






YÜKSEK MERTEBE KAYMA DEFORMASYON TEORİSİNE DAYALI POROZ ORTOTROPİK TABAKALI PLAKLARIN BURUKULMA ANALİZİ

¹Ferruh TURAN , ²Suna ULU , ³Yıldız ÜNAL 




Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Samsun, TÜRKİYE
¹ferruh.turan@omu.edu.tr, ²sunaulu001@gmail.com, ³unalyildiz2808@gmail.com

Önemli Katkılar (Highlights)

- Hiperbolik kayma deformasyon teorisi kapsamında poroz ortotropik tabakalı plakların stabilitesi incelendi.
- Poroz ortotropik tabakalı plak tabaka kalınlıkları boyunca üç farklı kosinüs fonksiyonu kullanılarak modellendi.
- Kayma deformasyonun, porozitenin, ortotropinin, yükleme faktörlerinin ve geometrik özelliklerin poroz kompozit plakların kritik burkulma yüküne etkileri araştırıldı.
- Porozite varlığının tabakalı plakların kritik burkulma yükü değerlerini azalttığı sonucu elde edildi.



YÜKSEK MERTEBE KAYMA DEFORMASYON TEORİSİNE DAYALI POROZ ORTOTROPİK TABAKALI PLAKLARIN BURKULMA ANALİZİ

^{1*}Ferruh TURAN , ²Suna ULU , ³Yıldız ÜNAL 

Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Samsun, TÜRKİYE
¹ferruh.turan@omu.edu.tr, ²sunaulu001@gmail.com, ³unalyildiz2808@gmail.com

(Geliş/Received: 12.09.2022; Kabul/Accepted in Revised Form: 13.03.2023)

ÖZ: Bu çalışmada, yüksek mertebeli kayma deformasyon teorisi kullanılarak poroz ortotropik tabakalı plakların burkulma davranışı araştırılmaktadır. Plak tek ve iki eksenli basınca maruz kaldığı ve plak kalınlığı boyunca özel fonksiyonlarla tanımlanan üç farklı porozite dağılımı dikkate alınmaktadır. Stabilitate denklemleri virtüel iş prensibiyle türetilmektedir ve elde edilen kısmi türevli diferansiyel denklemlere Galerkin yöntemi uygulanarak kritik burkulma yükü ifadesi elde edilmektedir. Türetilen kritik burkulma yükü ifadesiyle elde edilen sonuçlar, literatürdeki uygun sonuçlarla kıyaslanarak doğrulanmaktadır. Kritik burkulma yükünün kayma deformasyonuna, poroziteye, ortotropiye, yükleme faktörüne ve farklı geometrik özelliklere duyarlılığını gözlemlemek için parametrik bir analiz yapılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: *Burkulma, Porozite, Poroz Plak, Tabakalı Plak, Kayma Deformasyon Teorisi*

Buckling Analysis of Porous Orthotropic Laminated Plates Within Higher-Order Shear Deformation Theory

ABSTRACT: This study investigates the buckling behavior of porous orthotropic laminated plates using high-order shear deformation theory. The plate is under uniaxial and biaxial compressive loadings. Three different porosity distributions defined by specific functions throughout the plate thickness are considered. The stability equations are derived by the virtual work principle, and the critical buckling load relation is obtained by applying the Galerkin method to the partial differential equations obtained. The results obtained with the derived critical buckling load expression are verified by comparing with the appropriate results in the literature. A parametric analysis is performed to observe the sensitivity of the critical buckling load to shear deformation, porosity, orthotropy, loading factor, and different geometric properties.

Keywords: *Buckling, Porosity, Porous Plate, Laminated Plate, Shear Deformation Theory*

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Havacılık, denizcilik, otomotiv ve savunma sanayi gibi birçok sektörde kullanılan malzemelerin yüksek mukavemet/düşük ağırlık özelliklerinin çok iyi olması istenmektedir [1]. Yapı elemanlarının hafif olması, gözenekli veya boşluklu formda üretilmesiyle mümkün olabilmektedir. Bu tür gözenekler, üretim esnasındaki mikro-kusurlardan olabileceği gibi özel sebeplerden ötürü üretim yöntemleriyle de oluşturulabilmektedir. Bu durumda, poroz yapı elemanlarının malzeme özellikleri noktadan noktaya farklılık göstermektedir. Bundan dolayı, bu gözeneklerin veya kusurların yapı elemanının statik ve dinamik davranışları üzerindeki etkilerinin belirlenmesi gerekmektedir.

