Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)
Cilt 10, Sayı 2, Aralık 2016, sayfa 186-209.

Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education
Vol. 10, Issue 2, December 2016, pp. 186-209.

Analyzing Students' Conceptions of "Geometric Locus"

Gönül YAZGAN-SAĞ* & Ziya ARGÜN

Gazi University, Ankara, TURKEY

Received: 20.02.2015 Accepted: 29.06.2016

Abstract –In this paper we investigate students' conceptions of "geometric locus" by using the cK¢ model. For this purpose, we formed 6 groups, each of which consisted of two 10th grade students, who were studying in a big city in the Central Anatolian region. We asked the participants 5 questions related to the "geometric locus" concept. In light of the literature, we firstly revealed the conceptual structure of "geometric locus". Later, students' conceptions about this concept have been analyzed by comparing students' responses to these questions and conceptual structure of "geometric locus" concept. The analyses we have conducted with the data suggest that students' conceptions were not convenient, moreover; they did not have exact conceptions about the core of concepts and they were not able to correctly explain each situation. Although the main focus was on the "geometric locus", we have obtained interesting outcomes related to "graphic".

Key words: student's conceptions, cK¢ model, geometric locus, graphic.

DOI: 10.17522/balikesirnef.277491

Summary

Introduction

One of the research subjects in the field of mathematics education is the term of "conception". If one closely examines the researches, which are related to the term, both the meanings connoted to this term and the differentiation on its meanings will draw one's attention. The term conception is the topic of various researches. If one focuses on the meaning of this term, one can realize that it refers to different approaches of a mathematical concept. There is also another approach, which takes into account the epistemological and the

---

* Corresponding Author: Gönül YAZGAN-SAĞ, Dr., Gazi University, Gazi Faculty of Education, Secondary Science and Math Education Department, Mathematics Education Program, Ankara / TURKEY

E-mail: gonulyazgan@gazi.edu.tr

Note: This study is a part of first author's Master thesis.

structural elements of mathematics, whilst; expressing personal differences. Finally, there are some studies that utilize "conception" term so as to identify the difference between a mathematical concept and the meaning attributed to this concept by students. Considering the meaning of the term according to the last two approaches discussed; conceptions of students have significantly influence the quality of learning. In this study, with the aim of investigating the students' conceptions, we used the cK¢ model, which was introduced to mathematics education literature by Balacheff and formally characterized the structure of students' conceptions. With the perspective of this theory, it is possible to formally describe students' conceptions during problem-solving process.

There can be various interactions among the subject, the cognitive dimension of a person, and the milieu, that only features of the environment related to the knowledge, which are generated by different situations; hence these interactions result in different knowing. The coexistence of multiple knowing, which belong to a subject, is explained through these different interactions. An expert observer can diagnose contradiction in the sphere of practice of a knowing. A formalization has been proposed to overcome the existence of contradictory knowing. It also provides (i) an answer to the need for a better grounded definition of conceptions and (ii) from different an analysis of students' products and behaviors from an epistemic point of view. According to this theory, conception is composed of four main components including set of problems, set of operators, representation system, and control structure. Consequently, the abovementioned four main components can be called as a quadruplet (P, R, L, Σ) of conception. From this point of view, knowing can be referred to as a set of conceptions, which have the same content, thus the domain of validity of a knowing and contradictory character of conception compared to all of the other conceptions can be discussed. Also when it comes to "concept", it can be named as a set of knowing with the same content.

"Geometric locus" concept has gained more importance when Descartes constituted Cartesian coordinate system and the successor mathematicians further developed it after him. Because algebraic structures have been used as a tool for analyzing and understanding the geometric structures; Vieta, Descartes, and Fermat constructed Analytic Geometry using these two structures and thereby this concept has become one of the most essential concepts in Analytic Geometry. In this study, we consider "geometric locus" as a set of points that satisfy an algebraic relation. When the literature of "geometric locus" concept is reviewed, it is possible to find many studies, which focus on this concept in dynamic geometry environment, and to rarely come across with studies investigating its mathematical structure.

Methodology

Our purpose is to investigate students' conceptions of geometric locus concept according to the mathematical knowledge. Hence, the cK¢ model was employed as the theoretical approach to this study. This approach aims to explicitly define characterizing students' conceptions while taking historical and actual uses of mathematics into consideration. For this purpose, we formed 6 groups, each of which composed of 2 10^{th} grade students, who were studying in a big city in the Central Anatolian region. We asked the participants five question, which were related to the "geometric locus" concept. In light of the literature, we firstly revealed the conceptual structure of "geometric locus". Later, students' conceptions about this concept have been analyzed by comparing students' their responses to these questions and conceptual structure of "geometric locus" concept.

Findings

In a broad sense, it can be said that students' conceptions are far conceptual structure of "geometric locus" concept. Analysis of the explanations suggests that they used operators with their intuition. Interpreting the conceptions of students on "geometric locus" concept, it is visible that they prefer using verbal and visual representation elements rather than written ones. Through this study, we researchers have realized that problems, which students will come across, must be designed in such a way that they should reflect different aspects of the mentioned concept in the classroom. Otherwise, the teachers could assume that students had accurate conceptions even if they, in fact, did not. Within this context, we think that students must be faced with situations, which consist of accurate and open ended problems.

Conclusion

What if we asked students to draw the graphic for the equation y=2x+1? Probably the answer to the last question enabled us to reach the right operator, representation, and control elements. However, since the "circle" is perceived as a geometric figure by students; the current graphical conceptions of students were not studied. The situation that we organized caused contradiction for students and thus problems were observed in their knowings of graphics. We believe that the graphics suitable for two formats could be simultaneously studied with the students in the future researches. As the findings indicate, there are serious problems in students' conceptions about "graphic" concept.

Suggestions

The next research might be related to this concept. The issue of why students have so many difficulties and are unsuccessful in graphic drawing on coordinate system while they easily utter the name of equation they have found and do draft drawings, could be a subject for further studies

In this research, only one session has been conducted on the subject of "geometric locus" with the students. To more elaborately examine the theory of conceptions, several sessions about the related concepts should be organized. Furthermore, after students' conceptions are determined via observation; in a broad process, interview or interviews could be conducted so as to find out about students' indefinite explanations about the solutions.

Öğrencilerin "Geometrik Yer" Kavrayışlarının Analizi

Gönül YAZGAN-SAĞ† & Ziya ARGÜN

Gazi Üniversitesi, Ankara, TÜRKİYE

Makale Gönderme Tarihi: 20.02.2015 Makale Kabul Tarihi: 29.06.2016

Özet – Bu araştırmada kBk modelini kullanarak "geometrik yer" kavramı ile ilgili öğrenci kavrayışlarını ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Bu amaç için İç Anadolu bölgesinde yer alan bir büyükşehirdeki özel dershanede kursa devam eden ve araştırmaya gönüllü olarak katılan 12 tane 10. sınıf öğrencisi ikişerli olarak gruplandırılmış ve öğrencilerden bir çalışma yaprağındaki "geometrik yer" kavramı ile ilgili 5 tane soruyu cevaplamaları istenmiştir. İlk önce bu sorular temel alınarak araştırmacılar tarafından kBk modeli yoluyla "geometrik yer" kavramının kavramsal yapısı ortaya çıkarılmıştır. Daha sonra öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevaplar kullanılarak, "geometrik yer" kavramı ile ilgili kavrayışlar analiz edilmiştir. Son olarak bu analizler karşılaştırılmış ve yorumlanmıştır. Yapılan bu karşılaşmada, öğrencilerin sahip olduğu "geometrik yer" ile ilgili kavrayışlarının sezgisel olduğu, öğrencilerin uygun olamayan kavrayışlara sahip oldukları ve bu kavrayışlarını irdelemeksizin kullandıkları sonucuna varılmıştır. Bu araştırmada amaç "geometrik yer" kavramını incelemek olmasına rağmen, "grafik" kavramı ile ilgili ilginç sonuçlar ile de karşılaşılmıştır.

