Volume: 07 Number: 01 Category: 01 Page: 1-17 ISSN No: 1303-6319 Cilt: 07 Sayı: 01 Kategori: 01 Sayfa: 1-17

TABAKALI TESADÜFİ ÖRNEKLEMEDE DOĞRUSAL OLMAYAN MALİYET KISITLARI ALTINDA ÖRNEK HACMİNİN TABAKALARA DAĞITILMASI

S. Tuğba ŞAHİN*

ÖZET

Bu çalışmada, Tabakalı Tesadüfi Örneklemede kitleden seçilen n hacimli örneğin, sabit bir bütçe altında tabakalara optimum şekilde dağıtılması incelenmiştir. Bu dağıtım yapılırken iki farklı doğrusal olmayan maliyet fonksiyonu kullanılmıştır. Ayrıca ele alınan iki farklı doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında hangi durumlarda örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum olduğu incelenmiştir. Doğrusal olmayan maliyet kısıtları kullanıldığında örnek hacminin tabakalara dağıtılması, doğrusal maliyet kısıtı kullanıldığındaki duruma göre daha zor ve zaman alıcıdır. Bu çalışmada, hem amaç fonksiyonunun, hem de maliyet kısıtlarının doğrusal olmadığı durum dikkate alınarak, kitleden seçilen n hacimli örneğin tabakalara nasıl dağıtıldığı ve örnek ortalaması istatistiğinin varyansını nasıl etkilediği simülasyon çalışması ile incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal olmayan maliyet fonksiyonu, Optimum dağıtım, Tabakalı tesadüfi örnekleme.

1. GİRİŞ

Tabakalı tesadüfi örneklemede en önemli problem kitleden seçilen n hacimli örneğin, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak şekilde tabakalara dağıtılmasıdır. Bu dağıtım için bazı temel yöntemler verilmiştir. Tabaka büyüklükleri eşit olduğunda eşit dağıtım, tabaka büyüklükleri farklılık gösterdiğinde orantılı dağıtım, tabaka büyüklükleri ve tabaka varyansları birbirinden farklı ise Neyman dağıtımı, tabaka büyüklükleri ve tabaka varyanslarının farklı olmasının yanında her tabakadan birim seçme maliyeti ya da tabakadan tabakaya seyahat maliyeti farklılık gösteriyorsa en uygun dağıtım yöntemlerinin kullanılması önerilmektedir (Yamane, 1967). İyi bir dağıtım ile, minimum maliyete karşın maksimum duyarlılığın elde edilmesi kastedilmektedir.

Bazı durumlarda sabit bir bütçe ile alan çalışması yapmak gerekebilir. En uygun dağıtım yöntemi, n birimlik örneği belli bir maliyet fonksiyonu altında, varyansı minimum yapacak şekilde tabakalara dağıtım temeline dayanmaktadır. Örnek hacminin tabakalara dağıtımı için genellikle doğrusal maliyet kısıtı kullanılmaktadır. Doğrusal maliyet kısıtının kullanılmasının temelinde, tabakadan seçilecek bir birimin maliyet fonksiyonu üzerine etkisinin bir birim artış olarak dikkate alınması yatmaktadır. Bununla birlikte, her zaman her tabakadan bir birim seçmenin ya da her tabakaya seyahat etmenin, maliyet fonksiyonu üzerine etkisi bir birim artış olarak yansımayabilir. Göz önüne alınması gereken ek maliyetlerle tabakalardan bir birim

* S. Tuğba Şahin, Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Teknikokullar, Ankara, e-posta: sinemsahin@gazi.edu.tr

seçmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisi, bir birim artıştan fazla ya da bir birim seçmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisi, bir birim artıştan az olabilir. Bu gibi durumlarda, kitleden seçilen n hacimli örneği doğrusal maliyet kısıtı altında tabakalara dağıtmak uygun olmayacaktır. Tabakalardan seçilecek örnek hacimlerinin belirlenmesi, eşitlik kısıtlı bir optimizasyon problemidir ve çözüm için genellikle Lagrange çarpanları yöntemi kullanılır. Maliyet fonksiyonu doğrusal olduğunda, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak n_h değerlerinin belirlenmesi oldukça kolaydır. Bununla birlikte, maliyet fonksiyonları doğrusal olmadığında n_h değerlerinin belirlenmesi oldukça karmaşıktır. Bu çalışmada, doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak n_h değerlerinin belirlenmesi ile ilgilenilecektir. Literatürde önerilen ve bu çalışmada kullanılacak doğrusal olmayan maliyet fonksiyonları aşağıdaki yapıdadır:

c : Araştırma için ayrılan toplam bütçe
c_0 : Sabit bütçe
t_h : h. tabakaya seyahat maliyeti
c_h : h. tabakadan bir birim seçme maliyeti
n_h : h. tabakadan seçilecek örnek hacmi
α : Tabakalara seyahat etmenin ya da tabakalardan bir birim seçmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisi

olmak üzere;

1. $$c = c_0 + \sum_{h=1}^{L} t_h n_h^{\alpha} \ , \ \alpha > 0$$

biçimindedir (Cochran, 1977, Bretthauer vd., 1999). Tabakalardan bir birim seçme maliyeti çok farklı değil fakat tabakadan tabakaya seyahat maliyeti önemli derecede farklılık gösteriyorken, bu maliyet fonksiyonunun kullanılması uygun olur.

2. $$c = c_0 + \sum_{h=1}^{L} c_h n_h^{\alpha} \ , \ \alpha > 0$$

biçimindedir (Chernyak, 2001). Tabakadan tabakaya seyahat maliyeti önemli derecede farklı değil fakat tabakalardan bir birim seçme maliyeti farklılık gösteriyorken, bu maliyet fonksiyonunun kullanılması uygun olur.

3. $$c = c_0 + \sum_{h=1}^{L} t_h \ln(n_h)$$

biçimindedir (Chernyak, 2001). Tabakalardan bir birim seçme maliyeti çok farklı değil fakat tabakadan tabakaya seyahat maliyeti çok farklılık gösteriyorken, bu maliyet fonksiyonunun kullanılması uygun olur.

4. $$c = c_0 + \sum_{h=1}^{L} c_h \ln(n_h)$$

biçimindedir (Chernyak, 2001). Tabakadan tabakaya seyahat maliyeti önemli derecede farklı değil fakat tabakalardan bir birim seçme maliyeti çok farklılık gösteriyorken, bu maliyet fonksiyonunun kullanılması uygun olur.