Önemli bir mühendislik uygulaması olan poroz yapı elemanlarının (plak, kabuk vs.) stabilite davranışlarına olan ilgi giderek artmaktadır. Yapılan birçok çalışmada poroz malzeme özelliklerinin yapı elemanının kalınlığı boyunca özel bir fonksiyona bağlı olarak değiştiği varsayılmaktadır ve porozitenin yapı elemanının burkulma davranışına etkileri araştırılmaktadır [2-11]. Klasik plak teorisinde enine kayma deformasyonları ihmal edilerek problemin çözümünde kolaylık sağlanmaktadır. Ancak, enine

kayma deformasyon etkilerinin yapı elemanlarının statik ve dinamik davranışları üzerindeki etkileri oldukça önemli olmaktadır. Bundan dolayı araştırmacılar yeni kayma deformasyon teorileri için araştırmalar yapmışlardır. Bu çalışmaların birçoğu yüksek mertebeden kayma deformasyon teorilerini kapsamaktadır [12-19]. Bu gelişmelerle birlikte, poroz yapı elemanlarının kayma deformasyon teorisi kapsamındaki burkulma analizi çalışmaları artış göstermiştir [20-27].

Tabakalı kompozit plaklar tek katmanlı klasik plaklara nazaran tabakalar arası süreksizlik, doğrultulara göre rijitlik farklılıkları ve kayma dayanımlarının zayıf olması gibi sebeplerden ötürü farklı problemlerle karşılaşabilmektedir. Farklı tabaka dizileme ve farklı yönlendirme açılarına bağlı olarak da çeşitli yükleme durumlarında farklı davranışlar sergilemektedir. Bu gibi durumların tabakalı kompozit plakların davranışları üzerindeki etkileri yüksek mertebe kayma deformasyon teorileri ve 3B elastisite teorisi kapsamında incelenmiştir [28-30]. Tabakalı kompozit malzemelerin üretimi esnasında meydana gelen mikro-kusurların da incelenmesi ve tabakalı kompozit plakların statik ve dinamik davranışları üzerindeki etkilerinin belirlenmesi gerekmektedir. Bu ihtiyaçtan ötürü son yıllarda poroz tabakalı yapı elemanlarının eğilme problemlerinin çözümüne eğilim artmıştır [31-33].

Yapılan literatür araştırması, poroz ortotropik tabakalı plakların stabilite probleminin kayma deformasyon teorisi kapsamında yeterince ele alınmadığını ortaya koymaktadır. Bu çalışmada, porozitenin ortotropik tabakalı plakların kritik burkulma yükü üzerindeki etkileri araştırılmaktadır.

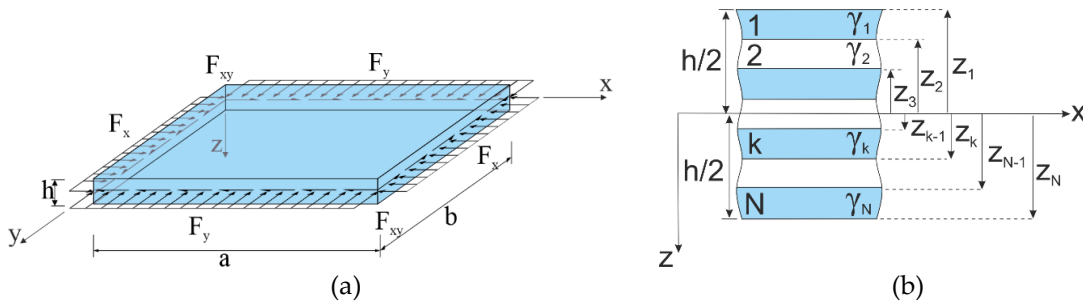
2. MATERYAL ve METOT (MATERIAL and METHOD)