Anahtar kelimeler: öğrenci kavrayışları, kBk modeli, geometrik yer, grafik

Giriş

Son otuz yılda yapılan matematik eğitimi araştırmaları incelendiğinde, ortaya atılmış olan bir durumu tahmin etmeye çalışmaktan çok, anlamaya doğru bir yöneliş olduğu görülmektedir. Bu yönelişle birlikte, kişiler arasındaki etkileşimleri, kişilere ait değerleri, seçimleri, inançları inceleyen araştırmalar (Bishop, 2002) ve kişilerin matematiği nasıl kavradıkları, öğrendikleri ve kullandıklarına dair araştırmalar (Atallah, 2003) ortaya konulmaktadır. Matematik eğitiminde gündeme gelen araştırma konularından bazıları da "kavrayış (conception)" ile ilgilidir. Bu alandaki araştırmalarda kavrayış teriminin son otuz beş yıldır gündeme geldiği ve günden güne değişen anlamlara sahip olduğu görülmektedir

† İletişim: Gönül YAZGAN-SAĞ, Dr., Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Böl. Matematik Eğitimi ABD, Ankara / TÜRKİYE

E-mail: gonulyazgan@gazi.edu.tr

Not: Bu çalışma birinci yazarın yüksek lisans çalışmasının bir parçasıdır.

(Kaldrimidou & Tzakaki, 2005). Araştırmalar incelendiğinde, hem bu terime yüklenen anlamlar hem de bu anlamlardaki farklılaşmalar gözlemlenebilir. Çeşitli araştırmalarda kavrayış terimi bir başlık olarak ele alınmaktadır. Bu tür araştırmalarda kavrayış teriminin, bir matematiksel kavrama olan farklı/çeşitli yaklaşımlar şeklinde ele alındığı görülmektedir. Bu duruma örnek olarak bir matematiksel kavram olan fonksiyonu küme, eşleme ve / veya bağıntı olarak ifade etmek verilebilir (Selden & Selden, 1992). Kavrayış teriminin bu anlamı göz önüne alındığında, "kavram"ın kişisel davranıştan ziyade matematiksel dünya ile ilgili olduğu görülebilir. Bunun yanında literatürde kavrayış terimi, öğrencilerin ve öğretmenlerin matematiğin doğası ve matematik öğrenimi ile ilgili yaygın görüşlerini tarif etmek için fikir ve inançlar ile eş anlamlı olarak da kullanılmaktadır (Thompson, 1992). Kavrayış terimine bir diğer yaklaşımda ise kişisel farklılıklar açıklanmakta, matematiğin epistemolojik ve yapısal elemanları da göz önünde bulundurulmaktadır (Sierpinska, 1992). Ayrıca kavrayış terimini, matematiksel bir kavram ile öğrencilerin bu kavrama yüklediği anlam arasındaki farklılıkları belirlemek için kullanan bazı araştırmalara da literatürde rastlanmaktadır (Balacheff & Gaudin, 2002; Breidenbach, Dubinsky, Hawals, & Nichols, 1992; Sfard, 1992; Vergaund, 1998). Kaldrimidou ve Tzakaki'nin (2005) de belirttiği gibi literatürde "kavrayış" terimine dair bir uzlaşma bulunmamaktadır. Son iki yaklaşıma göre ele alınan kavrayış teriminin anlamı göz önüne alındığında, öğrencilerin sahip oldukları kavrayışların, öğrenmenin niteliğini önemli derecede etkilediği söylenilebilir. Skemp'e (1986) göre, deneyimler ve düşünceler kişisel olduğundan kavrayışlar da bu deneyim ve düşüncelerin etkisi altındadır. Bu çalışmada öğrencilerin kavrayışlarını incelemek için matematik eğitimi literatürüne önemli katkılarda bulunan Fransız Nicholas Balacheff tarafından ortaya atılan ve öğrencilerin kavrayışlarını formal bir biçimde karakterize etme imkânı sağlayan kBk modeli kullanılmıştır. Bu teori yardımı ile problem çözme sürecinde öğrencilerin kavrayışlarını formal bir biçimde betimlemek mümkün hale gelebilmektedir. Bazı çalışmalarda "kavrayışların teorisi", "kavrayış teorisi" adlandırmaları kullanıldığından; "teori" ifadesi "model" ile değişmeli olarak kullanılmıştır. (Bakınız Mesa (2004), Webber ve Presty (2002), Maracci (2006)). Bir sonraki bölümde bu teori, daha geniş bir biçimde ele alınacaktır.

kBk (kavrayış-bilme-kavram) modeli

kBk (cK¢) modeli adını; kavrayış (conception), bilme (knowing) ve kavram (concept) kelimelerinin ilk harflerinden almıştır. kBk modeli, matematiksel öğrenme ortamları kuramı (theory of didactical situations in mathematics) (Brousseau, 1997) ile bağlantılıdır. Belirli bir bilgi ile ilgili olan öğretme ve öğrenme durumlarının modellenmesi, matematiksel öğrenme ortamları kuramı ilgi alanları arasında yer almaktadır. Burada "öğrenme" ile kast edilen, verilen bir bilgi parçasını edinmeye ve anlamaya olanak sağlayacak şekilde özel olarak organize edilmiş durumların karakteristikleri ve özellikleri ile ilgili teorik çalışma anlamındadır.

Fransızcada, İngilizceye çevrildiğinde "to know" yani "bilmek" anlamına gelen "savoir" ve "connaître" fiilleri bulunmaktadır. Anlamlarına bakıldığında bu iki kelime arasında çok küçük farklılık vardır. Bu kelimelerden "savoir", "to know for a fact" yani "bir gerçeği bilmek" anlamına gelmektedir ve diğeri olan "connaître" kelimesi ise "to be familiar with" yani "aşina olmak" anlamına gelmektedir (Brousseau, Brousseau, & Warfield, 2004). kBk modelinde geçen "knowing (bilme)" terimi ise "connaître" kelimesinin isim hali olarak ve benzer şekilde "knowledge (bilgi)" terimi, "savoir" kelimesinin isim hali olarak kullanılmıştır. Öğrenmelere dair göstergeler, öğrencilere ait bilmelerin bir sonucu olarak ortaya konulan davranışlar ve üretilenler ile belirlenebilir (Balacheff & Gaudin, 2010). Burada *bilme* (knowing), herhangi bir alanda öğrencilerin bireysel yapılandırmalarını, toplum tarafından kabul gören bilişsel yapılar olan "bilgi" den (Brousseau, 1997; Brousseau ve diğerleri, 2004) ayırt etmek için kullanılan bir terimdir (Balacheff & Gaudin, 2002). Farklı durumlar; konu (subject) yani *kişinin bilişsel bakış açısı* ile ortam (milieu) yani *çevrenin sadece bilgi ile ilgili olan özellikleri* arasında farklı etkileşimlere neden olmaktadır. Bunun sonucu olarak da farklı *bilmeler* ortaya çıkabilmektedir. Farklı etkileşimler ile bir kişinin *bilişsel bakış açısına* ait birçok *bilmenin* aynı anda varlığını sürdürebilme gerekçeleri açıklanabilmektedir. Varlıklarıyla birbirlerine çelişki oluşturan *bilmeler*, bir konuya yani *kişinin bilişsel bakış açısına* ait farklı zamanlarda kendini gösterebilmektedir. Yine benzer şekilde farklı durumlar da, farklı *bilmeler* oluşabildiğinden, bu çelişkili bilmeler aynı anda var olabilmektedir. Tüm durumlar bir *gözlemci* için eş yapılı olmasına rağmen, kişi tarafından birbirinden farklı durumlar olarak algılandığı söylenilebilir (Mesa, 2004).

Uygulama alanı (sphere of practice) ise bir bilmenin (çelişkili olsa bile) karşılaştığı her türlü durumda *tutarlı* bir şekilde var olabilmesi anlamına gelmektedir. Bu nedenle konu yani *kişinin bilişsel bakış açısı* çelişkiye düşse bile kişi, hiçbir zaman çelişkiye düştüğünün farkına varamaz ve bu duruma dair mantıklı gerekçelerini sunabilir. *Uzman bir gözlemci*, bir bilmeye ait olan uygulama alanında ortaya çıkan çelişkilerin, durumlarla nasıl bir uyumsuzluk oluşturduğunu ortaya koyabilmektedir. Fakat konu yani *kişinin bilişsel bakış açısı*, bu çelişkili *bilmeleri* birbirinden bağımsız ve tamamen farklı *bilmeler* şeklinde algılamaktadır (Balacheff, 2000; Balacheff & Gaudin, 2002). Bir kavram yanılgısına bir bilme gözüyle bakılabilir.

Kavram yanılgısının bilmeden tek farkı, kavram yanılgısının arzu edildiği gibi yapılanmamış olmasıdır. Örneğin öğrencilerin çarpma işleminde, çarpılanının her zaman büyüyeceğini düşünmesi bir *bilme* olarak adlandırılabilir. Ancak bu bilme, istenilen şekilde yapılanmamış bir bilmedir. Bundan dolayı makalede kavram yanılgısı yerine de *bilme* kullanılmıştır.