Literatürde uzun yıllardır tabakalı tesadüfi örneklemede, örnek hacminin tabakalara dağıtımı problemiyle ilgili çalışmalar yapılmaktadır. Bununla birlikte, yapılan çalışmaların çoğu doğrusal maliyet kısıtı altında örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak örnek hacimlerinin bulunması üzerinedir (Bretthauer ve Shetty, 1995; Valliant ve Gentle, 1997; Bretthauer vd., 1999; Clark ve Steel, 2000; Chernyak, 2001; Bosch ve Wildner, 2003; Khan vd., 2003; Khan ve Ahsan, 2003; Semiz, 2004; Diaz-Garcia ve Garay-Tapia, 2005; Diaz-Garcia, 2006; Judez vd., 2006).

2. YÖNTEM

Bu bölümde, çalışmada kullanılan optimizasyon teknikleri tanıtılmış ve doğrusal olmayan maliyet kısıtları altında örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak örnek hacimleri simülasyon deneyi yardımı ile elde edilmiştir.

2.1 Optimizasyon Teknikleri

Amaç fonksiyonu ya da kısıtlardan herhangi birisi doğrusal değil ise bu problem doğrusal olmayan programlama problemidir. Ele alınan çalışmada, hem örnek ortalaması istatistiğinin varyansı, hem de maliyet fonksiyonları doğrusal değildir. Doğrusal olmayan problemlerin çözümünde kullanılan pek çok optimizasyon yöntemi bulunmaktadır (Hamdy, 1982; Rao, 1991; Bal, 1995). Örnek hacminin tabakalara dağıtımında Lagrange çarpanları yöntemi kullanıldığında bazı olumsuzluklarla karşılaşıldığından, bu çalışmanın simülasyon deneyinde Kuhn-Tucker yöntemi kullanılmıştır.

Lagrange çarpanları yöntemi, ister amaç ister kısıt fonksiyonu doğrusal olsun ya da olmasın eşitlik kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan en yaygın yöntemdir (Bal, 1995). Kuhn-Tucker yöntemi ise, eşitsizlik kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Kuhn-Tucker yöntemi eşitsizlik kısıtlarını, eşitlik kısıtı haline getirerek, genel Lagrange fonksiyonu oluşturma temeline dayanır (Bal, 1995).

Kısıt olarak doğrusal olmayan maliyet fonksiyonları kullanıldığında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak örnek hacminin Lagrange çarpanları yöntemiyle elde edilmesi aşağıdaki teoremlerde verilmiştir. Bununla birlikte, Lagrange çarpanları yöntemi eşitlik kısıtlı bir optimizasyon yöntemi olduğundan $n_h \leq N_h$ kısıtını göz önüne alamadığı için elde edilen çözümlerde $n_h > N_h$ ya da $n > N$ gibi sonuçlarla karşılaşmak mümkündür. Kuhn-Tucker yönteminde $n_h \leq N_h$ ($h=1, 2, \ldots, L$) eşitsizlik kısıtıda göz önüne alındığından bu olumsuzluk ortadan kalkmış olur. Bu sebeple, bu çalışmanın simülasyon kısmında Kuhn-Tucker yöntemi kullanılmıştır.

Teorem 1: $c = c_0 + \sum_{h=1}^{L} c_h n_h^{\alpha}$, $\alpha > 0$ olmak üzere, tabakalı tesadüfi örneklemede belirlenmiş bir maliyet için bir başka ifadeyle kısıt olarak maliyet fonksiyonu alındığında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansı minimumdur ve her tabakadan seçilmesi gereken örnek hacmi (1) eşitliğinden elde edilir.

$C = c' = c - c_0$: Araştırma için ayrılan bütçeden, sabit giderler çıkarıldıktan sonra geriye kalan bütçe

W_h : $h.$ tabakanın ağırlığı

S_h^2 : $h.$ tabakanın varyansı olmak üzere;

$$n = \frac{C^{1/\alpha} \sum_{h=1}^{L} \left(W_h^2 S_h^2 / c_h \right)^{1/(1+\alpha)}}{\left[\sum_{h=1}^{L} \left(W_h^2 S_h^2 c_h^{1/\alpha} \right)^{\alpha/(1+\alpha)} \right]^{1/\alpha}} \qquad (1)$$

Elde edilen n örnek hacmi, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak şekilde tabakalara;

$$n_h = \frac{\left(W_h^2 S_h^2 / c_h \right)^{1/(1+\alpha)}}{\sum_{h=1}^{L} \left(W_h^2 S_h^2 / c_h \right)^{1/(1+\alpha)}} \times n \qquad (2)$$

olarak dağıtılır (Chernyak, 2001).

Teorem 2: $c = c_0 + \sum_{h=1}^{L} c_h \ln(n_h)$ olmak üzere, tabakalı tesadüfi örneklemede belirlenmiş bir maliyet($C = c - c_0$) için bir başka ifadeyle kısıt olarak maliyet fonksiyonu alındığında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansı minimumdur ve her tabakadan seçilmesi gereken örnek hacmi (3) eşitliğinden elde edilir.

$$n = \exp\left\{ \frac{C - \sum_{h=1}^{L} c_h \ln\left(W_h^2 S_h^2 / c_h \right)}{\sum_{h=1}^{L} c_h} \right\} \times \sum_{h=1}^{L} W_h^2 S_h^2 / c_h \qquad (3)$$

Elde edilen n örnek hacmi, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak şekilde tabakalara;

$$n_h = \frac{W_h^2 S_h^2 / c_h}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 S_h^2 / c_h} \times n \qquad (4)$$

olarak dağıtılır (Chernyak, 2001).

2.2 Simülasyon Deneyi

Simülasyon çalışması MATLAB programı kullanılarak yapılmıştır.

