Cilt: 05 Sayı: 02 Sayfa: 20-29 ISSN No: 1303-6319 Volume: 05 Number: 02 Page: 20-29

OTOREGRESİF HAREKETLİ ORTALAMALAR SÜRECİNDE, TERSİNİR SIÇRAMALI MARKOV ZİNCİRİ MONTE CARLO YÖNTEMİ İLE BAYESCİ MODEL SEÇİMİ

Erol EĞRİOĞLU[*] **Süleyman GÜNAY**[**]

ÖZET

Otoregresif hareketli ortalama (ARMA) modellerinde, model derecesinin belirlenmesi için çok değişik yaklaşımlar önerilmiştir. Model derecesinin belirlenmesinde en sık kullanılan Box-Jenkins yönteminde otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının grafiklerinden yararlanılır. Bu yöntem deneyime dayalı bir yöntemdir. Otoregresif hareketli ortalama modellerinin derecesinin belirlenmesinde, Bayesci model seçim yöntemleri de kullanılabilir. Tersinir sıçramalı Markov zinciri Monte Carlo (RJMCMC) yöntemi, parametre uzayları arasında sıçramaya olanak tanıyan etkin bir yöntemdir. Bu çalışmada, Troughton tarafından otoregresif süreçler için önerilen tersinir sıçramalı Markov zinciri Monte Carlo algoritması otoregresif hareketli ortalamalar modeline uyarlanmıştır. Önerilen yeni algoritma simülasyon ile üretilen bir zaman serisine uygulanmıştır.

Anahtar kelimeler: Bayesci Model Seçimi, Otoregresif Hareketli Ortalamalar Modeli, Tersinir Sıçramalı Markov Zinciri Monte Carlo Yöntemi.

1. GİRİŞ

Doğrusal zaman serilerinin çözümlenmesinde ARMA modelinin kullanıldığı bir çok çalışma literatürde yer almaktadır. ARMA modelleri ile doğrusal zaman serilerinin modellenmesi için kullanılan ilk yaklaşım Box ve Jenkins (1976) tarafından önerilmiştir. Box-Jenkins yöntemi olarak bilinen bu yaklaşımda ARMA modelinin derecesi, otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının grafiklerinden belirlenmektedir. Bu yöntemde araştırmacı tecrübeye dayalı olarak model derecesini belirlemektedir. Bu nedenle ARMA modellerinde, model derecesinin belirlenmesinde seçenek yöntemlere ihtiyaç duyulmuştur. ARMA modellerinde, model derecesinin belirlenmesine yönelik ilk Bayesci çalışma Monahan (1983) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada model derecesi analize dahil edilerek Bayes çarpanları yardımıyla model seçimi yapılmıştır. Ancak bu çalışma karmaşık sayısal integrasyon teknikleri gerektirdiğinden uygulaması zordur. Son yıllarda Markov Zinciri Monte Carlo (MCMC) yöntemleri kullanılarak zaman serilerinin modellenmesi üzerine çalışmalar yapılmaktadır. RJMCMC yöntemi Green (1995) tarafından önerilmiştir.

[*] Yrd. Doç.Dr.., Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Samsun.
e-posta: erole@omu.edu.tr
[**] Prof. Dr., Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara.
e-posta: sgunay@hacettepe.edu.tr

Bu yöntemler ile parametre tahminin yanı sıra model seçimi yapmak da mümkündür. RJMCMC yöntemi ile otoregresif sürecin derecesinin belirlendiği çalışmalar; Troughton ve Godsill (1998), Vermaak vd. (2004) ve Troughton (1999)'un çalışmalarıdır. Vermaak vd. (2004) çalışmasında, otoregresif sürecin parametrelerinin uygun bir dönüşüm ile tekrar parametrelendirilmesiyle durağanlık koşulları içinde tahmin yapan ve RJMCMC yöntemini kullanan bir algoritma önerilmiştir. Troughton (1999) ise, otoregresif sürecin parametrelerini ve model derecesini belirleyen ancak durağanlık koşullarını gözetmeyen üç ayrı algoritma önermiştir.

Bu makalede Troughton (1999)'un çalışmasında otoregresif sürecin RJMCMC ile çözümlendiği iç içe model yapısını kullanmayan algoritma ARMA modellerine genişletilerek, yeni bir algoritma elde edilmiştir. Bu algoritmada ARMA modelinin parametrelerinin tahmini ile birlikte model derecesi de belirlenmektedir.