Kavrayış, Balacheff (2000), Balacheff ve Gaudin (2002) tarafından öğrencilerin *bilmelerini* modellemek ve birbirleriyle çelişen *bilmelerin* varlığı problemini incelemek amacıyla kBk modeli ile gündeme getirilmiştir (Chieu & Herbst, 2011; Martínez-Planell, Gonzalez, DiCristina, & Acevedo, 2012). *Kavrayışa* bilmelerin yapı taşı gözü ile bakılabilir. Bu teorinin temel varsayımı, öğrencilerin matematiksel terimler ile ilgili kavrayışlarının, bu kavrayışların ortaya çıktığı problem durumları ile bağlantılı olmasıdır. Matematik geliştikçe ve değiştikçe, yeni problemler üzerinde uğraşılır ve böylece var olan *kavrayışlar* da biçim değiştirir. Bütün bu farklı kavrayışların kombinasyonu da belirli bir matematiksel terim ile ilgili kişinin bilgisini yani *bilmeyi* oluşturur (Mesa, 2010).

Kavrayış formulasyonu hem kavrayışın tanımlanma ihtiyacına bir cevap niteliğindedir hem de öğrencilerin ürettiklerini ve davranışlarını epistemik bir bakış açısına göre analizine yardımcıdır (Miyakawa, 2004). kBk modeli bağlamında kavrayış, dört temel bileşen üzerine oturtulmuştur. Bu temel bileşenler; problem kümesi, işlem kümesi, temsil sistemi ve kontrol yapısı olarak sıralanabilir:

P, *Problem Kümesi* (P, Set of Problems), bir kavrayışın geçerlilik alanını yani uygulama alanını tarif etmektedir. P ’ye kavrayışı belirleyen öz gözüyle bakılabilir. P, kavrayışın niteliğini, ne olduğunu belirlemede önemli bir role sahiptir. Bir içerik hakkında öğrenciler tartışırken yapılan gözlem ile P belirlenebilir. P, kavrayışla ilgili bir çözümü detaylandırmada çeşitli araçlar sağlar.

İ, *İşlem Kümesi* (R, Set of Operators), P ’de yer alan problemlerin çözümündeki işlemlerin yer aldığı kümedir. İ, öğrenci davranışları ve ürünleri ile ortaya çıkarılabilmektedir. Ayrıca İ, bir problemin çözüm sürecinde kullanılan temel işlemler, atılan adımlar, eylemler olarak ele alınmaktadır.

T, *Temsil Sistemi* (L, Representation System), P ve İ ’de yer alan elemanların açıklanabilmesini sağlamaktadır. T ’nin elemanları, işlemlerin kullanımındaki ve formülleştirilmesindeki araçlardır. Örnek olarak; cebirsel dil, geometrik çizimler, matematiksel yazılımlar ve hesap makineleri verilebilir.

K, *Kontrol Yapısı* (Σ, Control Structure), genelde kapalı kalmaktadır. K, öğrenci kararlarını, çözümlerin doğru olup olmadığını belirleyen *üst bilişsel ölçütler* kümesi, *düzenlenmiş kriter* kümesi olarak ele alınabilir. Kavrayışın mantıksal tutarlı olup olmadığını garanti etmektedir. Öğrencinin, bir uzmanmış gibi karar verebilmesini, uygun seçimler yapabilmesini, bir işlemin kullanımı ile ilgili ya da herhangi problem durumu ile ilgili verilen kararları açıklayabilmesini sağlayan araçlar içermektedir.

Sonuç olarak yukarıda belirtilen kavrayışa ait dört temel bileşenine (P,İ,T,K) 'dan oluşan bir dörtlü gözüyle bakılabilir. Bunun yanında bir kavrayışın karakterize edilmesi sırasında vurgu ne konuda yani kişinin bilişsel yapısında ne de kişinin etkileşimde bulunduğu ortamdadır. Diğer taraftan bu karakterizasyon konu / ortam sisteminin (subject / milieu system) karakterize edilmesine de olanak sağlamaktadır. Ayrıca kBk modelindeki diğer yapılar kavrayış ile tanımlanmaktadır (Páez Murillo & Vivier, 2013). Bu bakış açısına göre bilme, aynı içeriğe sahip kavrayışlar kümesi olarak adlandırılabilir. Böylece bir bilmenin geçerlilik alanından ve bir kavrayışın diğer her bir kavrayışa göre çelişkili karakterinden söz edilebilir. Ayrıca kavram (concept), aynı içeriğe sahip olan bilmeler kümesi olarak tanımlanmaktadır (Balacheff & Gaudin, 2003). Bu yapı, öğrencilerin ortaya koydukları problem kümesi, işlem kümesi, temsil sistemi ve kontrol yapısındaki çeşitliliğe vurgu yapmaktadır (Mesa, 2004). Bu bağlamda bir kavramla ilgili öğrenci kavrayışını tam olarak belirleyebilmek için bu dört bileşenin ortaya çıkarılması önemlidir.

"Geometrik yer" kavramı

"Geometrik yer" kavramı geometrinin, dolayısıyla matematiğin temel ve önemli kavramlarından biridir. Matematikçiler bu kavramla eski çağlardan beri meşgul olmuşlardır. Eski Yunancada *yer* anlamına gelen "topos" ve Latince de aynı zamanda bugünkü kullanımı olan "locus" şeklinde isimlendirilen bu kavrama tarihi gelişim sürecinde değişik anlamlar yüklenmiştir. Geometrik yer bir kavram olarak; Menaechmus, Apollonius, Aristaeus, Pappus gibi matematikçilerin yıldızlar, güneş, ay gibi gök cisimlerinin ve dünyanın hareketlerini anlayabilme; ileriki zaman dilimlerinde gök isimlerinin konumlarını tahmin etme gereksinimi ile gündeme gelmiştir (Cha & Noss, 2003). Bu kavram Descartes'in kartezyen koordinat sistemini oluşturması ve Descartes 'den sonraki matematikçilerin bu sistemi geliştirmeleri ile daha da önem kazanmıştır. Çünkü geometrik yapıların incelenmesinde ve anlaşılmasında cebirsel yapılar araç olarak kullanılmaya başlanmıştır. Bu iki yapıyı kullanarak; Vieta, Descartes, Fermat analitik geometriyi kurmuşlar ve böylece bu kavram analitik geometrinin de en temel kavramlarından biri haline gelmiştir. Heath (1961) geometrik yeri, aynı olan bir özelliği içeren bir yüzey ya da doğrunun konumu olarak tanımlarken; Casey (1888), bir eğri ya da yüzeyi oluşturan tüm noktalar kümesinin bazı özellikleri sağlaması şeklinde tanımlamıştır. Diğer tanımlama ise Adams (1866) tarafından, herhangi bir şeyin hareketi ile oluşan yol olarak verilmiştir. Tayler (1993) ise birden çok tanımı bir arada vermiştir. Bu tanımlamalar; (i) verilen bir kurala ya da kurallara göre hareket ettiğinde çizilen yol; (ii) belirli kurallara uyan bir tek noktanın yolu; (iii) belirli kurallara uyan (x,y) noktalarının kümesi şeklindedir. Ayrıca geometrik yer kavramını, dinamik geometri ortamında inceleyen birçok çalışmaya rastlanılmaktadır (Cha & Noss, 2002; Gorghiu, Păuna, & Gorghiu, 2009). Ancak kavramın matematiksel yapısını inceleyen çalışmaların sayısının ise daha az olduğu görülmektedir. Bu araştırmada "geometrik yer" kavramı, bir bağıntının grafiği olarak ele alınmış ve bunun sonucu olarak "geometrik yer" cebirsel bir ilişkiyi sağlayan noktaların kümesi anlamında kullanılmıştır. Araştırmanın amacı olan geometrik yer kavramı ile ilgili öğrenci kavrayışlarını incelemek için kBk modeli ele alınmıştır. Bu model, geçmiş ve şimdiki matematik uygulamalarını da göz önünde bulundurarak, öğrencilerin kavrayışlarını karakterize etmek için açık ve belirgin bir tanımlama yapma imkânı sunabildiği için kullanılmıştır (Balacheff & Gaudin, 2002).

Yöntem

Bu araştırmanın amacı öğrencilerin geometrik yer kavrayışlarını kBk modeline göre derinlemesine analiz etmek olduğundan nitel bir araştırma olarak tasarlanmıştır (Yıldırım & Şimşek, 2006). Bu bölümde araştırmanın katılımcıları, veri toplama araçları ve analizinden bahsedilecektir.