2.2.1 $c'=\sum_{h=1}^{L} t_h \ln(n_h)$ ve $c'=\sum_{h=1}^{L} t_h n_h^{\alpha}$ Kısıtları Altında $V(\bar{x})$'ların Karşılaştırılması

Bu bölümde, $c'=\sum_{h=1}^{L} t_h \ln(n_h)$ ve $c'=\sum_{h=1}^{L} t_h n_h^{\alpha}$ kısıtları göz önüne alınarak oluşturulan modellerde hangi maliyet kısıtının, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını nasıl etkilediği, araştırma için ayrılan bütçenin ne kadarının kullanıldığı ve problemlerin çözülme süreleri incelenmiştir. Bu araştırma için 1000 tekrarlı Monte Carlo simülasyonu kullanılmıştır. Simülasyon çalışmasında kitle hacmi (N), kitleden seçilecek örnek hacmi (n), bütçe ($c' = c - c_0$), tabakadan tabakaya seyahat maliyeti (t_h) ve α başlangıçta verilmiştir. Her zaman her tabakadan bir birim seçmenin ya da her tabakaya seyahat etmenin, maliyet fonksiyonu üzerine etkisi bir birim artış olarak yansımamaktadır. α değeri, tabakalara seyahat ya da tabakalardan bir birim seçmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisini yansıtmaktadır. Bu bölümde, $\alpha > 0$ olmak üzere; α'ya bağlı maliyet kısıtına ilişkinde simülasyon deneyi yapılarak, α'nın hangi değerleri için yapılan örnek hacmi dağıtımının örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yaptığı da incelenmiştir. Belirlenen doğrusal olmayan maliyet kısıtları altında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması için kullanılan modeller aşağıdaki gibidir.

Model 1:

$$Min\ V(\bar{x})_1$$
$$\sum_{h=1}^{L} n_h = n$$
$$\sum_{h=1}^{L} t_h \ln(n_h) \le c'$$
$$r_h \le n_h \le k_h \quad h = 1, \ldots, L$$

Model 2:

$$Min\ V(\bar{x})_2$$
$$\sum_{h=1}^{L} n_h = n$$
$$\sum_{h=1}^{L} t_h n_h^{\alpha} \le c'$$
$$r_h \le n_h \le k_h \quad h = 1, \ldots, L$$

Bu çalışmada, modelde tabaka varyanslarının ve tabakalara dağıtılacak örnek hacminin önceden bilindiği varsayılmaktadır. Bununla birlikte kitle hacmi büyük olduğunda tabaka varyanslarının ve kitleden seçilecek örnek hacminin belirlenmesi zordur. Bunun için kitleden seçilen bir pilot örnek yardımı ile tabaka varyansları tahmin edilip, kitleden seçilecek örnek hacmi belirlenebilir (Hansen vd., 1953; Yamane, 1967; Bretthauer vd., 1999). Model kısıtlarında bulunan $r_h \le n_h \le k_h$ kısıtında alt sınır $r_h = 2$ alınmıştır. Bunun nedeni $s_h^2 = \frac{1}{n_h - 1}\sum_{i=1}^{n_h}\left(x_{hi} - \bar{x}_h\right)^2$ olması ve $n_h = 1$ durumunda s_h^2'nin belirsiz olmasıdır. Üst sınır için ise h. tabakadaki örnek hacminin alabileceği en büyük değer $k_h = N_h$ verilmiştir. Bundan sonraki işlemler aşağıdaki adımlara göre yapılmıştır.

Adım 1: Tabaka büyüklüklerinin belirlenmesi için Normal dağılımdan, N birimlik sayı üretilip, kullanılan Normal dağılımın ortalaması ve kaç tabaka olduğu dikkate alınarak belirlenen tabaka sınırları çerçevesinde tabaka büyüklükleri ve tabakalardaki birimler elde edilmiştir.

Adım 2: Belirlenen tabakadaki birimler yardımı ile tabaka varyansları hesaplanmıştır.

Adım 3: İki farklı maliyet kısıtı altında oluşturulan Model 1 ve Model 2'nin çözümleri yapılmış, varyans değerleri ve CPU time değerleri elde edilmiştir. Burada modellerin çözümü için gerekli olan başlangıç noktası, örnek hacmi için belirlenen alt ve üst sınır arasında ortalama bir değer olarak seçilmiştir.

Adım 4: Adım 1-2-3 1000 defa tekrar edilmiştir.

Adım 5: Sonuçların genellenebilmesi için 1000 tekrardaki varyans ve CPU time değerlerinin ortalaması alınarak, tabakalardan seçilecek optimum örnek hacimleri, varyans ve CPU time değerleri elde edilmiştir.

Simülasyon çalışması maliyetlerin farklı değerleri altında yapılmıştır. Simülasyon çalışması iki, üç, dört ve beş tabaka için yapılmış, sonuçlar dört tabaka için genellenebildiğinden daha fazla tabaka dikkate alınmamıştır. Sonuçlar Tablo 1- Tablo 10 arasında özetlenmiştir. Tablolarda yer alan n_{ih} gösterimi, i. modelden elde edilen h. tabakadaki örnek hacmini ve i. Kul. Bütçe ise i. modelden elde edilen optimum çözümler yerine yazıldığında araştırma için ayrılan toplam bütçenin ne kadarının kullanıldığını ifade etmektedir. Tablolarda koyu olarak gösterilen yerler ise, mümkün çözümün sağlanmadığı durumları ifade etmektedir.

Tablo 1. İki tabaka olması durumu $N = 500$, $n = 100$, $c' = 500$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 1$

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	50,3630	49,6370	50,3630	49,6370	1,1739	1,1739	94,2500	94,4844	7,8240	4,3734
0,4	50,2000	49,8000	50,2000	49,8000	1,1603	1,1603	92,0156	95,0313	7,8240	9,5635
0,5	50,0630	49,9370	50,0630	49,9370	1,1469	1,1469	91,8594	94,2969	7,8240	14,1421
0,6	50,0650	49,9350	50,0650	49,9350	1,1561	1,1561	91,8750	93,7813	7,8240	20,9128
0,8	50,3190	49,6810	50,3190	49,6810	1,1640	1,1640	92,3125	94,6406	7,8240	45,7304
1	50,4640	49,5360	50,4640	49,5360	1,1648	1,1648	92,6094	95,2188	7,8240	100
1,2	50,0300	49,9700	50,0300	49,9700	1,1599	1,1599	96,3438	97,2813	7,8240	218,6724
1,5	50,0400	49,9600	**39,6710**	**39,6360**	1,1520	1,5275	92,1563	95,8438	7,8240	499,4043
1,8	49,6090	50,3910	**21,3610**	**21,5810**	1,1777	3,1344	98,5781	98,6094	7,8240	499,3123
2	50,2090	49,7910	**15,8450**	**15,7740**	1,1677	4,3291	92,3281	103,2013	7,8240	499,8831