Çalışmanın ikinci bölümünde ARMA modelleri hakkında kısa bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde RJMCMC yöntemi özetlenmiştir. Dördüncü bölümde bu çalışmada önerilen yöntem tanıtılmıştır. Beşinci bölümde ise yeni algoritma yapay bir zaman serisi üzerinde uygulanmıştır. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

2. ARMA MODELLERİ

(p,q) dereceden bir ARMA modeli $e_t \sim N(0,\sigma_e^2)$ olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$\phi(B)X_t = \theta(B)e_t \tag{1}$$

Burada, $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$, $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$ ve $B^p X_t = X_{t-p}$ olmaktadır. $\{X_1,...,X_n\}$ zaman serisinin n birimlik gözlemi olmak üzere ve (1) modeli için $X_{(0)} = (X_{-p},...,X_0,e_{-q},...,e_0)$ vektörü koşulu altında koşullu olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$L(\phi_1,...,\phi_p,\theta_1,...,\theta_q / X_{(0)},X_{(1)}) = (2\pi\sigma_e^2)^{-(n-p-q)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\sum_{t=p+q+1}^{n} e_t^2\right\} \tag{2}$$

Yerince büyük örnekler için (2) koşullu olabilirliği, tam olabilirlik fonksiyonuna yakınsar.

3. RJMCMC ALGORİTMASI

Bayesci model seçimine olanak tanıyan RJMCMC yöntemi Green (1995) tarafından önerilmiştir. RJMCMC algoritmasında göz önünde bulundurulan tüm modellerin çarpım uzayında hareket etmek yerine, modellerin parametre uzayları arasında geçiş yapabilen bir Markov zinciri oluşturulmaktadır.

Algoritmanın işleyişi aşağıdaki gibi özetlenebilir.

1. Markov zincirinin geçerli durumu (j,θ_j) olsun. Burada θ_j , n_j boyutludur.
2. $h(j,j')$ olasılığı ile yeni bir j' modelinin önerilmesi.
3. $q(u/\theta_j,j,j')$ öneri yoğunluğundan u'nun üretilmesi.
4. $(\theta'_j,u')=g_{j,j'}(\theta_j,u)$ yapılması. Burada $g_{j,j'}(\theta_j,u)$ birebir ve örten bir fonksiyondur. Bu boyut eşleme fonksiyonudur ve $n_j+\dim(u)=n'_j+\dim(u')$ dür.
5. j'den j' 'ne hareketin, aşağıda verilen olasılık ile kabul edilmesidir.

$$\alpha_{i\to j'}=\min\left\{1\ ,\ \frac{f(y/\theta'_j,M=j')p(\theta'_{j'}/M=j')\pi_{j'}h(j',j)q(u'/\theta_{j'},j',j)}{f(y/\theta_j,M=j)P(\theta_j/M=j)\pi_j h(j,j')q(u/\theta_j,j,j')}\times\left|\frac{\partial g(\theta_j,u)}{\partial(\theta_j,u)}\right|\right\} \qquad (3)$$

Bu adımda j'=j olduğunda, Metropolis Hastings adımı Gibbs adımına dönmektedir.

4. ARMA SÜREÇLERİNDE RJMCMC YÖNTEMİ

Otoregresif modelde RJMCMC yöntemi ile çözümleme yapabilen üç algoritma Troughton (1999) tarafından önerilmiştir. Bu algoritmalardan birincisi doğum ve ölüm hareketine dayalı, ikincisi parametrelerin tam koşullu dağılımlarına dayalı ve üçüncüsü otoregresif modellerin iç-içe model yapısını göz ardı eden tam parametre vektörü dağılımlarına dayalıdır. Üçüncü yaklaşım iç-içe model yapısını göz ardı ettiğinden, ilk iki yaklaşıma göre bir üstünlüğü yoktur. Ancak ilk iki yaklaşım iç-içe modeller için kullanılabileceğinden ARMA modellerine uyarlanamaz. Bu nedenle ARMA modellerinde RJMCMC ile model derecesi ve parametre tahminlerini elde etmeye olanak tanıyan bir yöntem tam parametre vektörü dağılımlarına dayalı olarak işleyen Troughton'un üçüncü algoritmasının genişletilmesi ile elde edilebilir.