Katılımcılar

Araştırmacılardan ilki, çalıştığı özel bir dershanede 10. sınıf öğrencilerine yapılacak olan araştırmadan bahsetmiştir. Ayrıca yazılı olarak öğrencilerden bu araştırmaya katılmak isteyip istemedikleri ve katılmak isterlerse kimlerle daha rahat çalışabilecekleri ile ilgili görüşlerini almıştır. Alınan bu görüşler, incelenmiş ve amaçlı örnekleme yöntemlerinden birisi olan maksimumum çeşitlilik örnekleme yöntemine ve gönüllük ilkesine göre her biri ikişer öğrenciden oluşan toplam 6 grup belirlenmiştir (Patton, 2002). Böylece araştırmanın katılımcılarını, İç Anadolu bölgesindeki bir büyükşehirde yer alan özel bir dershanede eğitim alan on iki 10. sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Araştırma boyunca her bir katılımcıya takma isimler verilmiştir. Ayrıca 2 öğrenci ile de pilot çalışma yapılmıştır. Öğrencilerin ikişer kişilik gruplar halinde bir araya getirilmesi ile öğrencilerin fikir ve düşüncelerini daha ayrıntılı bir şekilde elde etmek (Miyakawa, 2004) ve doğal eğilimlerini belirmek (Yıldırım & Şimşek, 2006) amaçlanmıştır.

Katılımcılar Veri Toplama Süreci ve Araçları

Araştırmanın verileri, nitel araştırma yöntemi tekniklerinden olan gözlem ve doküman analizi ile toplanmıştır. Gözlem ile veriyi birincil kaynaktan almak ve katılımcıların sözel olmayan davranışlarını da belirlemek amaçlanmıştır. Benzer şekilde doküman analizi, katılımcıların soruları cevaplarken sergiledikleri her türlü yazı ve çizimleri analiz ederek araştırmanın etkililiğini arttırmak için kullanılmıştır (Yıldırım & Şimşek, 2006). Katılımcıların kendilerini rahat hissetmeleri amacıyla soru çözerken herhangi bir süre sınırlamasında bulunulmamıştır. Her bir grup yaklaşık olarak 40–60 dakika gözlemlenmiştir. Gözlem sırasında veri kaybını engellemek amacıyla ses kayıt cihazı kullanılmış ve öğrencilerin davranışları not edilmiştir. Veri toplama aracı olarak geometrik yer kavramı ile ilgili beş soru kullanılmıştır. Kullanılan bu sorular Tablo 1 ’de yer almaktadır. Öncelikle geometrik yer kavramı ile ilgili var olan literatür incelenmiş ve araştırmacılar tarafından bu literatür ışığında kavramsal yapı analiz edilmiştir. Sonrasında yapılan bu analiz ile ilgili, matematik alanında uzman iki kişinin düşünceleri alınmıştır. Bu düşünceler doğrultusunda bazı eklemeler ve çıkarmalar yapılmıştır. Diğer taraftan hazırlanan soruların güvenilirliği için sorular, iki öğrenciye yöneltilmiştir ve öğrencilerden alınan dönütlere göre yeniden düzenlenmiştir.

Verilerin Analizi

Her bir soruya yönelik hazırlanan matematiksel analizden sonra, sorular için kBk modeline göre birer (P,İ,T,K) kavrayış dörtlüsü oluşturulmuştur. Yani her bir soru için problemler kümesi, işlemler kümesi, temsil sistemi ve kontrol yapısı açığa çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu kavrayış dörtlüleri de, öğrencilerin çözümlerini analiz ederken kullanıldığı için *anahtar kavrayış* olarak isimlendirilmiştir. Aslında her bir soru için ortaöğretim seviyesinde birden çok anahtar kavrayış dörtlüleri oluşturulmuştur. Ancak araştırma sırasında yani öğrencileri gözlemlerken, problem çözme süreçlerinde kavram ile ilgili farklı bakış açıları ile karşılaşılmamıştır. Bundan dolayı bu araştırmada sadece öğrencilerin sergiledikleri yaklaşıma göre olan anahtar kavrayış dörtlüsüne yer verilmiştir. Öğrencilerden elde edilen verilerden yola çıkarak her bir grup için (P,İ,T,K) dörtlüleri oluşturulmuştur. Sonrasında bu kavrayış dörtlüleri, anahtar kavrayış dörtlüsü ile karşılaştırılmıştır. Aslında bu araştırmanın veri analizinde, matematiksel öğrenme ortamları kuramında (Brousseau, 1997) belirtildiği gibi geometrik yer kavramı ile ilgili *bilmenin* ve *bilginin* karşılaştırıldığı söylenilebilir. Tablo 1 'de her bir soru için hazırlanmış olan anahtar kavrayış dörtlüleri yer almaktadır.

Tablo 1 Araştırmada Yer Alan Soruların kBk Modeline Göre (P,İ,T,K) Kavrayış Dörtlüleri

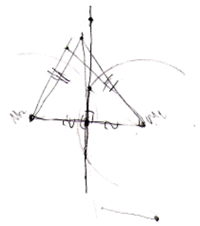
1.soru: Düzlemde verilen bir AB doğru parçasının uç noktalarının her ikisine de eşit uzaklıkta bulunan noktaların yerlerini belirlemeye çalışınız. Belirleyebildiyseniz bu yerin özelliklerini yazınız. P: problemler bu doğru parçasının uç noktalarını merkez kabul eden eş çemberler, ikizkenar üçgen ve eşlik aksiyomu ile ilgilidir. İ: eş çemberler ve yarıçap özellikleri, ikizkenar üçgen ve özellikleri, noktalar, diklik ilişkileri, eşlik aksiyom ve özellikleri ile ilgili işlemler. T: çizimlerde kullanılan noktalar, doğru parçaları, çemberler, diklik, kesişime orta nokta ve bu geometrik gösterimlerim sembolik ifadeleri. K: doğru, çember, ikizkenar üçgen, K.A.K eşlik aksiyomu.
2.soru: Düzlemde bir AB doğru parçası veriliyor. $\|AC\| = \|CB\|$ eşitliğini sağlayan C noktalarının yerlerini düzlemde gösterebilir misiniz? Gösterebildiyseniz, gösterebildiğiniz şeklin bir geometrik adı var mıdır? Bunu göstermede kullandığınız yolları yazınız ve açıklayınız. *Bu soru için hazırlanan (P,İ,T,K) kavrayış dörtlüsü ile 1. soru için hazırlanan kavrayış dörtlüsü aynıdır.*
3.soru: Düzlemde AB doğru parçası, CD doğru parçasının orta dikmesinin bir parçası ise CD doğru parçası AB doğru parçasının orta dikmesinin parçası olur mu? Cevaplarınızın gerekçelerini yazınız. P: problemler, doğru, doğru parçası, iki doğrunun durumları ile ilgilidir. İ: bir doğru parçası ve orta dikmesi ile ilgili işlemler. T:çizimlerde kullanılan noktalar, doğru parçaları, diklik, kesişime orta nokta, kesişim noktası ve bu geometrik gösterimlerin sembolik ifadeleri. K: doğru, orta dikme, paralel doğruların durumları.
4.soru: Düzlemde doğrusal olmayan A, B, C noktaları verilmektedir. Bu üç noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerini belirleyiniz. Belirleme aşamasında kullandığınız düşüncelerinizi yazınız. P: problemler, düzlemde doğrusal olmama, eşit uzaklıkta olma, orta dikme, iki doğrunun kesişmesi ile ilgilidir. İ: doğru parçaları ve orta dikmeleri arasındaki ilişkiler, eşitlik bağıntısı ve özellikleri, kesişen iki doğru arasındaki ilişkiler ile ilgili işlemler. T: çizimlerde kullanılan noktalar, doğru parçaları, doğru parçalarının uzunlukları, diklik, kesişime, orta nokta ve bu geometrik gösterimlerim sembolik ifadeleri. K:doğru, orta dikme tanımı, kesişen doğruların sağladığı şartlar.
5.soru: Düzlemde verilen bir çemberin merkezi ile çemberin üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçalarının orta noktalarının olası geometrik yeri nedir? Bu çemberin denklemi $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ise aradığımız geometrik yerin denklemini yazabilir misiniz? Denklemi yazabilseydiniz bu denklemin grafiğini çizmeye çalışınız. Çizdiğiniz grafiğin bir adı var mıdır? Varsa yazınız. P: problemler, çember ve elemanları, iki nokta arasındaki uzaklık, çemberin denklemi ve grafik ile ilgilidir. İ: çemberin denklemi ile merkezi ve yarıçapı arasındaki ilişkiler, doğru parçası ve orta nokta ile ilgili, merkezi ve yarıçapı bilinen çember ve denklemi ile ilgili, grafik ile ilgili işlemler. T: çizimlerde kullanılan noktalar, çemberler, yarıçap, orta nokta, doğru parçaları, doğru parçalarının uzunlukları, kesişime, orta nokta ve bu geometrik gösterimlerim sembolik ifadeleri K: çember, çemberin denklemi, çember grafiği.