Tablo 2. İki tabaka olması durumu $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	49,9370	50,0630	49,9370	50,0630	1,1720	1,1720	92,3438	92,7969	199,5740	111,5499
0,4	50,1970	49,8030	50,1970	49,8030	1,1616	1,1616	90,8594	92,0781	199,3197	243,5002
0,5	49,9160	50,0840	49,9160	50,0840	1,1580	1,1580	89,0469	90,5938	199,5954	360,9154
0,6	50,5650	49,4350	50,5650	49,4350	1,1605	1,1605	91,0156	93,1094	198,9562	529,7941
0,8	50	50	59,0010	40,9990	1,1654	1,2199	92,9063	96	199,5132	**1001,5**
1	49,4820	50,5180	82	18	1,1812	2,2021	92,4688	99,0156	200,0118	982
1,2	49,6180	50,3820	**62,6420**	**10,8570**	1,1777	3,7888	92,5000	96,4688	199,8861	**1017,9**
1,5	50,0280	49,9720	**31,1210**	**6,4740**	1,1758	6,5564	90,7031	110,8281	199,4857	997,2363
1,8	49,8440	50,1560	**18,8400**	**4,9810**	1,1627	9,4628	92,5156	108,4844	199,6658	**1097,1**
2	50,1550	49,8450	**14,6730**	**4,0000**	1,1565	11,2856	91,2031	113,1250	199,3610	**1015,3**

Tablo 3. İki tabaka olması durumu $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 50$ ve $t_2 = 1$

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	50,3630	49,9370	50,3630	49,9370	1,1739	1,1739	96,4688	96,8281	199,8676	111,6780
0,4	50,2000	49,8000	50,2000	49,8000	1,1603	1,1603	92,5469	96,2500	199,7088	244,2443
0,5	50,0630	49,9370	50,0630	49,9370	1,1469	1,1469	92,2831	95,0781	199,5749	360,8427
0,6	50,0650	49,9350	50,0650	49,9350	1,1561	1,1561	92,6250	95,3750	199,5768	533,6757
0,8	50,3190	49,6810	41	59	1,1640	1,2210	90,5000	108,4063	199,8248	**1001,5**
1	50,4640	49,5360	18	82	1,1648	2,1679	93,8281	112,9219	199,9657	982
1,2	50,0300	49,9700	**10,8310**	**63,2780**	1,1599	3,6934	98,5625	103,2344	199,5426	**1017,2**
1,5	50,0400	49,9600	**6,4880**	**31,0560**	1,1520	6,4384	97,2969	101,7813	199,5524	999,3658
1,8	49,6090	50,3910	**4,9810**	**19,0560**	1,1777	9,4695	99,9063	104,0469	199,1284	**1101,2**
2	50,2090	49,7910	**4,0000**	**14,5670**	1,1677	11,4727	94,4844	113,7031	199,7175	**1012,2**

Tablo 4. İki tabaka olması durumu $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1500$, $t_1 = 25$ ve $t_2 = 35$

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	50,3630	49,6370	50,3630	49,6370	1,1739	1,1739	95,7188	96,4375	234,6472	131,1711
0,4	50,2000	49,8000	50,2000	49,8000	1,1603	1,1603	92,5938	95,2188	234,6809	286,8287
0,5	50,0630	49,9370	50,0630	49,9370	1,1469	1,1469	92,8594	94,7031	234,7087	424,2194
0,6	50,0650	49,9350	50,0650	49,9350	1,1561	1,1561	92,6094	94,8281	234,7083	627,3020
0,8	50,3190	49,6810	50,3190	49,6810	1,1640	1,1640	92,2500	96,9219	234,6564	1370,7
1	50,4640	49,5360	**27,7030**	**23,0460**	1,1648	2,5970	97,1563	106,0313	234,6260	1499,2
1,2	50,0300	49,9700	**15,9240**	**13,6540**	1,1599	4,6389	93,0625	100,5781	234,7154	1498,6
1,5	50,0400	49,9600	**9,2250**	**8,0330**	1,1520	8,0915	91,9844	103,8438	234,7134	1497,3
1,8	49,6090	50,3910	**6,3150**	**5,8250**	1,1777	11,9776	92,6406	106,0156	234,7977	**1524,5**
2	50,2090	49,7910	**5,1940**	**4,9190**	1,1677	14,2485	92,7656	106,9063	234,6791	**1521,3**

Tablo 5. Üç tabaka olması durumu $N=10000$, $n=500$, $c'=550$, $t_1=1$, $t_2=1$ ve $t_3=1$

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	186,5460	127,0060	186,4490	186,5460	127,0060	186,4490	13,8894	13,8894	107,6094	115,4375	15,3011	8,3256
0,4	186,6440	126,7940	186,5600	186,6440	126,7940	186,5600	13,9021	13,9021	106,3594	114,0469	15,3015	23,1337
0,5	186,2860	126,9890	186,7600	186,2860	126,9890	186,7600	13,8790	13,8790	105,9063	113,3281	15,3012	38,5836
0,6	186,1960	126,8870	186,9200	186,1960	126,8870	186,9200	13,8953	13,8953	104,9844	115,3281	15,3008	64,3637
0,8	186,3820	127,0230	186,6150	186,3820	127,0230	186,6150	13,8931	13,8931	105,8750	114,6094	15,3012	179,2967
1	186,7010	126,9830	186,3440	186,7010	126,9830	186,3440	13,8871	13,8871	106,3906	113,0469	15,3012	500
1,2	186,5460	127,0060	186,4490	**85,1090**	**60,0120**	**85,0800**	13,8894	31,0984	103,0156	110,6875	15,3011	**550,0242**
1,5	186,6440	126,7940	186,5600	**35,2420**	**25,8930**	**35,2280**	13,9021	75,5283	101,9375	108,7188	15,3005	**550,0604**
1,8	186,6570	126,9600	186,3600	**19,5890**	**14,9600**	**19,5370**	13,9029	135,7264	101,0156	108,5000	15,3008	**552,5732**
2	186,6550	126,7820	186,5790	**14,6180**	**11,0410**	**14,6220**	13,8988	181,7803	101,6563	111,7969	15,3006	549,3925

Tablo 6. Üç tabaka olması durumu $N=10000$, $n=500$, $c'=5000$, $t_1=15$, $t_2=75$ ve $t_3=50$

