Volume: 07 Number: 01 Category: 02 Page: 55-69 ISSN No: 1303-6319 Cilt: 07 Sayı: 01 Kategori: 02 Sayfa: 55-69

DEĞİŞİM KATSAYILARININ EŞİTLİĞİNE İLİŞKİN TESTLERİN I. TİP HATA VE GÜÇ BAKIMINDAN KARŞILAŞTIRILMASI

Nihan POTAS* **Hamza GAMGAM****

ÖZET

Bu çalışmada değişim katsayılarının eşitliğine ilişkin hipotezler için bazı test istatistikleri tanıtılmış ve karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar için bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyon çalışması her biri normal dağılımlı farklı yığın sayıları ($k = 2$, 4 ve 6), farklı örnek hacimleri (n=10, 30, 50 ve 100) ve farklı I. tip hata düzeyleri (α=0,01 ve 0,05) için tasarlanmıştır. Simülasyon çalışmasında değişim katsayılarının eşitliği hipotezini test etmede kullanılan bazı test istatistiklerinin, I. tip hata ve testin gücü bakımından karşılaştırması yapılmış ve özellikle, testin gücüne ilişkin sonuçların istatistik kuramıyla uyum sağladığı görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Bennett testi, Değişim katsayısı, Karesel rank testi, Olabilirlik oran testi, Wald testi.

1. GİRİŞ

Ortalama birim başına düşen standart sapmaya değişim katsayısı denir. Bir başka deyişle değişim katsayısı, standart sapmanın ortalamaya göre ne kadar değişim gösterdiğini belirtir. Bu nedenle göreli değişkenliğin bir ölçüsüdür. İlgilenilen yığınların ortalama ve varyansları farklı olsa bile, aynı göreli değişkenliğe sahip olabilirler.

Değişim katsayısı klimatoloji, mühendislik, psikiyatri, biyoloji, fizik, finans, sağlık gibi birçok alanda önemli bir kavramdır. Örneğin, finans alanında değişim katsayıları göreli riski hesaplamada kolaylık sağlamaktadır. İki hisse senedi değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi ile bu hisse senetlerinin aynı riske sahip olup olmadığı çok rahat belirlenebilir (Miller, 1991a).

Değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi için bir başka örnek psikiyatri alanından verilebilir. Paranoit sizofrenler, Paranoit olmayan sizofrenler ve bir de kontrol grubu olacak şekilde üç grup olduğu varsayılsın. Hastaların verilen görevlere karşı gösterdikleri tepki zamanlarıyla ilgili ortalama ve varyansların oldukça farklı, fakat göreli değişkenliklerinin aynı olduğu düşünülsün. Böyle bir durumda bağımlı değişkene uygulanacak bir dönüşüm ile grupların varyanslarının homojenliği sağlanıp, ortalamaların eşitliği hipotezi test edilebilir. Ancak bazen uygulanacak dönüşüm ile varyanslar homojen hale getirilemeyebilir. İşte bu durumlarda göreli değişkenliğin karşılaştırılması önemlidir ve değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testini kullanmak doğru bir yaklaşımdır (Shafer ve Sullivan, 1986).

*Gazi Üniversitesi, Ticaret ve Turizm Eğitim Fakültesi, Bilgisayar Uygulamaları Eğitimi Bölümü, Ankara, e-posta: nihanp@gazi.edu.tr
** Gazi Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara, e-posta: gamgam@gazi.edu.tr

Bennett (1976), k sayıda normal dağılımlı yığınların değişim katsayılarının eşitliği hipotezi için Bennett Testini önermiştir. Bu çalışmada, McKay (1932) tarafından önerilen örnek değişim katsayısının dağılımı yaklaşımı kullanılmıştır .

Daha sonra Bennett (1977) k sayıda normal dağılımlı yığınlar için Olabilirlik Oran Testini önermiştir. Bu test istatistiği Miller ve Karson (1977) tarafından önerilen Olabilirlik Oran Test istatistiğinin benzeridir (Shafer ve Sullivan, 1986).

Normal dağılımlı yığınlarda değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi için Doornbos ve Dijkstra (1983), Bennett (1977) tarafından önerilen Olabilirlik Oran Testi ve Merkezi Olmayan t Testini simülasyon yöntemi kullanarak karşılaştırmıştır. Ancak, Olabilirlik Oran Testi iki örnekten fazlası için cebirsel olarak çözümü olmayan denklemler içermektedir. Nairy ve Rao (2003), Lehmann ve Casella (1998) tarafından önerilen ikinci derece tahmin edicileri kullanarak bu denklemler için önerilerde bulunmuşlardır.

Genelde örneklerin geldiği yığınların dağılımlarının normal olduğuna dayanan değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi için test istatistikleri önerilmiştir. Ancak, Conover ve Iman (1978) tarafından geliştirilen Karesel Rank Testini, Miller (1991b) ham veri kümesine uygulanan basit bir dönüşüm ile k sayıda normal dağılım göstermeyen yığınların değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi için kullanmıştır.

Normal dağılımlı iki yığının değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi için Rao ve Vidya (1992) Wald Testini geliştirmişlerdir .

İzleyen bölümde değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi için Bennett Testi, Wald Testi, Olabilirlik Oran Testi ve Karesel Rank Testi tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde bu test istaistiklerini I. tip hata ve testin gücü bakımından karşılaştırmak için yapılan simülasyon çalışmasına yer verilmiştir. Son bölümde de sonuç ve öneriler üzerinde durulmaktadır.

2. YÖNTEM

Bu bölümde değişim katsayılarının eşitliği hipotezini test etmede kullanılan; Bennett, Wald, Olabilirlik Oran ve Karesel Rank Testleri tanıtılmıştır.

Her biri n_i, $i=1,2,...,k$, hacimli k sayıda bağımsız örnekler $X_{i1}, X_{i2},..., X_{in_i}$ olsun. Bu örneklerin μ_i ortalamalı ve σ_i^2 varyanslı normal dağılımlardan geldiği varsayılsın. $E(X_{ij}) = \mu_i$ ve $Var(X_{ij}) = \sigma_i^2$ $j=1,2,...,n_i$ biçiminde gösterelim.