(1) modelinin özel durumları olan ARMA(1,0), ARMA(2,0), ARMA(0,1), ARMA(0,2) ve ARMA(1,1) modelleri göz önüne alınsın. Önerilen algoritmada bu beş model için RJMCMC algoritması uygulanmaktadır. Bir başka ifade ile algoritmanın sonuçta seçeceği model bu beş modelden biri olacaktır. İncelenecek model sayısı istenirse arttırılabilir. (1) modelinin bu özel durumları için tüm parametrelerin vektörü $\psi=(\phi_1,\theta_1,\phi_2,\theta_2)$ şeklindedir. Modeller aşağıdaki indisler ile gösterilsin.

$k=1$ ise, model ARMA(1,0) modelidir ve kısmi parametre vektörü $\psi^{(1)}=(\phi_1)$ 'dir.
$k=2$ ise, model ARMA(2,0) modelidir ve kısmi parametre vektörü $\psi^{(1)}=(\phi_1,\phi_2)$ 'dir.
$k=3$ ise, model ARMA(0,1) modelidir ve kısmi parametre vektörü $\psi^{(1)}=(\theta_1)$ 'dir.
$k=4$ ise, model ARMA(0,2) modelidir ve kısmi parametre vektörü $\psi^{(1)}=(\theta_1,\theta_2)$ 'dir.
$k=5$ ise, model ARMA(1,1) modelidir ve kısmi parametre vektörü $\psi^{(1)}=(\phi_1,\theta_1)$ 'dir.

Model derecesi için önsel dağılım olarak Troughton (1999) çalımasındaki üçüncü algoritmadaki gibi kesikli uniform dağılım alınabilir. ψ parametrelerin önsel dağılımı ise normal dağılım olarak alınır. σ_e^2 için ters Gama dağılımı önsel dağılım olarak seçilir.

Sonuç olarak önsel dağılımlar aşağıdaki gibidir.

$$P(k)=\begin{cases}\frac{1}{5} & , \ k=1,2,3,4,5\\ 0 & , \ d.d.\end{cases}$$

$$P(\psi^{(k)}/\sigma_a^2)=N(\mu_{pa^{(k)}},C_{pa^{(k)}})$$
$$P(\sigma_e^2)=IG(\alpha_e,\beta_e)$$

Burada, $\mu_{pa^{(k)}}=0$ ve $C_{pa^{(k)}}=\sigma_a^2 I_k$ olarak alınmıştır. Troughton (1999) tarafından önerilen üçüncü algoritma için, eşitlik (3)'te verilen kabul olasılığı aşağıdaki gibi ARMA modeline uyarlanabilir.

$$\alpha(k\rightarrow k'/X,\sigma_a^2,\sigma_e^2)=\min\left(1,\sqrt{\frac{\left|C_{ca^{(k')}}\right|\left|C_{pa^{(k)}}\right|}{\left|C_{ca^{(k)}}\right|\left|C_{pa^{(k')}}\right|}}\frac{\exp\left\{\frac{1}{2}\mu_{ca^{(k')}}^T C_{ca^{(k')}}^{-1}\mu_{ca^{(k')}}\right\}}{\exp\left\{\frac{1}{2}\mu_{ca^{(k)}}^T C_{ca^{(k)}}^{-1}\mu_{ca^{(k)}}\right\}}\right) \tag{4}$$

Burada ,

$$C_{ca^{(k)}}=\left(\frac{1}{\sigma_e^2}X^{(k)T}X^{(k)}+C_{pa^{(k)}}^{-1}\right)^{-1}$$
$$\mu_{ca^{(k)}}=\frac{1}{\sigma_e^2}C_{ca^{(k)}}X^{(k)T}X_{(1)}$$

şeklindedir.

$X^{(k)}$ ise modelin derecesine göre oluşturulan veri matrisidir. Eşitlik (4)'te verilen kabul olasılığına göre modeller arası geçiş yapılabilir. Modellerde kullanılan öneri dağılımı, Troughton (1999) da kesikli Laplace dağılımıdır. Burada ise kesikli uniform dağılımdan öneri yapılmaktadır. Ancak her iki dağılımda simetrik olduğundan, Troughton (1999) tarafından önerilen formülasyon geçerlidir.