Yapı elemanlarının üretimi sırasında teknik hatalardan kaynaklı mikro boşluklar ve porozite meydana gelmektedir. Dolayısıyla, kompozit malzemelerden oluşan yapı elemanlarının içinde var olabilen bu porozitelerin yapı elemanlarının statik ve dinamik davranışları üzerindeki etkilerinin incelenmesi önemli ve zorunlu hale gelmektedir. Buna bağlı olarak, bu başlık altında poroz ortotropik tabakalı kompozit plakların temel denklemlerinin türetilmesi sunulmaktadır.

2.1. Matematiksel Model (Mathematical Model)

Poroz ortotropik tabakalı kompozit plak, Şekil 1a'da gösterildiği gibi (x, y, z) Kartezyen koordinat sisteminde tanımlanmaktadır. xy –düzlemi plak orta düzlemi olarak tanımlanmaktadır ve z –ekseni kalınlık doğrultusunu göstermektedir. N tane poroz ortotropik tabakadan meydana gelen platin uzunluğu, genişliği ve toplam kalınlığı sırasıyla a , b ve h olarak ifade edilmektedir. Şekil 1b'de gösterilen z –koordinatları, plak kalınlığı içindeki herhangi bir noktanın orta düzleme olan uzaklıklarını tanımlamaktadır. Ayrıca $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ açıları tabaka yönlendirme açısı adını almaktadır.

Porozitesiz malzemelerin malzeme özellikleri konumdan bağımsız olurken, poroz malzemelerin malzeme özellikleri ise konumun sürekli bir fonksiyonu olarak değişim göstermektedirler. Bu çalışmada, M_1, M_2, M_3 ve M_4 olmak üzere dört tip porozite dağılımı modeli dikkate alınmaktadır.



Şekil 1. Poroz ortotropik tabakalı kompozit plak: (a) yükleme durumu, (b) enkesit detayı

Figure 1. Porous orthotropic laminated composite plate: (a) loading condition, (b) cross-section

Buna bağlı olarak, poroz ortotropik malzemelerden oluşan tabakalı kompozit plakların konuma bağlı malzeme özellikleri aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\begin{aligned} \beta_{11}^{(k)}(Z) &= \beta_{01}^{(k)}(1 - \alpha\Delta^{(k)}(Z)), \beta_{22}^{(k)}(Z) = \beta_{02}^{(k)}(1 - \alpha\Delta^{(k)}(Z)), \beta_{12}^{(k)}(Z) = \beta_{012}^{(k)}(1 - \alpha\Delta^{(k)}(Z)), \\ \beta_{13}^{(k)}(Z) &= \beta_{013}^{(k)}(1 - \alpha\Delta^{(k)}(Z)), \beta_{23}^{(k)}(Z) = \beta_{023}^{(k)}(1 - \alpha\Delta^{(k)}(Z)), k = 1, 2, \dots, N, Z = z/h \end{aligned} \quad (1)$$

Burada $\beta_{01}^{(k)}$ ve $\beta_{02}^{(k)}$ sırasıyla x ve y doğrultularındaki porozitesiz ortotropik malzemenin elastisite modülleridir. $\beta_{012}^{(k)}$, $\beta_{013}^{(k)}$ ve $\beta_{023}^{(k)}$ ise porozitesiz ortotropik malzemenin sırasıyla xy , xz ve yz düzlemlerindeki kayma modülleridir. α porozite katsayısı olup elastisite ve kayma modüllerinin değişimini karakterize etmektedir ve $0 \leq \alpha < 1$ koşulu geçerli olmaktadır. Ayrıca, $\alpha = 0$ olması porozitesiz ortotropik malzeme durumuna (M_4) karşılık gelmektedir. $\Delta^{(k)}(Z)$ ise k . tabakanın porozite değişim fonksiyonu olup aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\Delta^{(k)}(Z) = \begin{cases} \cos(\pi Z), M_1 \\ \cos(\pi Z/2 + \pi/4), M_2 \\ \cos(|\pi Z| - \pi/2), M_3 \end{cases} \quad (2)$$

Denklem (2)'den de görüleceği üzere, en alt ve en üst noktalarında daha rijit olmak üzere simetrik bir porozite dağılımı (M_1), tabakaların en alt noktalarında daha rijit olmak üzere simetrik olmayan bir porozite dağılımı (M_2) ve tabakaların orta kısımlarında daha rijit olmak üzere simetrik bir porozite dağılımı (M_3) elde edilmektedir.