Yığın için değişim katsayısı

$$R_i = \sigma_i / \mu_i \tag{1}$$

ve örnek için değişim katsayısı

$$r_i = s_i / \overline{x}_i \tag{2}$$

olarak tanımlanır. Burada s_i ve $\overline{x}_i$ sırasıyla örnek standart sapması ve örnek ortalamasıdır.

$H_0 : R_i = R$ **,** $i = 1, 2, ..., k$, (3)

hipotezi

$H_1 : R_i \neq R_j$, $i \neq j$ en az bir (i, j) çifti için,

hipotezine karşı test edilmek istenmektedir. İzleyen bölümde değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testi için önerilen test istatistiklerinden bazıları verilmiştir.

2.1 Bennett Testi (BT)

Bennett (1976), Pitmann (1939) tarafından önerilen hipotez testi yöntemine, McKay'ın yaklaşımını uygulayarak BT'yi önermiştir. McKay (1932)'ın yaklaşımı örnek varyansının serbestlik derecesinin *n* olarak alınmasına yöneliktir (Bennett, 1976).
BT için örnek ortalaması ve örnek varyansı, sırasıyla,

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \Big/ n_i \tag{4}$$

ve

$$s_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{x}_i)^2 \Big/ n_i \tag{5}$$

olsun. McKay (1932), $d_i = n_i r_i^2 \big/ (r_i^2 + 1)$ ve $D_i = (R_i^2 + 1) \big/ R_i^2$ olmak üzere; $B_i = D_i d_i$ olarak tanımlanan istatistiğinin $n_i - 1$ serbestlik dereceli χ^2 dağıldığını göstermiştir. Bennett (1976) $H_0 : D_1 = D_2 = ... = D_k$ hipotezini test etmenin, eşitlik 3'te verilen hipotezi test etmeye eşit olduğunu göstermiştir. Bu hipotezin testi için Bennett (1976) tarafından önerilen Olabilirlik Oran Test istatistiği olan λ istatistiği, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ olmak üzere,

$$-2 \ln \lambda = (n-k) \ln \sum_{i=1}^{k} \big(d_i / (n-k) \big) - \sum_{i=1}^{k} \big((n_i - 1) \ln d_i / (n_i - 1) \big) \tag{6}$$

olarak tanımlanmıştır. Mckay (1932)'ın B_i istatistiğinin dağılımından yola çıkarak Bennett (1976) bu test istatistiğinin $k-1$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahip olduğunu göstermiştir (Bennett, 1976).

2.2 Wald Testi (WT)

$R = [R_1, R_2, ..., R_k]'$ bilinmeyen parametreler vektörü ve $r = [r_1, r_2, ..., r_k]'$ vektörü de bu parametrelerin kısıtsız en çok olabilirlik tahmin edicisi olsun.

Yokluk hipotezi

$$H_o : h(R) = \left[h_1(R), h_2(R), ..., h_{k-1}(R) \right]' = 0 \tag{7}$$

ya da bir başka gösteriş şekliyle

$$H_o : h(R) = \left[R_1 - R_2, R_2 - R_3, ..., R_{k-1} - R_k \right]' = 0$$

olsun. $h(R)$ için kısıtsız en çok olabilirlik tahmin edicisi $h(r)$ ile gösterilsin. Elemanları

$H(R) = \partial h_i(R) \big/ \partial R_{j**}$, $i = 1, 2, ..., k-1$, $j** = 1, 2, ..., k$

olan $(k-1)\times(k)$ boyutlu $H(R)$ matrisi

$$H(R) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \end{bmatrix}_{(k-1)\times(k)}$$

olsun ve bunun tahmin edicisi $H(r)$ ile gösterilsin. Kısıtsız en çok olabilirlik tahmin edicisi olan r_i istatistiğinin varyansı $Var(r_i) = n_i^{-1}(r_i^4 + 1/2\, r_i^2)$ olur (Kendall ve Stuart, 1977). Buna göre, $Var(r) = diag\left[Var(r_1), ..., Var(r_k) \right]$ olmak üzere, WT istatistiği

$$W = h'(r)\left[H(r)Var(r)H'(r) \right]^{-1} h(r) \tag{8}$$

olarak tanımlanır (Rao ve Vidya, 1992; Gupta ve Ma, 1996).
W test istatistiği asimptotik olarak k–1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir. Rao ve Vidya (1992) Wald test istatistiğini eşit örnek hacimleri için önermiştir. Ancak, Gupta ve Ma (1996) bu test istatistiği üzerine değişiklikler yapıp genel bir hale getirerek, eşit olmayan örnek hacimleri için öneride bulunmuşlardır.

2.3 Olabilirlik Oran Testi (ONR)

H_0 hipotezinin doğruluğu varsayımı altında, L_0 olabilirlik fonksiyonu

$$L_0 = \prod_{i=1}^{k} \left(1 \big/ \sqrt{2\pi}\, \mu_i R \right)^{n_i} \exp\left[-\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i)^2 \big/ 2\mu_i^2 R^2 \right] \tag{9}$$

olarak gösterilsin. H_0 hipotezinin doğruluğu varsayımı altında Doornbos ve Dijkstra (1983) bu olabilirlik fonksiyonundan yararlanarak olabilirlik eşitliklerini

$$\sum_{i=1}^{k} n_i (1 + \sqrt{1 + 4(1 + r_i^2)R^2}) \big/ 2(1 + r_i^2) - \sum_{i=1}^{k} n_i = 0 \tag{10}$$

ve

$$\mu_i = \left[(1 + \sqrt{1 + 4(1 + r_i^2)R^2}) \big/ 2(1 + r_i^2)\bar{x}_i \right]^{-1} \qquad i = 1, 2, ..., k \tag{11}$$