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	186,5450	127,0060	186,4490	186,5450	127,0060	186,4490	13,8894	13,8894	102,0781	110,3438	703,1556	382,5599
0,4	186,6440	126,7940	186,5600	186,6440	126,7940	186,5600	13,9021	13,9021	100,5313	108,2500	703,0680	1046,7
0,5	186,6980	127,0310	186,2950	186,6980	127,0310	186,2950	13,8839	13,8839	102,4512	106,1094	703,1412	1732,7
0,6	187,0180	126,8370	186,1330	187,0180	126,8370	186,1330	13,9213	13,9213	91,0221	99,0313	703,0088	2867,5
0,8	186,1960	126,8870	186,9200	**206,0660**	**55,0040**	**105,9530**	13,8953	22,4292	103,5469	133,8125	703,1833	**5000,5**
1	186,3820	127,0230	186,6150	**76,6070**	**23,3190**	**42,0140**	13,8931	57,1487	99,7969	117,0156	703,1970	4998,7
1,2	186,7010	126,9830	186,3440	**39,1470**	**13,1250**	**22,6180**	13,8871	106,0763	106,9063	112,8750	703,1263	4980,2
1,5	186,3340	126,8900	186,7890	**19,7020**	**7,8140**	**12,0280**	13,8912	197,4272	104,2031	105,6094	703,1611	**5035,7**
1,8	186,7360	126,8540	186,3740	**12,1950**	**5,0000**	**8,0000**	13,9086	299,2560	104,6406	113,8438	703,0610	4822,9
2	186,3810	126,8910	186,7240	**9,9520**	**4,0330**	**6,6120**	13,8840	368,1473	100,0313	120,8125	703,1481	4891,4

Tablo 7. Dört tabaka olması durumu $N=10000$, $n=2000$, $c'=1000$, $t_1=1$, $t_2=1$, $t_3=1$ ve $t_4=1$

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	734,6620	265,9080	266,4560	732,9460	734,6620	265,9080	266,4560	732,9460	1,8033	1,8033	104,1563	111,7969	24,3648	13,5946
0,4	733,8060	266,0760	266,5110	733,5850	733,8060	266,0760	266,5110	733,5850	1,8031	1,8031	104,5156	115,1250	24,3654	46,6763
0,5	731,4390	266,3930	267,3550	734,8250	731,4390	266,3930	267,3550	734,8250	1,8010	1,8010	101,1094	111,1543	24,3681	86,8253
0,6	733,2090	266,3770	266,3230	734,0870	733,2090	266,3770	266,3230	734,0870	1,8048	1,8048	104,2344	114,6250	24,3657	161,8467
0,8	732,2990	266,2620	267,1280	734,3090	732,2990	266,2620	267,1280	734,3090	1,8020	1,8020	101,3128	112,3048	24,3673	566,4926
1	733,6430	266,0110	267,0500	733,3050	**325,2410**	**174,7210**	**174,9070**	**325,1120**	1,7996	3,9576	95,5000	115,5781	24,3666	999,9810
1,2	729,6830	267,1610	266,8520	736,2820	**125,6260**	**71,7640**	**71,7200**	**126,2900**	1,8019	10,8237	100,8906	138,1406	24,3688	999,9309
1,5	730,9580	266,3950	266,2990	736,3470	**48,5340**	**29,5870**	**29,5890**	**48,7080**	1,8004	28,2064	102,8750	112,5625	24,3657	999,9442
1,8	733,4450	266,9660	266,1480	733,4540	**25,6970**	**16,5090**	**16,4830**	**25,7080**	1,8010	52,9544	102,1406	110,8594	24,3667	**1000,9**
2	731,4930	267,0650	266,7760	734,6510	**18,6860**	**12,2100**	**12,2030**	**18,7240**	1,7995	72,3973	103,5156	104,2188	24,3684	997,7521

Tablo 8. Dört tabaka olması durumu $N=10000$, $n=2000$, $c'=10000$, $t_1=75$, $t_2=80$, $t_3=65$ ve $t_4=90$

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	736,3190	266,6310	266,8390	730,1810	736,3190	266,6310	266,8390	730,1810	1,8008	1,8008	118,0469	129,6563	1898,5	1060,5
0,4	732,5030	266,2610	266,9820	734,2270	732,5030	266,2610	266,9820	734,2270	1,8049	1,8049	118,6563	130,1406	1898,6	3664,4
0,5	730,9740	267,8410	266,0630	735,1490	730,9740	267,8410	266,0630	735,1490	1,7980	1,7980	117,4321	128,1680	1898,7	6837,5
0,6	733,6580	266,2380	267,1600	732,9820	**447,0330**	**205,5350**	**235,8910**	**426,2130**	1,7999	2,8969	131,4219	163,0938	1898,6	**10001**
0,8	735,2740	266,1030	266,3980	732,2580	**104,5720**	**50,4880**	**56,7730**	**94,2600**	1,8016	14,1587	142,2969	187,9375	1898,4	**10001**
1	736,9780	266,3710	266,1370	730,4870	**42,4210**	**22,0570**	**24,4110**	**38,5350**	1,8045	34,8088	130,9219	138,8750	1898,4	**10001**
1,2	734,3160	266,6700	266,3120	732,6820	**23,0830**	**12,8290**	**13,9980**	**21,2110**	1,8040	62,9522	133	148,2344	1898,5	**10012**
1,5	734,5230	266,1310	265,6360	733,7180	**12,5300**	**7,2690**	**8,0020**	**11,7520**	1,8044	113,6566	136,4844	140,5313	1898,3	9991,5
1,8	735,0850	265,4700	266,2340	733,1950	**8,0690**	**5,0000**	**5,8720**	**7,9940**	1,8048	168,5614	101,1250	115,3281	1898,3	**10034**
2	734,7510	266,9310	267,1540	731,1570	**6,9920**	**4,0290**	**4,9940**	**6,0510**	1,7984	204,4272	128,9531	146	1898,6	9881,6

Tablo 9. Beş tabaka olması durumu $N = 12000$, $n = 3000$, $c' = 10000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 1$ ve $t_5 = 1$