Bulgular ve Yorumlar

1. soruya ait bulgular

Grupların hepsi 1. soru için doğru çizimi yapmışlardır. Ancak kavrayışlara dikkatlice incelendiğinde grupların, bu çizimleri yaparken kullandıkları işlem kümesi ve kontrol yapısı elemanları açısından birbirlerinden farklılaştıkları görülmüştür. Kavrayış isimlendirmesi, soruyu çözerken grupların kullandıkları elemanlara göre verilmiştir (Balacheff & Gaudin, 2002). Örneğin 1. grubun kavrayış dörtlüsündeki elemanlar "ikizkenar üçgen" ve "eş çember" ile ilgili olduğundan, kavrayış "ikizkenar üçgen & eş çember" olarak isimlendirilmiştir. Buna göre 1. grubun kavrayışı $K_{ikizkenar\ üçgen\ \&\ eş\ çember}$; 2., 3. ve 4. grubun kavrayışları $K_{ikizkenar\ üçgen}$; 5. ve 6. grubun kavrayışları ise $K_{ikizkenar\ üçgen\ \&\ dik\ üçgen}$ şeklinde adlandırılmıştır.

1. grubun –diğer gruplardan farklı olarak– anahtar kavrayışa en yakın kavrayışa sahip oldukları görülmüştür. Şekil 1' de bu gruptaki öğrencilerin çizimine aittir:



Şekil 1 1. grubun 1. soru için Çizimi

1. gruptaki öğrencilerden birisi olan $Ö_1$ tarafından ifade edilen, sırasıyla işlem kümesi ve kontrol yapısı elemanları aşağıda yer almaktadır:

> İşlem kümesi elemanı: "İşte o [düzlemde rastgele işaretlenen] noktayı bulmak içinde iki tane çember çizeceğiz. [Yarıçapı] 3 cm olsun. Şöyle bir çember çizeceğiz. [M_2 merkezli çemberi çiziyor] Aynı şekilde buraya da çizeceğiz [M_1 merkezli çemberi çiziyor]"
>
> Kontrol sistemi elemanı: "Kesim noktalarını [M_1 ve M_2 merkezli çemberlerin kesim noktalarını] birleştireceğiz. Kesim noktalarını birleştirdiğimiz zaman, eş çemberlerin özelliğinden bunlar [M_1 ve M_2 noktaları] merkez olduğu için, şurayı [çemberlerin kesim noktaları ile M_1M_2 doğru parçası] birleştirdiğimizde burası buraya [çemberlerin kesim noktasını birleştiren doğru ile M_1M_2 doğru parçası] dik olacak."

Bu işlem kümesi ve kontrol yapısı elemanları incelendiğinde, grubun ikizkenar üçgen ve eş çember ile ilgili *bilmelerini* etkili bir şekilde kullandıkları söylenilebilir. Yani çember ve ikizkenar üçgen, öğrencilerin bilmelerinin *geçerlilik alanında* yer almaktadır denilebilir. Bu elemanlar matematiksel bilgi açısından değerlendirildiğinde ise Öklid geometrisi ile tutarlı olduğu görülmüştür.

1. grup dışındaki diğer gruplar, soruyu üçgen ile ilgili *bilmelerini* kullanarak cevaplamaya çalışmışlardır. Ancak gruplar belirledikleri doğrunun, neden soruda istenilen geometrik yer olduğunu açıklayamamışlardır. Sonuç olarak çember ile ilgili elemanlar kullanan tek grup olan 1. grubun, diğer gruplara göre daha güçlü kavrayışa sahip olduğu düşünülmektedir. Bir diğer durum ise grupların çoğunun, yaptıkları çizimler ile ortaya çıkan geometrik şekillerin özeliklerine dair yorumlamalarda bulunmuş olmalarıdır. Ayrıca öğrencilerin var olan bilmelerini temsil ederken çoğunlukla, cebirsel temsiller (denklemler, eşitsizlikler vb.) yerine geometrik temsilleri (doğru, doğru parçası, üçgen vb.) tercih etkileri görülmüştür.

2. soruya ait bulgular

Öğrencilere yöneltilen 1. ve 2. soruların sadece soruluş şekillerinde farklılık bulunmaktadır. 4. gruptaki öğrencilerden birisi olan $Ö_7$ 'nin; "Biraz öncekinden pek bir farklı değil ama. Biraz önce adına nokta demişlerdi şimdi C demişler fark etmez ki" ifadesinde görüldüğü gibi öğrenciler de bu durumu fark etmişlerdir. Grupların 1. soru ile ilgili çözümleri, bu soru için de geçerli olmuştur.

3. soruya ait bulgular

3. soru için yazılı ve sözlü veriler değerlendirildiğinde, tüm grupların anahtar kavrayışa ait elemanların hepsini kullanmasalar da, yeterli sayıda elemanlara sahip oldukları düşünülmektedir. Örneğin 3. gruptaki $Ö_6$, sorunun cevabının neden "hayır" olduğunu açıklamasında şöyle ifade etmiştir:

> $Ö_6$: Bence bu soruda CD, AB nin orta dikmesi olmayabilir. Çünkü orta dikme bunun [[CD] nın orta dikmesinin] uç kısmında da alınmış olabilir. Şu şekilde [[AB] ile [CD] birbirini ortalayacak şekilde] işte bu şekilde olur ama olmayabilirde yani.

Burada $Ö_6$, anahtar kavrayış dörtlüsünde de yer alan "orta dikmenin tanımını" kontrol yapısının bir elemanı olarak kullanmıştır. 1. gruptaki $Ö_2$ 'de, ancak "sadece şura şuraya [C ve D noktalarının [AB] nın orta noktasına uzaklıkları] eşitse olur" şartı sağlandığında sorunun cevabının evet olabileceğini belirtmiştir.

On iki öğrenciden sadece bir öğrenci sorunun cevabının "evet" olduğunu düşünmektedir. 6. grupta yer alan $Ö_{12}$, grup arkadaşının açıklamalarına rağmen verdiği bu cevabı değiştirmemiştir:

> $Ö_{11}$: CD doğru parçasının… eşit olacak… Yani olabilirde olmayabilirde..
>
> $Ö_{12}$: **Bence olur**.

Ö$_{11}$: AB orta dikmenin herhangi bir şeyi olduğu için.. parçası… Yani şöyle bir parça da [A ve B noktaları, [CD] nın orta noktasına uzaklıkları farklı olacak şekilde] olabilir, olmayadabilir…

Ö$_{12}$: **Orta dikmeyse şunlar eşittir, bunlar da eşittir.** [[AB] ile [CD] birbirini ortalaması**] Orta dikme çünkü. Bu** [[AB]] **onun** [[CD] nın] **orta dikmesi ise bunlarda eşit olmak** [[AB] nın iki eş parçaya ayrılmak] **zorundadır. Biri uzun olamaz ki..** Orta dikme olmaz ki o zaman!

Bu konuşmanın ardından grup, çizim yapmıştır. Fakat Ö$_{12}$, çizim sırasında da fikir değişikliğinde bulunmamıştır. Yukarıdaki konuşmada koyu renk ile belirtilen Ö$_{12}$'ye ait işlem kümesi elemanları göz önüne alındığında, Ö$_{12}$ 'nin kullandığı muhtemel kontrol yapısı elemanının; "Eğer [AB], [CD] nin orta dikmesi ise, bu iki doğru parçası birbirini ortalar" şeklinde olduğu söylenilebilir. Ö$_{12}$, sahip olduğu bu kontrol yapısı elemanına göre, sahip olduğu bilmelerinin *geçerlilik alanı* içinde *tutarlı* bir açıklamada bulunmuştur. Ancak grupta yer alan öğrencilerin kavrayışlarındaki elemanlar birbirlerinden farklı olduğu için, Ö$_{11}$ 'e göre (bu öğrenci, bir *gözlemci* olarak düşünülebilir) Ö$_{12}$ 'nin bu açıklaması *tutarsızdır*. Ö$_{12}$ 'nin kullandığı kontrol elemanına daha yakından bakılacak olunursa, orta dikme tanımı, "*geçmişteki bir bilginin, başarılı bir etkiye sahip"* (Brousseau, 1997) hali olarak ifade edilebilir. Aslında Ö$_{12}$, "bir doğru parçasının orta dikmesi, o doğru parçasının orta noktasından geçen ve doğru parçasını dik kesen bir doğru" olduğu şeklindeki matematiksel bilgiye sahiptir. Ancak bu bilgiyi karşılaştığı durumlara uygun şekilde adapte edemediği söylenilebilir.