olarak elde etmişlerdir. Bu eşitlikler için Doornbos ve Dijkstra (1983) kompleks çözümler önermişlerdir. Bu eşitliklerin $k > 2$ için cebirsel çözümü mümkün olmadığından, Doornbos ve Dijkstra (1983), Miller ve Karson (1977)'nın önerdikleri yönteme benzer bir yöntem sunmuşlardır. Ancak, Nairy ve Rao (2003) $k>2$ için cebirsel çözümü olmayan bu eşitlikler için alternatif bir çözüm yolu sunmuşlardır. Bu eşitliklerin çözümü için Lehmann ve Casella (1998) teoreminden faydalanmışlardır. Bu teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.1 (Lehmann ve Casella, 1998)
θ bir parametre olsun ve $\hat{\theta}_n$ istatistiğide, θ'nın $\sqrt{n}$ tutarlı kestiricisi olsun. Buna göre $\hat{\theta}_n$ istatistiği, θ parametresine yaklaşırken, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)$ en az $n^{-1/2}$ oranında sınırlanır. O zaman,

$$\delta_n=\hat{\theta}_n-L''(\hat{\theta}_n)\big/L'''(\hat{\theta}_n) \qquad (12)$$

tahmin edicisi asimptotik olarak etkindir.

Eşitlik 10 ve 11'de verilenler birinci dereceden tahmin edicilerdir. Lehmann teoremindeki eşitlikte sağ taraftaki δ_n ile $\hat{\theta}_n$ yer değiştirmesiyle ikinci dereceden tahmin edici bulunur. Bu tahmin ediciler tıpkı birinci dereceden tahmin ediciler gibi ikinci sıralı etkinliğe sahiptir. Bu bilgilere göre Nairy ve Rao (2003) tarafından önerilen yöntem; her bir yığından alınan örnek hacimleri n_i ve toplamları $n=\sum n_i$ olduğunda, Eşitlik 2'de verilen örnek için değişim katsayısı olan r_i istatistiğinin dağılımının asimptotik normalliğinde,
$\tilde{R}_n=\sum n_i r_i\big/\sum n_i$
istatistiği R'nin $n^{1/2}$ tutarlı tahmin edicisidir, biçiminde ifade edilebilir.

$$G(\tilde{R}_n)=\sum_{i=1}^{k} n_i(1+\sqrt{1+4(1+r_i^2)\tilde{R}_n^2})\big/2(1+r_i^2)-\sum_{i=1}^{k} n_i \qquad (13)$$

ve

$$G'(\tilde{R}_n)=\sum_{i=1}^{k} 2n_i\tilde{R}_n\left(1+4(1+r_i^2)\tilde{R}_n^2\right)^{1/2}(1+r_i^2)\big/(1+r_i^2) \qquad i=1,2,\ldots,k \qquad (14)$$

olmak üzere, R parametresinin ikinci dereceden tahmin edicisi

$$\hat{\hat{R}}=\tilde{R}_n-G(\tilde{R}_n)\big/G'(\tilde{R}_n) \qquad (15)$$

olur (Nairy ve Rao, 2003). Burada Lehmann ve Casella (1998)'ın teoreminden faydalanarak ikinci dereceden tahmin edici $\hat{\hat{R}}$ kullanılmaktadır. $\hat{\hat{R}}$'yı eşitlik 11'de R'nin yerine koyarak μ_i parametresinin ikinci dereceden tahmin edicisi olan

$$\hat{\hat{\mu}}_i=\left[(1+\sqrt{1+4(1+r_i^2)\hat{\hat{R}}^2})\big/2(1+r_i^2)\bar{x}_i\right]^{-1} \quad , \quad i=1,2,\ldots,k \qquad (16)$$

bulunur. λ olabilirlik oran istatistiği olmak üzere,

$$-2\ln\lambda=\sum_{i=1}^{k} n_i \ln\left(\hat{\hat{\mu}}_i^2\hat{\hat{R}}^2\big/S_i^2\right) \qquad (17)$$

eşitliği yazılabilir. $-2\ln\lambda$ istatistiği asimptotik olarak $k-1$ serbestlik dereceli χ^2 dağılır (Cox ve Hinkley, 1974; Silvey, 1975).

2.4 Karesel Rank Testi (KRT)

Daha önce bahsedilen testler örneklerin geldikleri yığınların, dağılımlarının normal olduğu durumda önerilen test istatistikleridir. Ancak, KRT parametre dışı bir test olup örneklerin geldikleri yığınların dağılımlarının normal olma varsayımının sağlanmasını gerektirmez. Her biri n_i hacimli k sayıda bağımsız örnekler $X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in_i}$, $i = 1,2,...,k$, olarak gösterilsin. Bu örnekler için

$$Y_{ij} = X_{ij} / \mu_i \text{ , } i = 1,2,...,k \text{ ve } j = 1,2,...,n_i \tag{18}$$

olarak tanımlansın.

Bütün i, j için $E(Y_{ij}) = 1$ ve $Var(Y_{ij}) = (\sigma_i / \mu_i)^2 = R_i^2$ olur (Miller, 1991a). Varyansların eşitliği hipotezinin testi için Conover (1980) KRT'yi önermiştir. Bu test istatistiğini Miller (1991) değişim katsayılarının eşitliği hipotezinin testinde kullanabilmek için $X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in_i}$, $i = 1,2,...,k$ ham veri kümesine eşitlik 18'de verilen dönüşümü uygulayarak, $Y_{i1}, Y_{i2}, ..., Y_{in_i}$, $i = 1,2,...,k$ verisini kullanmıştır (Miller, 1991). Bu dönüşümden elde edilen yeni veri kümesi, ham veri kümesiyle aynı performansa sahiptir. Conover (1980), $i = 1,2,...,k$, $j = 1,2,...,n_i$ olmak üzere, U_{ij} değişkenini $U_{ij} = |X_{ij} - \mu_i|$ olarak tanımlamıştır.