2.2. Temel Bağntı ve Denklemler (Fundamental Relation and Equations)

Klasik plak teorisi enine kayma gerilmelerini dikkate almamaktadır. Dolayısıyla, enine kayma deformasyonları meydana getiren σ_{xz} ve σ_{yz} kayma gerilmeleri klasik plak teorisine ilave edilmelidir. Buna bağlı olarak, kayma deformasyon plak teorisi kapsamında k . poroz ortotropik tabakanın gerilme – şekil değiştirme bağıntısı [1,19]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_{11} & \mathfrak{S}_{12} & 0 & 0 & \mathfrak{S}_{16} \\ \mathfrak{S}_{21} & \mathfrak{S}_{22} & 0 & 0 & \mathfrak{S}_{26} \\ 0 & 0 & \mathfrak{S}_{44} & \mathfrak{S}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{S}_{45} & \mathfrak{S}_{55} & 0 \\ \mathfrak{S}_{16} & \mathfrak{S}_{26} & 0 & 0 & \mathfrak{S}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (3)$$

olarak yazılmaktadır. Burada, ε_x ve ε_y sembolleri tabakalı plağın orta düzlemi üzerinde olmayan herhangi bir noktadaki x ve y doğrultularındaki deformasyon bileşenlerini; ε_{xz} , ε_{yz} ve ε_{xy} sembolleri sırasıyla xz , yz ve xy düzlemlerindeki kayma deformasyon bileşenlerini; $\mathfrak{S}_{ij}^{(k)}$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) sembolleri ise k . poroz ortotropik tabakanın dönüştürülmüş malzeme özellikleridir [1,17,18]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{11} &= \mathfrak{N}_{11}c^4 + \mathfrak{N}_{22}s^4 + 2(\mathfrak{N}_{12} + 2\mathfrak{N}_{66})s^2c^2, \mathfrak{S}_{12} = (\mathfrak{N}_{11} + \mathfrak{N}_{22} - 4\mathfrak{N}_{66})s^2c^2 + \mathfrak{N}_{12}(s^4 + c^4), \\ \mathfrak{S}_{16} &= (\mathfrak{N}_{11} - \mathfrak{N}_{12} - 2\mathfrak{N}_{66})sc^3 + (\mathfrak{N}_{12} - \mathfrak{N}_{22} + 2\mathfrak{N}_{66})s^3c, \mathfrak{S}_{22} \\ &= \mathfrak{N}_{11}s^4 + \mathfrak{N}_{22}c^4 + 2(\mathfrak{N}_{12} + 2\mathfrak{N}_{66})s^2c^2 \\ \mathfrak{S}_{26} &= (\mathfrak{N}_{11} - \mathfrak{N}_{12} - 2\mathfrak{N}_{66})cs^3 + (\mathfrak{N}_{12} - \mathfrak{N}_{22} + 2\mathfrak{N}_{66})c^3s, \\ \mathfrak{S}_{66} &= (\mathfrak{N}_{11} + \mathfrak{N}_{22} - 2\mathfrak{N}_{12} - 2\mathfrak{N}_{66})c^2s^2 + \mathfrak{N}_{66}(s^4 + c^4) \\ \mathfrak{S}_{44} &= \mathfrak{N}_{44}c^2 + \mathfrak{N}_{55}s^2, \mathfrak{S}_{45} = (\mathfrak{N}_{55} - \mathfrak{N}_{44})cs, \mathfrak{S}_{55} = \mathfrak{N}_{44}s^2 + \mathfrak{N}_{55}c^2, s = \sin \gamma, c = \cos \gamma \end{aligned} \quad (4)$$