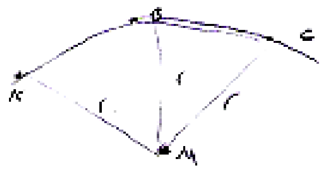
Sonuç olarak araştırmaya katılan öğrenciler, soruyu çözebilmek için gerekli olan kavrayış elemanlarını işe koşmuş ve çözüm sırasında "orta dikme" tanımını uygun bir şekilde kullanabilmişlerdir. Fakat sözel olarak ifade ettikleri düşüncelerini, geometrik ve cebirsel olarak ifade etme gereği duymamışlardır.

4. soruya ait bulgular

1. ve 4. grupları diğerlerinden ayıran temel farklılık; "bir doğru parçasının orta dikmesi" olma durumunu, çözümleri boyunca bir araç olarak kullanabilmeleridir. Grupların kavrayışları, kullandıkları elemanlar göz önünde bulundurulduğunda 1. ve 4. grubun $K_{orta\ dikme}$; 3. ve 4. grubun $K_{çember}$; 4. grubun $K_{dik\ üçgen}$; son olarak 2., 5. ve 6. grubun ise $K_{eşit\ uzaklık}$ şeklinde isimlendirilmiştir.

1. grup soruyu hemen cevaplamıştır: "Bu [nokta] bir tanedir. Çünkü böyle bunun [[AB]nın] orta dikmesini çizersek. Bununkini de [[AC]nın] çizersek. Bu noktadır [orta dikmelerin kesim noktasıdır.]". 3. gruptaki Ö$_6$ 'nın 3. soru için "orta dikme tanımını" kontrol

yapısı elemanı olarak kullandığı hatırlanacak olunursa (bakınız 3.soruya ait bulgular); 1. gruptaki Ö$_1$'in de aynı elemanı kullandığı görülebilir. Ancak 1. grup, bu tanımı işlem kümesi elemanı olarak kullanmıştır. Bu durum bir çelişki oluşturmamaktadır. Çünkü işlem kümesi ve kontrol yapısındaki elemanlar aynı olsa bile çözüm sürecindeki kullanım şekilleri ya da amaçları aynı olmayabilir (Vadcard & Luengo, 2005). 4. grup, 1. grup gibi soruyu okuduktan hemen sonra çözüme ulaşamamıştır. Önce çember ve dik üçgen ile ilgili *bilmelerini* kullanmışlardır. Sonrasında geometrik yeri, orta dikme *bilmelerini* kullanarak belirlemişlerdir. Bu gruptaki Ö$_7$, "sabit bir noktadan eşit uzaklıkta olan noktaların kümesi" şeklindeki "çember tanımını" kontrol yapısının bir elemanı olarak kullanarak A, B ve C noktalarının aynı çember yayı üzerinde olması gerektiğini belirtmiştir: "[A, B ve C noktalarını] çemberin üstündeki noktalar olarak çizerim. Çemberin merkezine eşit uzaklıktaki nokta olur. İşte şöyle bir yaydan geçirsek, bunlara eşit uzaklıkta olur." Bu öğrencinin yapmış olduğu çizim Şekil 1.2. 'de görülmektedir:



Şekil 2 4. grubun 4. soru için Çizimi

4. gruptaki Ö$_7$, noktaları "çember yayı üzerinde" seçerek, A, B ve C noktalarını düzlemde doğrusal olmayan üç nokta olarak sınırlandırdığını düşünmüştür. Sonrasında Ö$_8$ ise doğrusal olmayan bu üç noktanın "dik üçgenin köşe noktaları olacak şekilde" de çizilebileceğini vurgulamıştır. Böylece öğrenciler, çizdikleri dik üçgendeki köşe noktalarının hipotenüsün orta noktasına eşit uzaklıkta olduğunu fark etmişlerdir. Buradan öğrencilerin "Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortay çizilirse, hipotenüsün orta noktası üçgenin köşelerine eşit uzaklıktadır" şeklinde bir kontrol yapısı elemanı kullandıkları söylenilebilir. 4. grup bir süre uğraştıktan sonra bu sorunun, üçgenin kenarlarına ait "orta dikmelerinin" çizilmesi ile çözülebileceğini düşünmüş ve bu fikirlerini şekil çizerek desteklemişlerdir. Burada 4. gruba ait birbirinden farklı üç durum göz önünde bulundurulduğunda "*bu durumların bir gözlemcinin bakış açısına göre izomorfik*" (Balacheff & Gaudin, 2002) olduğu söylenilebilir. Ancak, üç durumun *uygulama alanı* 4. grup tarafından farklı olarak algılandığı için araştırmacılar tarafından da birbirinden farklı kavrayışlar olarak değerlendirilmiş ve ayrı ayrı

kodlanmıştır. 1. ve 4. grup dışındaki diğer gruplar, "orta dikmenin" bu sorunun çözümünde kullanılabileceğini fark edememiş bunun yerine çember ve uzaklık ile ilgili *bilmelerini* kullanarak çözümü elde etmeye çalışmışlardır.

5. soruya ait bulgular

5. soru için elde edilen veriler analiz edildiğinde; oldukça beklenmedik durumlar ile karşılaşılmıştır. Bu sorunun öğrencilere yöneltilme amacı diğerlerinden farklı olmamasına rağmen, analizinde farklı bir örüntü elde edilmiştir. Tüm gruplar bu soru için geometrik yeri "çember" olarak belirleyebilmişlerdir. Grupların kullandıkları işlem kümesi, temsil sistemi ve kontrol yapısı elemanları incelendiğinde, öğrencilerin uygun kavrayışlara sahip oldukları sonucuna varılmıştır. Üstelik yine tüm gruplar, belirledikleri geometrik yerin denklemini yazabilmişlerdir. Ancak mesele "belirlenen bu geometrik yerin grafiğini çizmek" olduğunda, grupların kavrayışları oldukça çeşitlilik göstermiştir. Bilindiği gibi grafikler, iki ya da daha fazla nicelik arasındaki ilişkileri göstermek için kullanılan temsillerden birisidir (Nathan & Bieda, 2006; Parmar & Signer, 2005). Hem teorik hem de uygulamalı matematiğin anlamlandırmasında oldukça önemli bir yere sahiptir (Roth & Lee, 2004). Bu nedenle elde edilen veriler ışığında grupların grafik kavrayışları ile ilgili kısa bir analiz yapılacaktır.

Öğrencilerin çoğunluğu geometrik yeri, çember olarak ifade edebilmelerine rağmen, istenilen grafiği çemberden tamamen bağımsız bir şekilde çizmeye çalışmışlardır. Bir grafiği çember olarak isimlendirmenin öğrenciler tarafından oldukça "tuhaf" karşılandığı gözlemlenmiştir. Öğrencilerin kBk modeline göre kodlanan grafik kavrayışları 1. grup için $K_{çember}$; 2., 4. ve 5. grup için $K_{fonksiyon}$; 3. ve 6. grup için ise $K_{doğru}$ olarak isimlendirilmiştir.