Miller (1991) ise U_{ij} değişkenini,

$$U_{ij} = |Y_{ij} - 1|, \; i = 1,2,...,k \text{ ve } j = 1,2,...,n_i$$

olarak tanımlamıştır ve Conover (1980) gibi bu U_{ij}'lere büyüklük sıra sayıları atayarak bunları $R(U_{ij})$ ile göstermiştir. i. örnek için bu sıra sayılarının karelerinin toplamı için

$$T_i = \sum_{j=1}^{n_i} \left[R(U_{ij}) \right]^2, \quad i = 1,2,...,k$$

eşitliği yazılabilir. $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ olmak üzere, sıra sayılarının karelerinin ortalaması

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^{k} T_i \Big/ n$$

olarak bulunur. Bu sıra sayılarının karelerinin varyansı,

$$D^2 = \left[\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left[R(U_{ij}) \right]^4 - n(\bar{T})^2 \right] \Big/ n-1$$

olarak bulunmuştur (Miller, 1991). $H_0 : R_1 = R_2 = ... = R_k$ hipotezinin testi için önerilen KRT istatistiği

$$KRT = \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - n\bar{T}^2 \right] \Big/ D^2 \tag{19}$$

olarak tanımlanmıştır (Conover ve Iman, 1978). Bu istatistik $k-1$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir.

3. BULGULAR

Bu bölümde önceki bölümde tanıtılan testlerin karşılaştırması için simülasyon çalışmasına yer verilmiştir. Bu simülasyon çalışması iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda çalışmada yer alan 4 test istatistiğinin birinci tip hata bakımından karşılaştırması yapılmıştır. İkinci kısımda ise bu testlerin güç karşılaştırmalarına yer verilmiştir. Simülasyon çalışmasında her bir durum için iterasyon (tekrar) sayısı 10000 olarak alınmıştır ve her bir test yöntemi için bir MATLAB program kodu hazırlanmıştır. Elde edilen sonuçlar tablo ve şekillerle verilmiştir.

Gerek I. tip hataların karşılaştırılmasında, gerekse testin gücüne ilişkin karşılaştırılmalarda herbiri normal dağılıma sahip olmak üzere, yığın sayısı (*k*) 2, 4, 6 ve örnek hacimleri de 10, 30, 50 ve 100 olarak alınmıştır. I. tip hata bakımından karşılaştırmalar, nominal $\alpha = 0{,}01$ ve 0,05 olmak üzere iki farklı düzey için yapılmıştır.

3.1 I. Tip Hata Bakımından Karşılaştırmalar

Bu kısımda I. tip hata bakımından karşılaştırmalarda farklı *k*, *n* ve nominal α değerleri için deneysel I. tip hata değerleri elde edilmiştir. Bu değerler, nominal α değerleri olan 0,01 ve 0,05 ile karşılaştırılmıştır. Her bir test için deneysel I. tip hata değerinin nominal α değerine yakınsama durumu incelenmiştir.

Bu inceleme için değişim katsayısı %10 olan ortalaması ve varyansı farklı normal dağılımlı yığınlardan 10000 defa rassal örnekler türetilmiş ve değişim katsayılarının birbirine eşit olduğu şeklindeki yokluk hipotezi test edilmiştir. Bu şekilde yokluk hipotezinin reddedilme oranı hesaplanmıştır. Bu oran deneysel I. tip hata olarak alınmıştır. Elde edilen sonuçlar nominal α'nın 0,01 ve 0,05 değerleri için Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Farklı *k* ve *n* değerleri durumunda nominal α=0,01, α=0,05 ve $R_i = 0,1$ $(i = 2,4,6)$ için deneysel I. tip hata değerleri

I. tip hata		nominal α =0,01				nominal α =0,05			
k	n	BT	WT	ONR	KRT	BT	WT	ONR	KRT
2	10	0,0113	0,0070	0,0217	0,0111	0,0585	0,0429	0,0734	0,0646
	30	0,0093	0,0098	0,0133	0,0110	0,0497	0,0513	0,0568	0,0517
	50	0,0118	0,0100	0,0106	0,0128	0,0475	0,0491	0,0558	0,0562
	100	0,0099	0,0097	0,0109	0,0120	0,0492	0,0518	0,0497	0,0544
4	10	0,0136	0,0319	0,0233	0,0103	0,0631	0,0880	0,0815	0,0622
	30	0,0122	0,0139	0,0140	0,0117	0,0541	0,0580	0,0597	0,0561
	50	0,0117	0,0140	0,0120	0,0115	0,0504	0,0582	0,0556	0,0574
	100	0,0097	0,0119	0,0117	0,0124	0,0488	0,0545	0,0514	0,0535
6	10	0,0110	0,0429	0,0231	0,0132	0,0567	0,1071	0,0926	0,0648
	30	0,0102	0,0209	0,0140	0,0111	0,0505	0,0736	0,0620	0,0596
	50	0,0102	0,0170	0,0123	0,0124	0,0519	0,0636	0,0558	0,0540
	100	0,0112	0,0134	0,0101	0,0103	0,0491	0,0553	0,0570	0,0524