Burada, γ açısı global ve lokal x – eksenleri arasındaki açıdır. $\mathfrak{N}_{ij}^{(k)}$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) sembolleri k . poroz ortotropik tabakanın malzeme özellikleri olup aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{11}^{(k)}(Z) &= \frac{\beta_{11}^{(k)}(Z)}{1 - v_{12}^{(k)}v_{21}^{(k)}}, \mathfrak{N}_{12}^{(k)}(Z) = \frac{v_{12}^{(k)}\beta_{22}^{(k)}(Z)}{1 - v_{12}^{(k)}v_{21}^{(k)}}, \mathfrak{N}_{21}^{(k)}(Z) = \frac{v_{21}^{(k)}\beta_{11}^{(k)}(Z)}{1 - v_{12}^{(k)}v_{21}^{(k)}}, \mathfrak{N}_{22}^{(k)}(Z) = \frac{\beta_{22}^{(k)}(Z)}{1 - v_{12}^{(k)}v_{21}^{(k)}}, \\ \mathfrak{N}_{44}^{(k)}(Z) &= \beta_{23}^{(k)}(Z), \mathfrak{N}_{55}^{(k)}(Z) = \beta_{13}^{(k)}(Z), \mathfrak{N}_{66}^{(k)}(Z) = \beta_{12}^{(k)}(Z), Z = z/h, k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (5)$$

Burada, v_{12} ve v_{21} sembolleri poroz ortotropik tabakaların Poisson oranları olup, kalınlık koordinatına göre değişiminin etkisi az olduğundan sabit kabul edilmektedir ve $v_{12}\beta_{22}(Z) = v_{21}\beta_{11}(Z)$ koşulunun sağlandığı varsayılmaktadır.

Poroz ortotropik tabakalı kompozit plakların kayma deformasyon plak teorisi kapsamındaki kuvvet ve moment bileşenlerini bulmak için, klasik plak teorisi için yazılan ifadeler ek olarak enine kesme kuvveti ifadeleri de eklenmelidir. Bu açıklamalar ışığında, bu çalışmadaki probleme uygun olacak şekilde kuvvet ve moment bileşenleri:

$$\begin{aligned} (n_x, n_y, n_{xy}) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}) dz, (m_x, m_y, m_{xy}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}) z dz, \\ (s_x, s_y, s_{xy}) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}) \phi(z) dz, (q_x, q_y) = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}) \frac{d\phi(z)}{dz} dz \end{aligned} \quad (6)$$