Araştırmaya katılan gruplar arasında, grafiğin çember olduğu hususunda anlaşmaya varan tek grup olan 1. grup, hiçbir zorluk yaşamadan geometrik yeri ve bu geometrik yerin denklemini kullanarak grafiği elde etmiştir. 2. gruptaki $Ö_3$ çemberin bir grafik olduğunu düşünmüş ancak $Ö_4$, "grafik deyince hani böyle fonksiyon grafikleri gibi" olması gerektiğini belirtmiş ve $Ö_3$ ile bir fikir birliğine varamamıştır. $Ö_4$ 'ün grafik çizimi ile ilgili kullandığı olası kontrol yapısı elemanı "çember bir grafik ile belirtilemez" şeklinde ifade edilebilir. Diğer muhtemel kontrol yapısı elemanları da "sadece bir fonksiyonun grafiği çizilebilir" veya "çember sadece bir geometrik şekildir" olabilir. Eğer 5. soru bir fonksiyonun grafik çizimini içerseydi, $Ö_4$ 'ün grafik çizimi ile ilgili *bilmeleri* bir uygulama alanına sahip olabilirdi. Böylece az önce sıralanan elemanlar, araştırmacılar tarafından uygun kontrol yapısı elemanı olarak değerlendirilebilirdi (Balacheff & Gaudin, 2002). Bu elemanlar $Ö_4$ 'ün *bilmesi* bağlamında *tutarlı* olmasına rağmen, matematiksel bilgi açısından uygun değildir. 5. grupta da benzer bir tartışma gündeme gelmiştir. Ö$_9$ çözüm sırasında çizdikleri çemberin bir *grafik* olduğunu söylemiş ancak Ö$_{10}$ ise çizdiklerinin sadece bir *şekil* olduğunu öne sürmüştür. Sonrasında Ö$_{10}$, "Böyle artacak azalacak, parabol" açıklamasında, sorulan grafiğin "bir parabol grafiği gibi" olması gerektiğini ifade etmiştir. 4. gruptaki Ö$_7$ ve Ö$_8$ ise soruyu çözerken analitik düzlemde çemberi çizmişlerdir yani soruda çizilmesi istenilen grafiği çizmişlerdir. Ö$_7$ 'nin yapmış olduğu "Grafik ne ya? Yani yıllara göre oran mı yapacağız?! Grafik çıkmaz ki buradan! Valla bu denkleme göre bir tane çember çizilir. Onu da çizik zaten!" açıklamasından da istenilen grafiği çizdiklerinin farkında olmadıkları anlaşılmaktadır. Ayrıca yine Ö$_7$ 'nin "maksimum 2 olur, x 2 'den fazla olursa çemberin dışına çıkar!" ifadesinde görüldüğü gibi Ö$_7$, çizilmesi istenen grafiğin, geometrik yer olan çember ile bir bağlantısını kurmak için işlem kümesi elemanları kullanmaktadır. Grup, "fonksiyon gibi bir grafik" olması gerektiğini düşünmüştür yani öğrencilerin "grafik" ile ilgili *bilmelerinin* bu soruda istenen grafik çizimi ile çeliştiği söylenilebilir (Brousseau, 1997). 3. ve 6. grup için ortaya çıkan kavrayışın; fonksiyon kavrayışından tek farkı, bu grupların grafik çizimini "doğru" ile ilişkilendirmeleri olmuştur. 3. gruptaki Ö$_5$ 'in, "Şuradan x 'e 1 verirsek, y 'ye 1 verirsek bir grafik çıksa" açıklamasında doğru denklemi çizimi ile ilgili bir işlem kümesi elemanını kullandığı düşünülmektedir. Ayrıca öğrencilerin temsil kümesi elemanları bir doğru grafiği çizmeye yönelik olmuştur.

1. grup dışındaki diğer gruplardaki öğrencilerin çoğunluğunun grafik çiziminde oldukça zorlandıkları ve soru için uygun olmayan *bilmelere* sahip oldukları düşünülmektedir. Ayrıca burada öğrencilerin bu *bilmeleri* nedeniyle, çemberin iki farklı temsili olan *denklem* ve *grafik* arasında geçiş yapamadıkları (Clement, Mokros, & Schultz, 1986) açıkça ortaya konulmuştur.

Sonuç ve Tartışma

kBk modeli ile problem çözme sürecindeki öğrenme, kavrayış dörtlüsünde yer alan bileşenler ile belirlenebilmektedir. Bileşenlerin arasında öne çıkanlar ise işlem kümesi ve kontrol yapısıdır. Eğer öğrenci, bu kriterleri doğru bir şeklide açıklayabiliyorsa, öğrencinin uygun bir kavrayışa sahip olduğu söylenilebilmektedir (Webber, Pesty, & Balacheff, 2002). Özellikle bir kavramın nasıl yapılandığını açığa çıkaran ortamlarda, öğrenci *bilmeleri* hakkında bilgi edinilebilmektedir. Öğrenci kavrayışlarının ortaya çıkarılmasında kBk modelinin ne derecede işlevsel olduğu diğer araştırmalarda olduğu gibi (Maracci, 2003; Maracci 2006; Martínez-Planell ve diğerleri, 2012; Miyakawa, 2004; Páez Murillo & Vivier, 2013; Webber ve diğerleri, 2002), bu araştırmada da bir kere daha teyit edilmiş ve öğrenmenin gerçekleşip gerçekleşmediğini kontrol etmek amacıyla kullanılabileceği sonucuna varılmıştır. Böylece araştırmada öğretilen ve öğrenilen kavramlar hakkında, daha geniş perspektif içeren yorumlar yapılabilmiştir.

Araştırmada geometrik yer ile ilgili –özel olarak orta dikme, çevrel çemberin merkezi ve çember– öğrenci kavrayışları incelenmiştir. Araştırmacılar tarafından hazırlanan anahtar kavrayış dörtlüsü ile öğrencilerin kavrayış dörtlüleri arasındaki derin farklılıklar aslında öğrencilerin sınıf ortamında karşılaştıkları içerik *bilgisi* ile zihinlerinde yapılandırdıkları *bilmeler* arasındaki farklılığa işaret etmektedir. Öğrencilerin gerekli kriterleri, cebirsel ve geometrik temsiller kullanmadan açıklamaya çalıştıkları sonucuna varılmıştır. Anahtar kavrayışla yapılan karşılaştırmada, öğrencilerin çoğunun geometrik yer kavrayışlarının sezgisel olduğu, uygun olmayan kavrayışlara sahip oldukları ve bu kavrayışlarını irdelemeksizin kullandıkları belirlenmiştir. Yine bu araştırmada öğrencilerin kavrayışlarının teşhisinin ve belirlenmesinin ne denli güç olduğu görülmüştür. Bu güçlüğün, öğrencilerin sahip oldukları kavrayışların (uygun ya da değil) geniş bir çeşitlilik göstermesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Bunun yanında öğrenciler, birbiriyle bağlantılı olduğu düşünülen farklı bilmelerini bir arada kullanmıştır. kBk modeline göre bu tespit, konu ve ortam arasındaki farklı etkileşimlerden dolayı farklı durumlar oluşması ve oluşan farklılığın da farklı bilmelere yol açması şeklinde yorumlanabilir (Mesa, 2004). Bu nedenle bir kavram ile ilgili direkt sorular sormak yerine, farklı problem durumlarının oluşturulması gerekmektedir. Ayrıca sınıf ortamında sunulacak olan problemlerin, bir kavramın farklı yönlerini yansıtacak şekilde tasarlanması gerektiği görülmüştür (Balacheff & Gaudin, 2002; Modestou & Gagatsis, 2013). Bu tür durumlar oluşturulmadığında öğretmenler, öğrencileri uygun kavrayışlara sahip olmasalar bile, onların uygun kavrayışlara sahip olduğunu düşünebilirler.

1. grup hariç diğer grupların, 5. soru için verdikleri cevaplar, kBk modeline göre incelenmiş ve grafik ile ilgili olan "dikkate değer ve başarılı" (Brousseau, 1997) *bilmeler* tespit edilememiştir. Bu durum, Maracci (2003) tarafından öğrencilerin lineer cebir ile ilgili güçlükleri belirlediği çalışmasında da belirtilmiştir. Öğrencilerin çoğu "grafik, iki değişken arasındaki ilişkiyi göstermek amacıyla kullanılan bir temsildir" (Nathan & Bieda, 2006; Parmar & Signer, 2005) şeklindeki kontrol yapısı elemanına sahip olmasına rağmen, çemberin iki farklı temsili olan denklem ve grafik arasında bağlantı kuramamışlardır. Yani bu öğrenciler kavramsal anlamanın güçlü bir göstergesi olarak kabul edilen (Greeno & Hall, 1997) farklı temsiller arasında geçişi yapamamışlardır. Grafiği kendi *bilmelerine* uygun

olacak şekilde bir statik obje –resim– olarak algıladıkları görülmüştür (Clement ve diğerleri, 1986). Bu araştırmada statik obje yani resim, fonksiyon ve doğru olarak ortaya çıkmıştır. Sonuç olarak, öğrencilerin daha önceden yapılandırdıkları "fonksiyon" ve "parabol" gibi kavramlarla ilgili olan *bilmelerinin*, bu problem durumu ile uyuşmadığı (Mesa, 2010) ve çözüm sırasında güçlükler yaşadıkları tespit edilmiştir. 5. sorudaki verilerin analizi, "*y=2x+1 denkleminin grafiğini çiziniz olsaydı ne olurdu?*" sorusunu da gündeme getirmiştir. Muhtemelen öğrenciler doğru grafiği ile ilgili uygun kavrayış dörtlüsü elemanları ortaya koymuş olacaklardı. 5. soru bir "doğru" yerine "çember" ile ilgili olduğundan öğrencilerin var olan kavrayışları çalışmamıştır. Bu durum öğrenciler için çelişki oluşturmuş ve böylece grafik bilmelerindeki sıkıntılar görülebilmiştir.