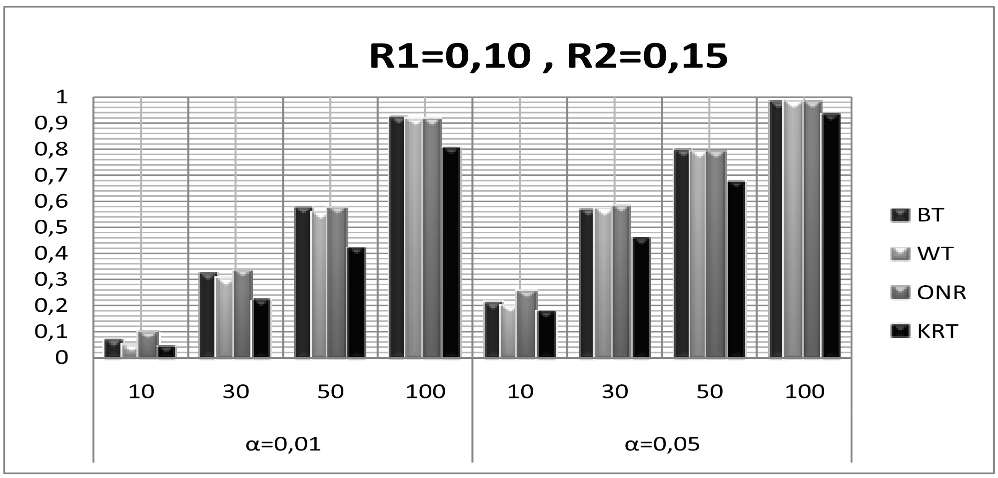
nominal α=0,01 için iki yığının $(k = 2)$ olduğu durum incelendiğinde, $n = 10$ iken en iyi test yönteminin KRT olduğu görülmektedir. $n = 10$ durumunda KRT'den elde edilen deneysel birinci tip hata değeri 0,0111'dir. Bu değer nominal α değeri olan 0,01'e oldukça yakındır. $n = 10$ durumunda ONR ise nominal α değeri olan 0,01'e en uzak değeri vermiştir. $n = 10$ durumunda yığın sayısına göre incelemeler yapıldığında en istikrarlı sonuçları BT'nin verdiği görülmektedir. Tüm k durumlarında örnek hacmi arttıkça, deneysel I. tip hata değeri nominal α değeri olan 0,01'e yakınsamaktadır. $k = 2$ ve örnek hacmi 100 iken KRT testinden elde edilen sonuç 0,01 değerinin uzağında kalmaktadır. k değeri arttıkça WT'ye ait sonuçlardaki kötüleşme de çok belirgindir. $n = 10$ durumunda ONR testi iyi olmayan sonuçlar verirken, WT testi k arttıkça kötüleşen sonuçlar vermektedir. Genel olarak tüm k durumlarında testlerin hepsinde örnek hacmi arttıkça, sonuçlarda bir iyileşme gözlenmektedir.

3.2 Güç Karşılaştırmaları

Güç karşılaştırmalarında farklı k, n ve α değerleri için testin gücüne ilişkin sonuçlar verilmiştir. Bu inceleme için değişim katsayıları farklı olan k sayıda yığından rassal örnekler 10000 defa seçilmiş ve değişim katsayılarının birbirine eşit olduğu şeklindeki yokluk hipotezi test edilmiştir. k sayıda değişim katsayısının eşitliğini ifade eden yokluk hipotezinin reddedilme sayısı toplam iterasyon sayısına bölünerek, testin gücü hesaplanmıştır. k sayıda yığının olduğu durumda değişim katsayısı farklı olan $1, 2, ..., k-1$ yığın için tüm durumlar incelenmiştir. Örneğin $k = 4$ olduğunda değişim katsayısı farklı olan 1 yığın, değişim katsayısı farklı olan 3 yığın, olmak üzere tüm durumlar incelenmiştir.

k sayıda yığının olduğu durumda değişim katsayıları birbirinden farklı olan yığın sayısı arttıkça, dağılımdaki farklılaşmayı yakalamak daha kolay olacağından testin gücünün artması beklenir. Böylece değişim katsayıları birbirinden farklı olan yığın sayılarına göre de testlerin karşılaştırılması mümkün olmaktadır. Bir test istatistiği için testin gücünün yüksek olması arzulanan bir durumdur. Bilindiği gibi testin gücü, dağılımdaki farklılaşma miktarı, örnek hacmi ve I. tip hatanın bir fonksiyonudur. I. tip hatanın karşılaştırılmasında olduğu gibi elde edilen sonuçlar verilerek yorumlanmıştır.

$k=2$ durumu için testin gücüne ilişkin sonuçlar incelendiğinde α =0,01 durumunda $n=10$, 30 değerleri için ONR testi en iyi sonuçları vermiştir. $n=50$ durumunda ONR ve BT testleri en iyi sonucu vermektedir. Örnek hacmi arttıkça KRT testindeki kötüleşme daha net bir şekilde görülmektedir. $n=30$ ve daha büyük iken KRT testinden elde edilen sonuçlar, diğer testlerinden elde edilen sonuçlardan daha düşüktür. $n=50$ ve 100 değerleri için KRT testi hariç, diğer tüm test sonuçları Şekil 1'de görüldüğü gibi birbirine çok yakındır.