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	n_{25}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	801,1160	237,8970	457,9500	700,4690	802,5070	801,1160	237,8970	457,9500	700,4690	802,5070	1,6389	1,6389	128,4063	138,1875	31,5241	17,7182
0,4	801,5010	237,8610	459,4280	700,8340	800,3640	801,5010	237,8610	459,4280	700,8340	800,3640	1,6377	1,6377	126,8906	138,5469	31,5255	63,2877
0,5	801,1000	238,0790	458,1730	702,6940	799,9360	801,1000	238,0790	458,1730	702,6940	799,9360	1,6352	1,6352	126,5156	137,1719	31,5253	119,9300
0,6	804,3730	237,6020	458,8380	701,0330	798,1500	804,3730	237,6020	458,8380	701,0330	798,1500	1,6368	1,6368	123,0156	134,5781	31,5242	227,6424
0,8	803,1290	237,1700	458,5760	701,6080	799,5120	803,1290	237,1700	458,5760	701,6080	799,5120	1,6373	1,6373	131,9531	145,3125	31,5228	824,0469
1	799,7370	237,9840	459,0290	702,7100	800,5340	799,7370	237,9840	459,0290	702,7100	800,5340	1,6362	1,6362	132,3281	143,0781	31,5258	3000
1,2	801,5740	237,6820	458,0160	701,4630	801,2520	**712,2130**	**219,7880**	**493,4960**	**643,0620**	**712,1830**	1,6367	1,8228	126,7344	191,7031	31,5238	9994,3
1,5	801,5320	238,2760	458,9450	699,9500	801,3040	**191,3360**	**73,5740**	**143,1050**	**177,3550**	**191,3240**	1,6358	8,2653	132,7969	183,6250	31,5261	9998
1,8	801,4120	237,7730	458,7060	699,6910	802,4330	**80,1930**	**34,1640**	**61,8270**	**75,3460**	**80,2360**	1,6400	20,4113	132,8750	155,2031	31,5244	9997,2
2	801,2420	237,8470	458,6550	701,6660	800,6120	**51,8990**	**23,3900**	**40,7140**	**49,0570**	**51,8710**	1,6372	31,6146	132,3438	135,0469	31,5249	9995,4

Tablo 10. Beş tabaka olması durumu $N = 12000$, $n = 3000$, $c' = 25000$, $t_1 = 40$, $t_2 = 50$, $t_3 = 30$, $t_4 = 45$ ve $t_5 = 60$

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	n_{25}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0,2	801,0610	238,0080	458,4530	702,4570	800,0170	801,0610	238,0080	458,4530	702,4570	800,0170	1,6362	1,6362	132,8594	144,5000	1420,9	799,2649
0,4	801,9430	238,4310	459,1970	702,3660	798,0370	801,9430	238,4310	459,1970	702,3660	798,0370	1,6342	1,6342	132,8438	143,4688	1420,9	2863,3
0,5	799,5520	238,0970	460,4520	701,9960	799,8810	799,5520	238,0970	460,4520	701,9960	799,8810	1,6339	1,6339	132,4515	145,1571	1420,9	5435,5
0,6	802,3910	237,9440	458,6230	700,2310	800,8220	802,3910	237,9440	458,6230	700,2310	800,8220	1,6366	1,6366	133,9219	143,5000	1420,9	10336
0,8	811,2830	237,6450	456,5170	697,8410	796,6690	**511,3880**	**119,8740**	**403,2700**	**433,8070**	**410,0150**	1,6425	3,0752	132,3125	196,0938	1420,7	**25000,2**
1	803,0120	238,0120	459,2530	700,4850	799,2040	**150,9310**	**40,9740**	**121,0600**	**131,2320**	**122,9620**	1,6362	11,6874	131,9219	153,2656	1420,9	**25001**
1,2	801,3360	237,5270	459,1040	700,7820	801,2410	**66,6160**	**20,2960**	**54,4930**	**58,3930**	**55,3510**	1,6362	26,8085	132,2500	172,9219	1420,9	24999
1,5	801,7120	237,8420	458,9440	700,3260	801,1970	**29,2090**	**10,1650**	**24,4820**	**26,0150**	**24,8270**	1,6383	60,5735	134,1875	153,5625	1420,9	24962
1,8	800,1830	237,9560	459,5050	704,4500	797,9020	**16,8500**	**6,8250**	**14,2760**	**15,0760**	**14,5080**	1,6323	103,4399	133,5625	148,0156	1420,9	24976
2	802,4740	237,8370	458,0980	700,8240	800,7540	**12,8600**	**5,0500**	**11,0000**	**11,6840**	**11,0160**	1,6362	135,8243	134,1563	141	1420,9	24945

Simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçlardan görüldüğü gibi Tablo 1 için yapılan genellemeler, diğer Tablolar için de geçerlidir. $c'=\sum_{h=1}^{L} t_h n_h^{\alpha}$ kısıtının kullanıldığı Model 2'de α değeri büyüdükçe elde edilen mümkün çözümlerin sayısı azalmakta veya $\sum n_h = n$ kısıtı ya da maliyet kısıtı sağlanmamaktadır. Ayrıca, araştırma için ayrılan bütçe çok fazla değilken, α'nın büyük durumları çözüm vermemektedir. α büyük iken mümkün çözüm elde etmek için maliyet kısıtının sağ taraf sabiti, araştırma için ayrılan bütçe miktarı arttırılmalıdır. Tablolardan görüldüğü gibi mümkün çözümleri sağlayan α değerleri içinde örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapan $\alpha = 0.5$'tir. $c'=\sum_{h=1}^{L} t_h \ln(n_h)$ kısıtının kullanıldığı Model 1, çözüm olan α değerleri için Model 2 ile aynı sonuçları vermektedir. Ayrıca, 1. maliyet kısıtı, 2. maliyet kısıtı ile mümkün olmayan çözümleri de sağlamaktadır. α'nın küçük olduğu durumlar için 2. maliyet kısıtı bütçenin daha azını kullanmakla birlikte, α büyüdükçe 2. maliyet kısıtı neredeyse sağlanmamaktadır. 1. maliyet kısıtı ise, tabakalara seyahat maliyetinden etkilenmemekte ve bütçe kısıtını sağlayarak, araştırma için ayrılan bütçenin çok azını kullanmaktadır. Ayrıca, Model 1 kullanıldığında elde edilen çözümler, Model 2 kullanıldığı duruma göre daha kısa sürede tamamlanmaktadır. Kuhn-Tucker algoritması ile 1. maliyet kısıtı kullanıldığında, 2. maliyet kısıtına göre daha fazla mümkün çözüm elde edildiği, araştırma için ayrılan bütçenin daha azı kullanıldığı ve çözümler daha kısa sürede elde edildiği için örnek ortalaması istatistiğinin varyansı minimum yapılırken $c'=\sum_{h=1}^{L} t_h \ln(n_h)$ kısıtının kullanılması daha avantajlı olacaktır. Çünkü bu kısıt, α'ya bağlı değildir ve tabakalara seyahat maliyetinden $c'=\sum_{h=1}^{L} t_h n_h^{\alpha}$ kısıtı kadar etkilenmemektedir. Tablolardan görüldüğü gibi, Model 2'nin mümkün çözümlerini sağlayan α değerleri için, $c'=\sum_{h=1}^{L} t_h \ln(n_h)$ ve $c'=\sum_{h=1}^{L} t_h n_h^{\alpha}$ maliyet kısıtları altında oluşturulan Model 1 ve Model 2'den elde edilen çözümler büyük çoğunlukla aynıdır. Bu durumun neden böyle olduğu aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek: Kitle iki tabakadan oluşsun. 1. tabakada 11, 2. tabakada 9 birim olduğu ve yapılan bir pilot çalışmayla 1. tabakanın varyansının 81659, 2. tabakanın varyansının 60942 olarak tahmin edildiği varsayılsın. 1. ve 2. tabakaya seyahat maliyetlerinin 1 TL. olduğu düşünülürse, araştırma için 10 TL. ayrılmışken, 5 hacmindeki örnek $c'=\sum_{h=1}^{L} t_h \ln(n_h)$ ve $c'=\sum_{h=1}^{L} t_h n_h^{\alpha}$ maliyet kısıtları altında tabakalara dağıtılsın. $\alpha = 1$ durumu için Kuhn-Tucker algoritması kullanılsın.