olarak yazılmaktadır. Burada, n kuvvet, m moment, q enine kesme kuvveti ve s yüksek mertebeden kuvvet bileşenlerini temsil etmektedir. Ayrıca burada $\phi(z)$ kayma deformasyon fonksiyonudur. Bu çalışmada, [19] tarafından kullanılan $\phi(z) = \frac{h}{2} \tanh\left(\frac{2z}{h}\right) - \frac{4}{3 \cosh^2(1)} \left(\frac{z^3}{h^2}\right)$ hiperbolik kayma deformasyon fonksiyonu kullanılmıştır. Denklem (3), Denklem (6)'da yerine yazılıp elde edilen integraller sonuçları virtüel iş prensibinde kullanılırsa poroz ortotropik tabakalı plaka ait aşağıdaki ifadeler elde edilmektedir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \eta_{11}^0 + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \eta_{66}^0 + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} (\eta_{12}^0 + \eta_{66}^0) - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \eta_{11}^1 - \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} (\eta_{12}^1 + 2\eta_{66}^1) \\ + \frac{\partial^3 \chi_x}{\partial x^3} \hat{\eta}_{11}^0 + \frac{\partial^3 \chi_y}{\partial x^2 \partial y} (\hat{\eta}_{12}^0 + \hat{\eta}_{66}^0) + \frac{\partial^3 \chi_x}{\partial x \partial y^2} \hat{\eta}_{66}^0 = 0 \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} (\eta_{21}^0 + \eta_{66}^0) + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \eta_{66}^0 + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \eta_{22}^0 - \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} (\eta_{21}^1 + 2\eta_{66}^1) - \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \eta_{22}^1 \\ + \frac{\partial^3 \chi_x}{\partial x \partial y^2} (\hat{\eta}_{21}^0 + \hat{\eta}_{66}^0) + \frac{\partial^3 \chi_y}{\partial y^3} \hat{\eta}_{22}^0 + \frac{\partial^3 \chi_y}{\partial x^2 \partial y} \hat{\eta}_{66}^0 = 0 \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \eta_{11}^1 + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} (\eta_{21}^1 + 2\eta_{66}^1) + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} (\eta_{12}^1 + 2\eta_{66}^1) + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \eta_{22}^1 - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \eta_{11}^2 \\ - \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} (\eta_{12}^2 + \eta_{21}^2 + 4\eta_{66}^2) - \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \eta_{22}^2 + \frac{\partial^3 \chi_x}{\partial x^3} \hat{\eta}_{11}^1 + \frac{\partial^3 \chi_y}{\partial x^2 \partial y} (\hat{\eta}_{12}^1 + 2\hat{\eta}_{66}^1) \\ \frac{\partial^3 \chi_x}{\partial x \partial y^2} (\hat{\eta}_{21}^1 + 2\hat{\eta}_{66}^1) + \frac{\partial^3 \chi_y}{\partial y^3} \hat{\eta}_{22}^1 - F_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2F_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - F_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (7c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \hat{\eta}_{11}^0 + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} (\hat{\eta}_{12}^0 + \hat{\eta}_{66}^0) + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \hat{\eta}_{66}^0 - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \hat{\eta}_{11}^1 - \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} (\hat{\eta}_{12}^1 + 2\hat{\eta}_{66}^1) \\ + \frac{\partial^3 \chi_x}{\partial x^3} \hat{\eta}_{11}^1 + \frac{\partial^3 \chi_y}{\partial x^2 \partial y} (\hat{\eta}_{12}^1 + \hat{\eta}_{66}^1) + \frac{\partial^3 \chi_x}{\partial x \partial y^2} \hat{\eta}_{66}^1 - \eta_{55}^1 \frac{\partial \chi_x}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (7d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} (\hat{\eta}_{21}^0 + \hat{\eta}_{66}^0) + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \hat{\eta}_{22}^0 + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \hat{\eta}_{66}^0 - \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} (\hat{\eta}_{21}^1 + 2\hat{\eta}_{66}^1) - \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \hat{\eta}_{22}^1 \\ + \frac{\partial^3 \chi_x}{\partial x \partial y^2} (\hat{\eta}_{21}^1 + \hat{\eta}_{66}^1) + \frac{\partial^3 \chi_y}{\partial x^2 \partial y} \hat{\eta}_{66}^1 + \frac{\partial^3 \chi_y}{\partial y^3} \hat{\eta}_{22}^1 - \eta_{44}^1 \frac{\partial \chi_y}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (7e)$$

Burada η ve $\hat{\eta}$ terimleri kompozit malzemenin özelliklerine bağlı katsayılar olup açık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\eta_{ij}^r = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (z)^r \mathfrak{S}_{ij}^{(k)} dz, \hat{\eta}_{ij}^r = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (z)^{2r-r^2} \phi(z)^{0.5(r^2-r+2)} \mathfrak{S}_{ij}^{(k)} dz, i, j = 1, 2, 6; r = 0, 1, 2$$

$$\eta_{ij}^1 = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(\frac{d\phi(z)}{dz} \right)^2 \mathfrak{S}_{ij}^{(k)} dz, i, j = 4, 5$$
(7f)

2.3. Çözüm Prosedürü (Solution Procedure)

Tüm kenarlarından basit mesnetli dikdörtgen kompozit plak için aşağıdaki sınır koşulları geçerli olmaktadır:

$$x = 0, a; u = w = \chi_y = 0, \quad y = 0, b; v = w = \chi_x = 0$$
(8)