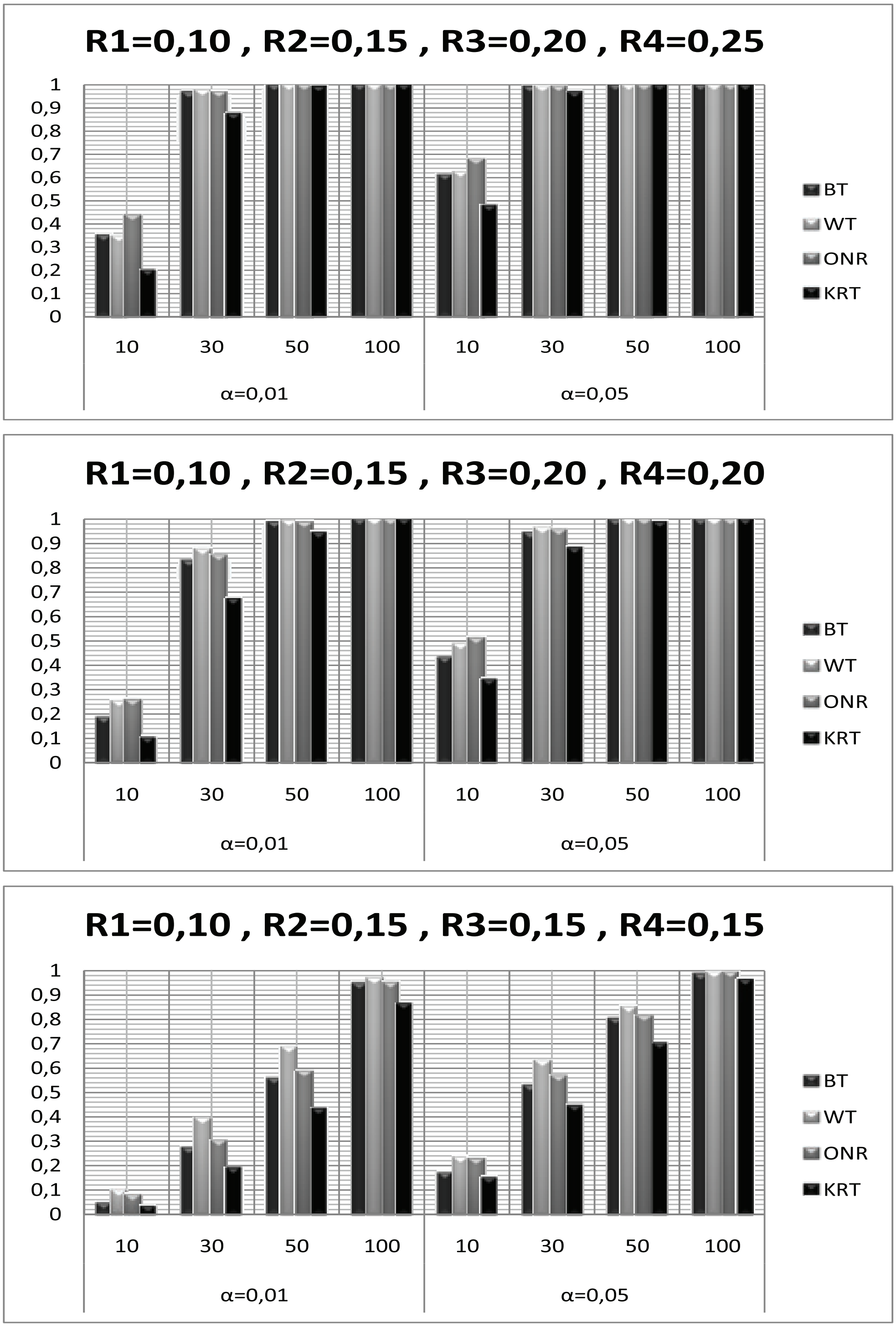


Şekil 1. $k=2$ **Durumunda Testin Gücüne İlişkin Sonuçlar**

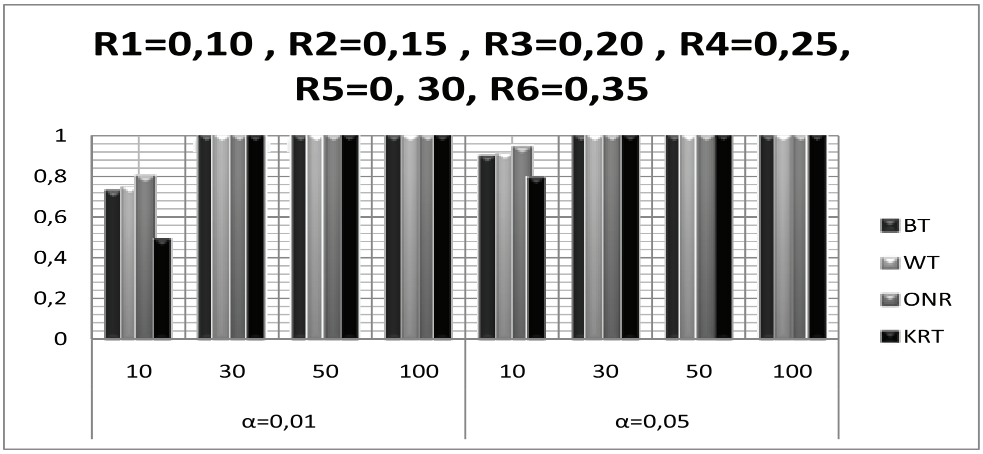
4 değişim katsayısının da birbirinden farklı olduğu durum ile 4 değişim katsayısından üç tanesinin farklı olduğu duruma ilişkin sonuçlar bakımından, test istatistikleri karşılaştırıldığında dikkat çekici bazı durumlar görülmektedir. $\alpha=0,01$ ve 4 değişim katsayısı da birbirinden farklı olduğunda Şekil 2'de görüldüğü gibi örnek hacminin 30 ve daha küçük olduğu durum için en iyi sonuçları ONR testi verirken, daha büyük örnek hacimlerinde bu test istatistiğine KRT test istatistiğinin dışındaki diğer test istatistikleri de katılmaktadır. Diğer yandan 4 değişim katsayısından üç tanesinin farklı olduğu durum incelendiğinde; örnek hacmi 50 ve daha küçük iken en iyi testin WT olduğu görülmektedir. $\alpha=0,05$ için de sonuçlar değişmemektedir ve aynı yorumları yapmak mümkündür. Ayrıca şekillerden görüldüğü gibi birbirinden farklı olan yığınların sayısı azaldıkça, farklılaşmayı tespit etmek zorlaşmakta ve testin gücü düşmektedir. Yine grafiklerden görüldüğü gibi I. tip hata arttıkça testin gücü de artmaktadır. Son olarak

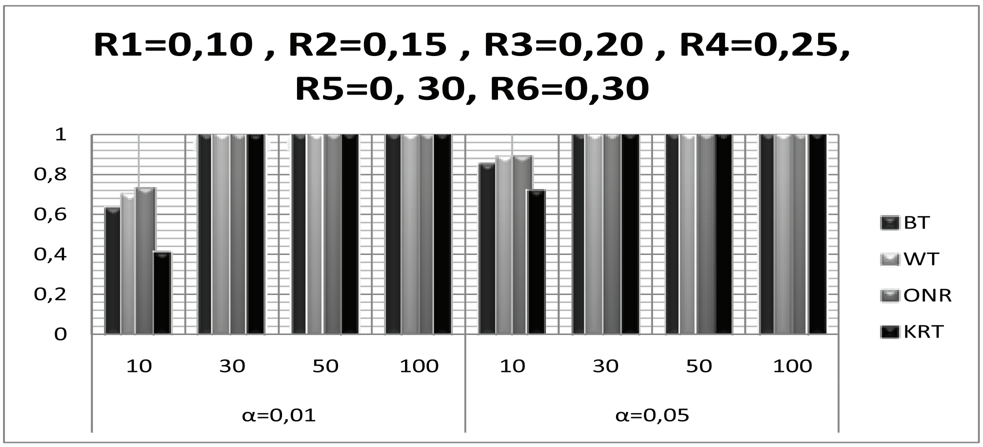
örnek hacmi arttıkça testin gücünün arttığı açık bir şekilde görülmektedir ve bu sonuç beklenen bir sonuçtur. $\alpha = 0,01$ için 4 değişim katsayısından üç tanesinin farklı olduğu durum da ise Şekil 2'de görüldüğü gibi $n = 50$ durumunda KRT en kötü sonuçları vermektedir. $n = 100$ durumunda KRT diğer testlere göre oldukça düşük değerler vermektedir. $\alpha = 0,05$ için de benzer yorumları yapmak mümkündür.