$N = 20$, $N_1 = 11$, $N_2 = 9$, $n = 5$, $c' = 10$, $t_1 = t_2 = 1$, $s_1^2 = 81659$, $s_2^2 = 60942$ ve $\alpha = 1$ olmak üzere örnek ortalaması istatistiğinin varyansı;

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h}\frac{s_h^2}{n_h} = \frac{1}{N^2}\left[\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h^2 s_h^2}{n_h} - \underbrace{\sum_{h=1}^{L} N_h s_h^2}_{\text{sabit}}\right]$$

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{20^2}\left[\frac{11^2(81659)}{n_1} + \frac{9^2(60942)}{n_2} - \text{sabit}\right]$$

$$V(\bar{x}) = \frac{24701,8475}{n_1} + \frac{12340,755}{n_2} - sabit$$

Model 1: $c' = \sum_{h=1}^{L} t_h \ln(n_h)$ kısıtı altında örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması (Kolaylık olması açısından problem maksimum problemine dönüştürülmüştür) .

$$\max(V(\bar{x})) = \max\left[-\frac{24701,8475}{n_1} - \frac{12340,755}{n_2} + sabit\right]$$

$$\begin{array}{ll} n_1 + n_2 = 5 & \Rightarrow\ n_1 + n_2 = 5 \\ 1\times\ln(n_1) + 1\times\ln(n_2) \le 10 & \Rightarrow\ \ln(n_1) + \ln(n_2) + s_1^2 = 10 \\ n_1 \le 11 & \Rightarrow\ n_1 + s_2^2 = 11 \\ n_2 \le 9 & \Rightarrow\ n_2 + s_3^2 = 9 \end{array}$$

Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} L(n_1, n_2, \lambda, s) = &-\frac{24701,8475}{n_1} - \frac{12340,755}{n_2} + sabit - \lambda_1(n_1 + n_2 - 5) \\ &- \lambda_2(\ln(n_1) + \ln(n_2) + s_1^2 - 10) - \lambda_3(n_1 + s_2^2 - 11) \\ &- \lambda_4(n_2 + s_3^2 - 9) \end{aligned}$$

Lagrange fonksiyonunda λ_1 serbest, λ_2, λ_3, $\lambda_4 \ge 0$'dır. Lagrange fonksiyonunun, n_1, n_2, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, s_1, s_2 ve s_3'e göre türevi alınıp, sıfıra eşitlendikten sonra Kuhn-Tucker algoritmasında mümkün çözümler aranırken Lagrange çarpanları λ_i'lerin farklı değerleri incelenir.

* $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ olsun.

$$\frac{24701,8475}{n_1^2} - \lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow n_1 = \frac{157,168214}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$\frac{12340,755}{n_2^2} - \lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow n_2 = \frac{111,0889508}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$n_1 + n_2 = 5 \quad \Rightarrow \frac{157,168214}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{111,0889508}{\sqrt{\lambda_1}} = 5$$

$$\sqrt{\lambda_1} = 53,65143297 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 2878,47$$

$$n_1 = 2,929431803 \cong 3$$

$$n_2 = 2,070568197 \cong 2$$

Buradan, Model 1'in mümkün çözümü

$(2,929431803 \cong 3;\ 2,070568197 \cong 2;\ 2878,47;\ 0;\ 0;\ 0)$ olarak elde edilir.

Model 2: $c' = \sum_{h=1}^{L} t_h n_h^{\alpha}$ kısıtı altında örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması ($\alpha = 1$).

$$\max(V(\bar{x})) = \max\left[-\frac{24701,8475}{n_1} - \frac{12340,755}{n_2} + sabit \right]$$

$$\begin{aligned}
&n_1 + n_2 = 5 && \Rightarrow n_1 + n_2 = 5 \\
&1\times n_1^1 + 1\times n_2^1 \le 10 && \Rightarrow n_1 + n_2 + s_1^2 = 10 \\
&n_1 \le 11 && \Rightarrow n_1 + s_2^2 = 11 \\
&n_2 \le 9 && \Rightarrow n_2 + s_3^2 = 9
\end{aligned}$$

Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
L(n_1, n_2, \lambda, s) = &-\frac{24701,8475}{n_1} - \frac{12340,755}{n_2} + sabit - \lambda_1(n_1 + n_2 - 5) \\
&-\lambda_2(n_1 + n_2 + s_1^2 - 10) - \lambda_3(n_1 + s_2^2 - 11) \\
&-\lambda_4(n_2 + s_3^2 - 9)
\end{aligned}$$

Model 1'de olduğu gibi, Model 2'de de Lagrange fonksiyonunda λ_1 serbest, λ_2, λ_3, $\lambda_4 \ge 0$'dır. Model 2 için oluşturulan Lagrange fonksiyonunun, n_1, n_2, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, s_1, s_2 ve s_3'e göre türevi alınıp, sıfıra eşitlendikten sonra Kuhn-Tucker algoritmasında mümkün çözümler aranırken Lagrange çarpanları λ_i'lerin farklı değerleri incelenir.

* $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ olsun.

$$\frac{24701,8475}{n_1^2} - \lambda_1 = 0 \qquad \Rightarrow n_1 = \frac{157,168214}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$\frac{12340,755}{n_2^2} - \lambda_1 = 0 \qquad \Rightarrow n_2 = \frac{111,0889508}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$n_1 + n_2 = 5 \qquad \Rightarrow \frac{157,168214}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{111,0889508}{\sqrt{\lambda_1}} = 5$$

$$\sqrt{\lambda_1} = 53,65143297 \qquad \Rightarrow \lambda_1 = 2878,47$$

$$n_1 = 2,929431803 \cong 3$$

$$n_2 = 2,070568197 \cong 2$$

Buradan, problemin mümkün çözümü

$(2,929431803 \cong 3;\ 2,070568197 \cong 2;\ 2878,47;\ 0;\ 0;\ 0)$ olarak elde edilir.