$\psi^{(k)}$ ve σ_e^2 parametreleri için ise aşağıdaki dağılımlardan yararlanarak örnek çekilir.

$$\psi^{(k)}\sim N(\mu_{ca^{(k)}},C_{ca^{(k)}}) \tag{5}$$

$$\sigma_e^2 \sim IG(\alpha_{se}, \beta_{se}) \ , \ \alpha_{se} = \alpha_e + \frac{1}{2} n_k \ , \ \beta_{se} = \beta_e + \frac{1}{2} e^T e \qquad (6)$$

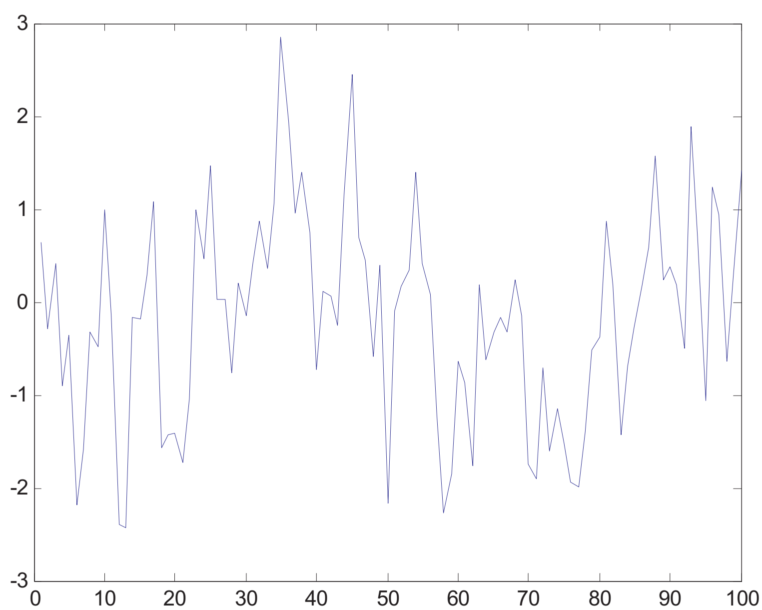
Buradaki n_k ;1. ve 3. modelde n-1, 2., 4. ve 5. modellerde ise n-2'dir. Bu durumda önerilen yeni algoritma aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Algoritma. RJMCMC'nin ARMA modellerine uygulaması;

Adım 1. Parametreler için başlangıç değerlerinin belirlenmesi.
Adım 2. Öneri dağılımından (uniform dağılım) modeller arası hareket için bir k' değerinin üretilmesi.
Adım 3. U(0,1) standart uniform dağılımından bir α_0 değerinin üretilmesi.
Adım 4. (4)'te verilen eşitlikten $\alpha(k \rightarrow k' / X, \sigma_e^2, \sigma_a^2)$ kabul olasılığının hesaplanması.
Adım 5. Eğer $\alpha_0 < \alpha(k \rightarrow k' / X, \sigma_e^2, \sigma_a^2)$ ise, $k = k'$ alınarak yeni modele hareket edilmesi. Eğer $\alpha_0 > \alpha(k \rightarrow k' / X, \sigma_e^2, \sigma_a^2)$ ise, yeni modele hareket edilmemesi.
Adım 6. (5) ve (6) dağılımlarından parametreler için örneklem çekilmesi.
Adım 7. Adım 2 ve Adım 6'nın belli bir yineleme sayısı için tekrar edilmesi.

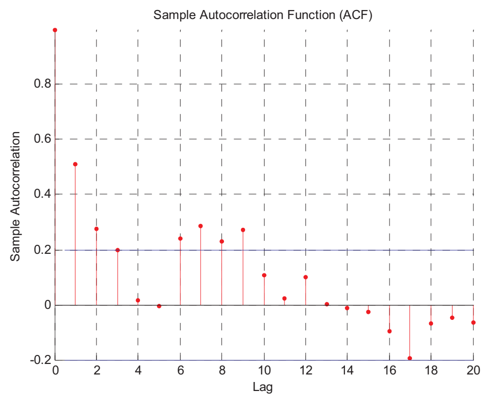
5. UYGULAMA

Önerilen yaklaşım simülasyon ile üretilmiş birinci dereceden otoregresif (AR(1)) zaman serisine uygulanmıştır. Üretilen simülasyon serisinin grafiği Şekil-1'de verilmiştir. Bu zaman serisinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının grafikleri ise Şekil 2a ve Şekil 2b'de verilmiştir.