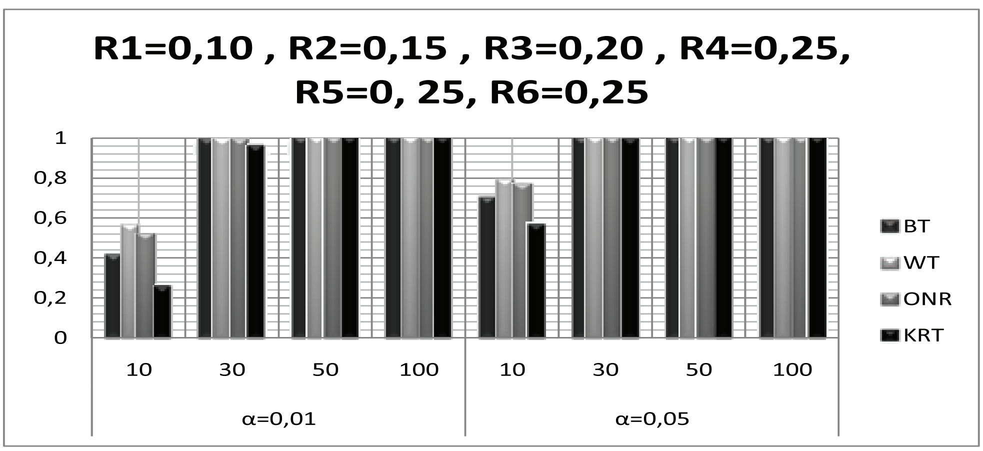
$k = 6$ durumun da benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bu durumlarda yığın sayısına göre test istatistiklerinin davranışları daha belirgin olarak görülmektedir. Yığın sayısı arttıkça testin gücündeki artış ve birbirinden farklı yığınların sayısı azaldıkça testin gücündeki azalış Şekil 3'de görüldüğü gibi daha belirgin bir şekilde ortaya çıkmaktadır.



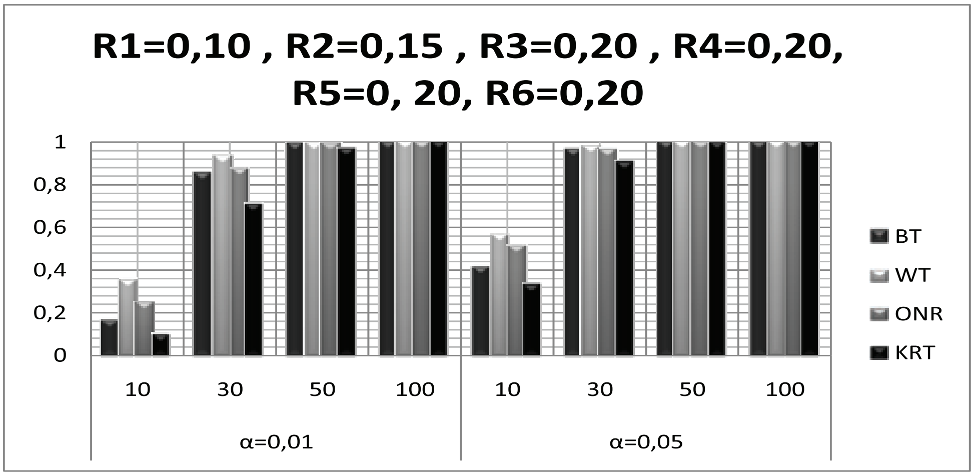
Şekil 2. $k = 4$ **Durumunda Testin Gücüne İlişkin Sonuçlar**

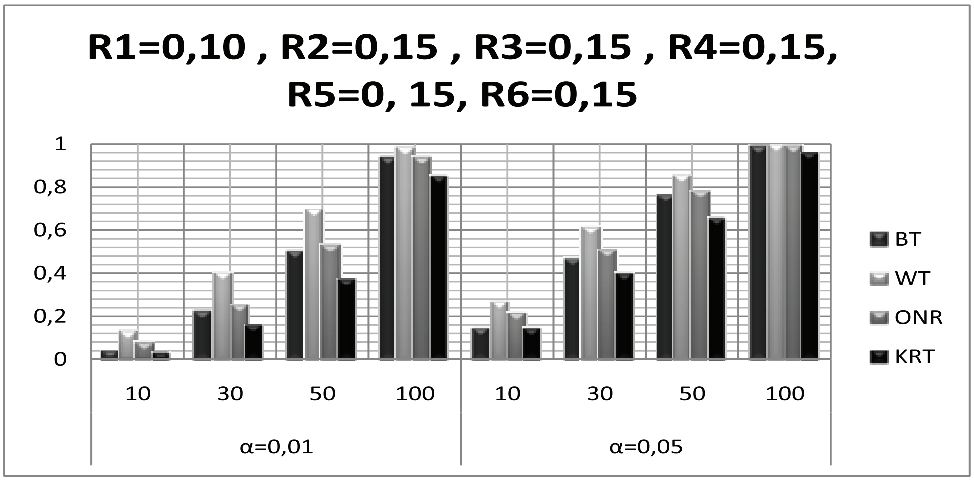






Şekil 3. $k = 6$ **Durumunda Testin Gücüne İlişkin Sonuçlar**





Şekil 3. $k = 6$ **Durumunda Testin Gücüne İlişkin Sonuçlar (Devamı)**

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada değişim katsayılarının eşitliğine ilişkin hipotezlerin test edilmesinde kullanılan: BT, WT, ONR ve KRT tanıtılmış ve bu testlerin karşılaştırması yapılmıştır.