Görüldüğü gibi, her iki modelde de aynı sonuçlar elde edilmiştir. Bunun nedeni, her iki modelde de maliyet kısıtlarına karşı gelen Lagrange çarpanı λ_2'nin 0 olmasıdır. Maliyet kısıtlarına karşı gelen $\lambda_2 = 0$ olduğu durumlarda Kuhn-Tucker algoritması ile her iki maliyet kısıtı kullanılarak aynı mümkün çözümler elde edilir. Bununla birlikte, mümkün çözümü sağlayan Lagrange çarpanlarında, maliyet kısıtlarına karşı gelen çarpan λ_2, 0'dan farklı olduğunda her iki modelden elde edilecek çözümler birbirinden farklı olacaktır. Bu durum Tablo 2'nin 6. ve Tablo 3'ün 6. satırlarında $\alpha = 1$ olduğu durumda görülmektedir. Maliyet kısıtlarına karşı gelen Lagrange çarpanları farklı olduğu için, Tablo 2 ve Tablo 3'ün 6. satırlarında, Model 1 ve Model 2'den elde edilen çözümler ve örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri oldukça farklı bulunmuştur. Ayrıca, λ_2, 0'dan farklı olduğunda elde edilen çözümlerde $V(\bar{x})_1 < V(\bar{x})_2$ olduğu görülmektedir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, tabakalı tesadüfi örneklemede doğrusal olmayan maliyet fonksiyonları altında kitleden seçilen n hacimli örneğin, optimum şekilde tabakalara dağıtılması ve örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması ile ilgilenilmiştir. Bu amaçla ele alınan iki farklı doğrusal olmayan maliyet fonksiyonundan $c = c_0 + \sum_{h=1}^{L} c_h \ln(n_h)$ biçiminde ifade edilen maliyet fonksiyonu, $c = c_0 + \sum_{h=1}^{L} t_h n_h^{\alpha} \quad \alpha > 0$ şeklinde ifade edilen maliyet fonksiyonuna göre daha fazla mümkün çözüm vermekte, bütçe kısıtlarından çok fazla etkilenmemekte, çözümler daha kısa sürede tamamlanmakta, örnek hacmini tabakalara daha optimum şekilde dağıtmakta ve mümkün çözümler içinde örnek ortalaması istatistiğinin varyansını ya aynı ya da daha küçük olarak elde etmektedir. Elde edilen simülasyon deneyi sonuçlarından, örnek hacmini tabakalara optimum şekilde dağıtan ve örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapan doğrusal olmayan maliyet kısıtının $c = c_0 + \sum_{h=1}^{L} t_h \ln(n_h)$ olduğu görülmüştür.

5. KAYNAKLAR

Bal, H., 1995. Optimizasyon teknikleri. Gazi Üniversitesi, Ankara.

Bosch, V., Wildner, R., 2003. Optimum allocation of stratified random samples designed for multiple mean estimates and multiple observed variables. Communications in Statistics, Vol. 32, No. 10, 1897-1909.

Bretthauer, K. M., Ross, A., Shetty, B., 1999. Non-linear integer programming for optimal allocation in stratified sampling. European Journal of Operational Research, 116, 667-680.

Bretthauer, K. M., Shetty, B., 1995. The non-linear resource allocation problem. Operations Research, Vol. 43, No. 4, 670-683.

Chernyak, A., 2001. Optimal allocation in stratified and double random sampling with a non-linear cost function. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 103, No. 4, 525-528.

Clark, R. G., Steel, D. G., 2000. Optimum allocation of sample to strata and stages with simple additional constraints. The Statistician, 49, Part 2, 197-207.

Cochran, W.G., 1977. Sampling techniques 3rd Ed.. John Wiley and Sons Inc., New York.

Diaz-Garcia, J. A., 2006. Optimum allocation in multivariate stratified sampling: Multi-objective programming. I-06-07(PE), 1-22.

Diaz-Garcia, J. A., Garay-Tapia M. M., 2005. Optimum allocation in stratified surveys. I-05-14(PE), 1-16.

Hamdy, A. T., 1982. Yöneylem araştırması 6. Basım. Baray, Ş. A. ve Esnaf, Ş., Literatür Yayıncılık, İstanbul.

Hansen, M. H., Hurwitz, W. N., Madow, W. G., 1953. Sample survey methods and theory. Wiley, New York.

Judez, L., Chaya, C., Miguel, J. M., Bru, R., 2006. Stratification and sample size of data sources for agricultural mathematical programming models. Mathematical and Computer Modelling, Vol. 43, 530-535.

Khan, M. G. M., Ahsan, M. J., 2003. A note on optimum allocation in multivariate stratified sampling. S. Pac. J. Nat. Sci., Vol. 21, 91-95.

Khan, M. G. M., Khan, E. A., Ahsan, M. J., 2003. An optimal multivariate stratified sampling design using dynamic programming. Australian&New Zeland Journal of Statistics, 45(1), 107-113.

Rao, S. S., 1991. Optimization: Theory and applications. Wiley Eastern, New Delhi.

Semiz, M., 2004. Determination of compromise integer strata sample sizes using goal programming. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Vol. 33, 91-96.

Valliant, R., Gentle, J. E., 1997. An application of mathematical programming to sample allocation. Computational Statistics & Data Analysis, Vol. 25, 337-360.

Yamane, T., 1967. Elementary sampling theory. Prentice Hall, USA.

THE ALLOCATION OF SAMPLE SIZE INTO STRATA IN STRATIFIED RANDOM SAMPLING UNDER NON-LINEAR COST CONSTRAINTS

ABSTRACT

In this study, optimum allocation of n sized sample, which is selected from a population by Stratified Random Sampling under fixed budget, is examined. While doing this allocation, two different non-linear cost functions are used. Besides the situations, in which the variance of sample mean statistics is minimum under two different non-linear cost constraints are examined. The allocation of sample size into strata is harder and more time consuming when non-linear cost constraints rather than linear cost constraints are used. In this study, by taking into consideration of the situations in which neither objective function nor cost constraints are linear, the allocation of n sized sample that is selected from a population and its effect on the variance of sample mean statistics are examined by a simulation study.

Keywords: Non-linear cost function, Optimum allocation, Stratified random sampling.