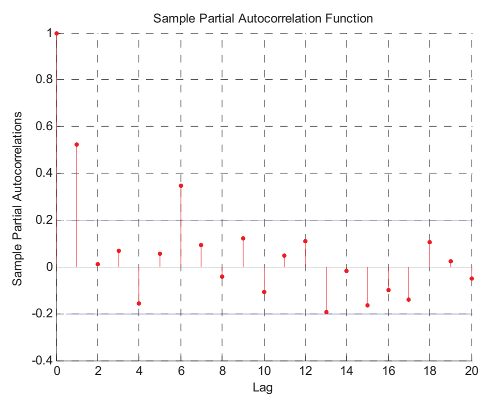


Şekil 1. Simülasyon ile elde edilen AR (1) serisinin grafiği

Şekil 2'deki otokorelasyon grafiklerinden zaman serisine Box-Jenkins yöntemine göre AR(1) modelinin uygun görülebileceği açıktır. Bu çalışmada önerilen algoritma kullanıldığında elde edilen sonsal model olasılıkları Tablo 1'de verilmiştir. Önerilen algoritmanın 0,98 sonsal olasılık ile doğru AR(1) modelini seçtiği görülmektedir. Bu sonsal model olasılıklarına, önerilen algoritmanın 20000 iterasyon çalışması ve ilk 1000 değerin durağan dışı dağılım gösterdiğinden elenerek, kalan 19000 örneklem üzerinden ulaşılmıştır. Elde edilen örneklemlerin yakınsaması çeşitli MCMC diyagnostikleri ile denetlenmiştir. Önerilen algoritma MATLAB'da programlanmıştır. ϕ_1 parametresi için elde edilen örneklemin yakınsamasını denetlemek için kullanılan testlerin sonuçları Tablo 2'de verilmiştir.



Şekil 2a. Simülasyon ile elde edilen serisinin otokorelasyon grafiği



Şekil 2b. Simülasyon ile elde edilen zaman serisinin otokorelasyon grafiği

Tablo 1. Sonsal model olasılıkları

Model	Sonsal Olasılık
AR1	0.9821
AR2	0.0009
MA1	0.0161
MA2	0.0000
ARMA(1,1)	0.0009

Tablo 2. Algoritma sonunda ϕ_1 için elde edilen örneklemin yakınsama teşhisi sonuçları

MCMC CONVERGENCE diagnostics
Based on sample size = 18661
Autocorrelations within each parameter chain

Variable	Lag 1	Lag 5	Lag 10	Lag 50
variable 1	0.007	-0.008	0.004	-0.001

Raftery-Lewis Diagnostics for each parameter chain
(q=0.0250, r=0.010000, s=0.950000)

Variable	Thin	Burn	Total(N)	(Nmin)	I-stat
variable 1	1	1	938	937	1.001

Geweke Diagnostics for each parameter chain

Variable	Mean	std dev	NSE iid	RNE iid
variable 1	0.506214	0.009464	0.000069	1.000000

Variable	NSE 4%	RNE 4%	NSE 8%	RNE 8%	NSE 15%
variable 1	0.000068	1.036474	0.000070	0.974243	0.000071

Geweke Chi-squared test for each parameter chain
First 20% versus Last 50% of the sample
Variable variable 1

NSE estimate	Mean	N.S.E.	Chi-sq Prob
i.i.d.	0.506307	0.000061	0.150199
4% taper	0.506307	0.000055	0.115314
8% taper	0.506304	0.000060	0.115194
15% taper	0.506305	0.000059	0.119618

Tablo 2 incelendiğinde elde edilen örneklemin 1.,5.,10. ve 50. gecikmeklerde küçük otokorelasyon değerleri aldığı görülmektedir. Ayrıca Geweke (1992) tarafından önerilen testten elde edilen Ki-Kare olasılıklarının 0.05'den büyük olduğu ve Raftery ve Lewis (1995) tarafından önerilen I-stat istatistiğinin 5'den çok küçük olduğu görülebilir. Dolayısıyla elde edilen örneklem, tüm yakınsama ölçütlerine göre, yakınsama problemi içermemektedir. Benzer şekilde Tablo 3 incelendiğinde, σ_e^2 içinde yakınsama problemi olmadığı görülmektedir.

Tablo 3. Algoritma sonunda σ_e^2 için elde edilen örneklemin yakınsama teşhisi sonuçları

MCMC CONVERGENCE diagnostics
Based on sample size = 18661

Autocorrelations within each parameter chain

Variable	Lag 1	Lag 5	Lag 10	Lag 50
variable 1	0.005	-0.007	0.002	0.003

Raftery-Lewis Diagnostics for each parameter chain
(q=0.0250, r=0.010000, s=0.950000)

Variable	Thin	Burn	Total(N)	(Nmin)	I-stat
variable 1	1	2	943	937	1.006

Geweke Diagnostics for each parameter chain

Variable	Mean	std dev	NSE iid	RNE iid
variable 1	0.687921	0.071412	0.000524	1.000000