Birinci tip hataya ilişkin karşılaştırmalardan ulaşılan sonuçlar özet olarak: İki değişim katsayısının eşitliğine ilişkin hipotezin test edilmesinde özellikle örnek hacminin 10 gibi küçük bir değer olduğu durumda iyi test yönteminin KRT olduğu ve bu özelliğin $k < 6$ için devam ettiği görülmektedir. Bu örnek hacminde ONR ise diğer testlere göre oldukça kötü sonuçlar vermektedir. k değeri arttıkça WT'ye ait sonuçlardaki kötüleşme çok belirgindir. Örnek hacminin 30'dan küçük olduğu durumlarda, tüm k değerlerinde ONR'ye ait sonuçlarda iyileşme gözükmemektedir. KRT testi hariç, diğer tüm testlerde örnek hacmi arttıkça sonuçlarda bir iyileşme gözlenmektedir. Tüm k durumlarında örnek hacminin artmasına göre en az iyileşmeyi gösteren test, KRT testidir.

Testin gücüne ilişkin olarak yapılan tüm karşılaştırmalarda KRT testi en kötü sonuçları vermiştir. Dolayısıyla bu testlerin yerine alternatifi olan başka testleri kullanmak daha uygun olacaktır. Örneğin k sayıda değişim katsayısının birbirinden farklı olduğu durumlarda ONR testi oldukça iyi sonuçlar vermektedir. Ancak k sayıda değişim katsayısından bazıları birbirine eşit olduğunda görülmüştür ki WT testinde testin gücü daha yüksektir. k sayıda değişim katsayısından sadece birkaç tane değişim katsayısı farklılık gösteriyorsa, WT testinin kullanılması önerilebilir sonucunun çıkarılması mümkündür. Örnek hacminin büyük olduğu durumlarda (n=50 ve 100) bile KRT'nin sonuçlarının diğer testlere göre daha kötü olduğu görülmüştür. Bu durum KRT'nin parametrik olmayan bir yöntem olmasının bir sonucu olabilir. İstatistik teorisinden şu üç sonuç iyi bilinmektedir; i) dağılımdaki farklılaşma miktarı ve örnek hacmi sabit olmak üzere birinci tip hata arttıkça testin gücünün artması beklenir, ii) dağılımdaki farklılaşma miktarı ve I. tip hata sabit olmak üzere örnek hacmi arttıkça testin gücünün artması beklenir, iii) örnek hacmi ve I. tip hata sabit olmak üzere dağılımdaki farklılaşma miktarı arttıkça testin gücünün artması beklenir. Bu çalışmada testin gücüne ilişkin olarak yapılan karşılaştırmalarda elde edilen sonuçlar istatistik kuramıyla da uyum göstermektedir.

5. KAYNAKLAR

Bennett, B. M., 1976. On an approximate test for homogeneity of coefficients of variation. Contributions to Applied Statistics, 169-171.

Bennett, B. M., 1977. LR tests for homogeneity of coefficients of variation in repeated samples. Sankhya, 39B: 400-405.

Conover, W. J., Iman, R. L., 1978. Some exact tables for the squared ranks test. Commun. Statist-Simula.Computa., 7(5):491-513.

Conover, W. J., 1980. Practical nonparametric statistics 2ed. John Wiley and Sons, New York.

Cox, D. R., Hinkley, D. V., 1974. Theoretical statistics. Chapman and Hall, Londan.

Doornbos, R., Dijkstra, J. B., 1983. A multi sample test for the equality of coefficients of variation in normal population. Commun. Statist-Simula. Computa., 12 (2): 147-158.

Gupta, R. C., Ma, S., 1996. Testing the equality of coefficients of variation in k normal population. Commun. Statist-Theory Meth., 25 (1): 115-132.

Kendall, M., Stuart, A., 1977. The advanced theory of statistics. Charles Griffin and Co, Londan.

Lehmann, E. L., Casella, G., 1998. Theory of point estimation 2nd. Springer-Verlag, New York.

McKay, A. T., 1932. Distribution of the coefficient of variation and the extend 't' distribution. Journal of the Royal Statistical Society, 95: 695-698.

Miller, G. E., Karson, M. J., 1977. Testing the equality of two coefficients of variation. American Statistical Association, Proc. Bus. Eco. Statist. S., Part I: 278-283.

Miller, G. E., 1991a. Asymptotic test statistics for coefficients of variation. Commun. Statist-Theory Meth., 20(10): 3351-3363.

Miller, G. E., 1991b. Use of the squared ranks test to test for the equality of the coefficients of variation. Commun. Statist-Simula. Computa., 20: 743-750.

Nairy, K. S., Rao, K. A., 2003. Test of coefficients of variation of normal population. Commun. Statist-Simula. Computa., 32(3): 641-661.

Pitmann, E. J. G., 1939. Test of Hypotheses Concerning Location and Scale Parameters. Biometrika, 31: 200-215.

Rao, K. A., Vidya, R., 1992. On performence of a test for coefficients of variation. Calcutta Statistical Association Bulletin, 42: 87-95.

Shafer, N. J., Sullivan, J. A., 1986. A simulation study of a test for the equality of the coefficients of variation. Commun. Statist-Simula. Computa., 15(3): 681-695.

Silvey, S. D., 1975. Statistical ınference. Chapmann & Hall, London.

COMPARISON OF THE TESTS FOR THE EQUALITY OF COEFFICIENTS OF VARIATION IN TERMS OF TYPE I ERROR AND POWER

ABSTRACT

In this study some test statistics for hypotheses regarding the equality of coefficients of variation were introduced and compared with each other. A simulation study was carried on for these comparisons. The simulation study was designed for different populations (k=2, 4 and 6) each having a normal distribution, different sample sizes (n=10, 30, 50 and 100) and different type I error levels (α=0,01 and 0,05). In the simulation study some test statistics that were used to test the hypothesis of equality of variation coefficients were compared in terms of the type I error and the test power and it was observed that especially the results related to the test power was coherent with the statistics theory.

Keywords: Bennett test, Coefficients of variation, Squared rank test, Likelihood ratio test, Wald test.