Öneriler

Öğrencinin bir kavram hakkındaki *bilmeleri*, ancak ve ancak kavramı nasıl yapılandırdığını ortaya çıkaran ortamlarda öğrenilebilir (Balacheff & Gaudin, 2002; Martínez-Planell ve diğerleri, 2012). Araştırmada 5. soru ile grafik kavramının yapılanmasını ortaya koyacak şekilde zengin bir ortam oluşturulabilmiştir. Bu bağlamda, öğrenme ortamlarında öğrencilerin uygun ve açık uçlu problemlerin olduğu ortamlarda (Balacheff & Gaudin, 2010) yer almaları gerektiği düşünülmektedir. Bir sonraki araştırmalar grafik kavramına yönelik yapılabilir. Öğrencilerin, buldukları denklemin adını söylemekte ve taslak çizimler yapmakta sıkıntı yaşamazlarken, koordinat sistemindeki grafik çiziminde neden bu kadar zorlandıkları ve başarısız oldukları sorusu araştırılabilir.

Yapılan bu araştırmada öğrencilerle "geometrik yer" kavramına dair bir tek oturum yapılmıştır. kBk modeli ile ilgili yapılabilecek bundan sonraki çalışmalarda, birbiriyle bağlantılı olan kavramlarla ilgili olarak birkaç oturum yapılabilir. Ayrıca öğrencilerin gözlemlenmesi sonucunda ortaya çıkan kavrayışları belirlendikten sonra, araştırmacı tarafından net bir şekilde ortaya konamayan öğrenci çözümleri ve kavrayış elemanlarını netleştirmek için görüşme ya da görüşmeler yapılabilir.

Kaynakça

Adams, W. M. (1866). *Outlines of geometry; or, the motion of a point.* Melborne: BiblioBazaar

Atallah, F. (2003). *Mathematics through their eyes: Student conceptions of mathematics in everyday life*. Unpublished doctoral dissertation, Concordia University, Canada**.**

Balacheff, N. (2000). A modeling challenge: untangling learners' knowing, *Journées Internationales d'Orsay sur les Sciences Cognitives: L'apprentissage*, Paris. http://www-didactique.imag.fr/Balacheff/TextesDivers/JIOSC2000.html.

Balacheff, N., & Gaudin, N. (2002). Students conceptions: an introduction to a formal characterization, *Cahier du laboratoire Leibniz* 65, http://wwwleibniz.imag.fr/LesCahiers/Cahiers2002.html.

Balacheff, N., & Gaudin, N. (2003). 'Baghera assessment project' , In S. Soury-Lavergne (Ed.)**,** *Baghera Assessment Project: Designing an Hybrid and Emergent Educational Society*. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, 81, Grenoble, Laboratorie Leibniz-IMAG.

Balacheff, N., & Gaudin, N. (2010). Modeling students' conceptions: The case of function. *Research in collegiate mathematics education, 7,* 207–234.

Bishop, A. J. (2002). Critical challenges in researching cultural issues in mathematics education. *Journal of Intercultural Studies in Education, 23*(2), 119–131.

Breidenbach, D. , Dubinsky, E., Hawals, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, *2,* 247–285.

Brousseau G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurements. *Journal of Mathematical Behavior, 23,* 1–20.

Casey, J. (1888). *A sequel to the first six books of the elements of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry with numerous examples*. Dublin: Hodges Figgis.

Cha, S., & Noss, R. (2002). Designing to exploit dynamic-geometric intuitions to make sense of functions and graphs, In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 209–216). Norwich, UK.

Chieu,V. M. & Herbst, P. (2011). Designing an intelligent teaching simulator for learning to teach by practicing. *ZDM-The International Journal of Mathematics Education, 43*, 105–117

Clement J., Mokros, J. R., & Schultz, K. (1986). *Adolescents' graphing skills: A descriptive analysis.* The Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Heath, T.L. (1961). *Apollonius of Perga*. Great Britain: Cambridge University.

Gorghiu, G., Păuna, N., & Gorghiu, L. M. (2009). Solving geometrical locus problems using dynamic interactive geometry applications. In A. Méndez-Vilas, A. Solano Martín, J.A. Mesa González. & J. Mesa González (Eds.), *Research, Reflections and Innovations in Integrating ICT in Education* (pp. 814–818). Badajoz, Spain: Formatex.

Greeno, J. G., & R. P. Hall., (1997). Practicing Representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan, 78*(5), 361–367.

Kaldrimidou M., & Tzakaki M., (2005). Theoretical issues in research of mathematics education: some considerations. In M. Bosch (Ed), *The Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1244–1253). Sant Feliu de Guíxols, Spain

Maracci, M., (2003). Difficulties in vector space theory: A compared analysis in terms of conceptions and tacit models. In N.A. Pateman, B. J. Doherty, & J. Zilliox (Eds.). *Proceedings of the 27th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 229–236). Honolulu, Hawaii, USA.

Maracci, M. (2006). On students' conceptions in vector space theory. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings of the 30th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.129–136). Prague, Czech Republic.

Martínez-Planell R., Gonzalez, A. C., DiCristina G., & Acevedo, V. (2012). Students' conception of infinite series. *Educational Studies in Mathematics, 81, 235–249.*

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: an empirical approach. *Educational Studies in Mathematic*s, 56, 255–286.

Mesa, V. (2010). Strategies for controlling the work in mathematics textbooks for introductory calculus. *Research in Collegiate Mathematics Education, 7*, 235–265.

Miyakawa, T. (2004). Reflective symmetry in construction and proving. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 337–344). Bergen, Norway.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2013). A didactical situation for the enhancement of meta-analogical awareness. *Journal of Mathematical Behavior, 32*, 160– 172.

Nathan, M. J., & Bieda, K. N. (2006). What gesture and speech reveal about students' interpretations of Cartesian graphs: Perceptions can bound thinking. *Wisconsin Center for Education Research.* (WCER Working Paper No. 2006-2).

Páez Murillo, R. E., &Vivier L. (2013). Teachers' conceptions of tangent line. *Journal of Mathematical Behavior, 32*, 209– 229.

Parmar, R. S., & Signer, B. R. (2005). Sources of error in constructing and interpreting graphs: A study of fourth- and fifth-grade students with LD. *Journal of Learning Disabilities, 38*(3), 250–261.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Roth W., & Lee, Y. J. (2004). Interpreting unfamiliar graphs: A generative, activity theoretic model. *Educational Studies in Mathematics, 57,265–290.*

Selden, A., & Selden J. (1992). Research perspectives on conceptions of function: Summary and overview. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* (pp. 1–16). MAA Notes 25: Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1992). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects on different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1–36.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. (pp. 22–58). MAA Notes 25: Mathematical Association of America.

Skemp, R. R. (1986). *The psychology of learning mathematics*. (2nd ed.). Middlesex, England: Penguin Books.

Tayler, J. (1993). Some thoughts on locus - Its place in the 2 unit syllabus. *Journal of the Mathematical Association of NS.* November.

http://hsc.csu.edu.au/maths/teacher_resources/2384/prof_reading/journals/tayler/tayler.htm

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In A. D. Grows (Ed.). *Handbook of research on mathematics learning and teaching*. (pp. 127–146). Macmillan, New York.

Vadcard, L., & Luengo, V. (2005). Interdisciplinary approach for the design of a learning environment.. In G. Richards (Ed.), *Proceedings of World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education 2005* (pp. 2461-2468). Chesapeake, VA: AACE.

Vergaund, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 167–181.

Webber, C., Pesty S., & Balacheff, N. (2002). A multi-agent and emergent approach to learner modelling. In F. van Harmelen (Ed.). *Proceedings of the 15th European Conference on Artificial Intelligence*. Amsterdam: IOS Press.

Webber, C., & Pesty, S. (2002). Emergent Diagnosis via Coalition Formation. In F.J. Garijo, J.C. Riquelme, and M. Toro (Eds.). *VIII Iberoamerican Conference on Artificial Intelligence* (pp. 755–764) Seville, Spain.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2006). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.