Variable	NSE 4%	RNE 4%	NSE 8%	RNE 8%	NSE 15%
variable 1	0.000514	1.036165	0.000475	1.216007	0.000413

Geweke Chi-squared test for each parameter chain
First 20% versus Last 50% of the sample
Variable variable 1

NSE estimate	Mean	N.S.E.	Chi-sq Prob
i.i.d.	0.688092	0.000626	0.630302
4% taper	0.688180	0.000624	0.596041
8% taper	0.688136	0.000609	0.599897
15% taper	0.688094	0.000576	0.600106

Algoritma sonucunda elde edilen parametre tahmin değerleri ise

$$\sigma_e^2 = 0.688092\ ,\ \phi_1 = 0.506307$$

olarak bulunmuştur. Simülasyon zaman serisindeki gerçek değerler ise $\sigma_e^2=1$ ve $\phi_1=0.5$'dir. Simülasyon zaman serisi SPSS 11.5 programı yardımıyla Box-Jenkins yöntemi ile çözülürse

$$\sigma_e^2 = 0.75,\ \phi_1 = 0.4566$$

sonuçları elde edilmektedir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, önerilen yeni algoritma simülasyonu ile elde edilen AR(1) zaman serisine uygulanmıştır. Sözü edilen veri için algoritma parametre tahmin sonuçları ve model derecesi belirlemesi açısından çok başarılı sonuçlar vermiştir. Verilen algoritmanın ayrıntılı bir simülasyon çalışması ile üstün ve zayıf yönleri tartışılabilir. Önerilen algoritma da yaklaşık olabilirlik fonksiyonu kullanılmıştır. Yaklaşık olabilirliğin öneri dağılımı olarak alındığı ve tam olabilirlik fonksiyonunun, gerçek olabilirlik olarak kullanıldığı bir Metropolis-Hastings algoritması ile algoritmanın daha iyi parametre tahmin sonuçları elde edecek şekilde düzeltilmesi mümkündür. Ancak önerilen algoritma bazı parametreler için SPSS paket programında yer alan Marquardt yönteminden daha iyi sonuçlar vermektedir. Önerilen algoritmanın ayrıntılı bir incelemesi geniş bir simülasyon çalışması ile yapılabilir.

7. KAYNAKLAR

Box, G.E.P. and Jenkins G.M., 1976. Time series analysis, forecasting and control. Holden Day, California.

Geweke, J., 1992. Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments. Bayesian Statistics, 4, J.M Bernardo, J.0. Berger, A.P. Dawid, and A.F.M Smith, (eds.), pp. 641-649. , Oxford: Clarendon Press.

Green P. J., 1995. Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination. Biometrica, 82 , 711-732.

Monahan J.F., 1983. Fully Bayesian analysis of ARMA time series models. Journal of Econometrics , 21, 307-331.

Raftery A.E. and Lewis S.M. 1995. The number of iterations, convergence diagnostics and generic Metropolis algorithms, In Practical Markov Chain Monte Carlo (W.R. Gilks, D.J. Spiegelhalter and S. Richardson, eds.), London, Chapman and Hall, 115-130.

Troughton P.T. and Godsill J., 1998. A reversible jump sampler for autoregressive time series. Proceddings of IEEE ICASSP-98, IV, 2257-2260.

Troughton P.T., 1999. Simulation methods for linear and nonlinear time series models with application to distorted audio signals, University of Cambridge, Cambridge.

Vermaak J., Andrieu C., Doucet A., Godsill J., 2004. Reversible jump Markov chain Monte Carlo strategies for Bayesian model selection in autoregressive processes. Journal of Time Series Analysis, 25, 785-809.

BAYESIAN MODEL SELECTION WITH REVERSIBLE JUMP MARKOV CHAIN MONTE CARLO METHODS IN AUTOREGRESSIVE MOVING AVARAGE PROCESSES

ABSTRACT

In literature, various approaches have been proposed for determining order of autoregressive moving average models. The most important one is Box-Jenkins aproach. Box-Jenkins method is based on outocorrelations and partial autocorrelations. This method also based on experience. Determining the order of autoregressive moving avarage models Bayesian model selection methods can be used. Reversible jump Markov Chain Monte Carlo method that moves between different model spaces is an influential one. In this study, Troughton's method is modified for determining order of autoregressive moving avarage models. The new method is applied for simulating time series.

Key words: Bayesian Model Selection, Autoregressive Moving Avarage Models, Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Method.