S). Cybernetics and Systems Analysis, 5, 69-76.

Ross, S.M., 1996. Stochastic Processes. John Wiley, New York.

ON THE BOUNDARY FUNCTIONALS OF THE RENEWAL REWARD PROCESS WITH NORMAL INTERFERENCE OF CHANCE

ABSTRACT

In this study, a renewal reward process (X(t)) with Normal interference of chance is mathematically constructed and two boundary functionals (N_1 and τ_1) of this process are considered. A relationship between the moments of the boundary functional N_1 and τ_1 are established, and then, the asymptotic expansions for the first four moments of these boundary functionals are obtained.

Keywords: Renewal reward process, Normal distribution, Boundary functionals, Moments, Discrete interference of chance, Asymptotic expansion.