Denklem (8)'deki sınır koşullarını sağlayan gerekli yaklaşım fonksiyonları:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \cos(\lambda_1 x) \sin(\lambda_2 y) \\ v_1 \sin(\lambda_1 x) \cos(\lambda_2 y) \\ w_1 \sin(\lambda_1 x) \sin(\lambda_2 y) \\ \chi_1 \cos(\lambda_1 x) \sin(\lambda_2 y) \\ \chi_2 \sin(\lambda_1 x) \cos(\lambda_2 y) \end{Bmatrix}, \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{m_1 \pi}{a} \\ \lambda_2 = \frac{m_2 \pi}{b} \end{cases}$$
(9)

Burada, $u_1, v_1, w_1, \chi_1, \chi_2$ bilinmeyen katsayılarıdır. Denklem (9)'daki yaklaşım fonksiyonları Denklem (7) kısmi türevli diferansiyel denklem sisteminde yerine yazılıp $0 \leq x \leq a$ ve $0 \leq y \leq b$ aralıkları için Galerkin yöntemi uygulanmaktadır. Daha sonra, elde edilen denklem sistemi matris formda yazılıp elde edilen bu matris formun katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitlenmesiyle poroz ortotropik tabakalı plakların burkulma yükü ifadesi aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$\lambda_1^2 F_x + \lambda_2^2 F_y = r_{33} - \frac{r_{31}\psi_{31} + r_{32}\psi_{32} + r_{34}\psi_{34} + r_{35}\psi_{35}}{\psi_{33}}$$
(10)

Burada $r_{3j} (j = 1, 2, \dots, 5)$ ve $\psi_{3j} (j = 1, 2, \dots, 5)$ katsayılarının açık ifadeleri sırasıyla Ek A ve Ek B'de verilmektedir. Tabakalı kompozit plağın aşağıdaki yük durumunda maruz kaldığı varsayalım:

$$F_x = -F_0, F_y = -\zeta F_0, F_{xy} = 0$$
(11)

Burada ζ terimi yük parametresi olup $\zeta = 0$ olması tek eksenli basınç durumuna ve $\zeta > 0$ olması iki eksenli basınç durumuna karşılık gelmektedir. Denklem (11), Denklem (10)'da yerine yazıldığında poroz ortotropik tabakalı kompozit plağın kayma deformasyon teorisi çerçevesindeki burkulma yükü aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$F_0^{KDT} = \frac{r_{31}\psi_{31} + r_{32}\psi_{32} + r_{34}\psi_{34} + r_{35}\psi_{35} - r_{33}\psi_{33}}{\psi_{33}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \zeta)}$$
(12)

Denklem (12)'deki enine kayma gerilmeleri veya enine kayma deformasyonları ihmal edilerek klasik plak teorisi kapsamında sonuçlar elde edilmektedir. Hem kayma deformasyon plak teorisi hem de klasik plak teorisi için ifadeler yardımıyla elde edilen sonuçlar dalga sayılarına göre minimize edilerek kritik burkulma yükü bulunmaktadır. Çalışmada boyutsuz kritik burkulma yükleri aşağıdaki ifade yardımıyla elde edilmektedir:

$$\bar{F}_0^{KDT} = \frac{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})b^2}{\pi^2 \beta_{01} h^3} F_0^{KDT}$$
(13)

3. BULGULAR ve TARTIŞMA (RESULTS and DISCUSSION)

Bu başlık altında, poroz ortotropik tabakalı kompozit plakların kritik burkulma yükü değerleri klasik plak teorisi ve yüksek mertebe kayma deformasyon teorisi kapsamında incelenmektedir. Kayma deformasyonun, porozitenin, ortotropinin ve geometrik oranların kritik burkulma yükü üzerindeki etkileri araştırılmaktadır.

3.1. Doğrulama Çalışması (Validation Study)

İlk karşılaştırmada, farklı malzeme özelliklerine sahip tabakalı kompozit plağın kayma deformasyon teorisi kapsamındaki kritik burkulma yükü değerleri, [28] ve [30] çalışmalarında elde edilen boyutsuz kritik burkulma yük değerleri ile kıyaslanmaktadır. Karşılaştırmada şu plak karakteristikleri ve malzeme özellikleri kullanılmıştır: $a/h = 10$, $a/b = 1$, $\beta_{012} = \beta_{013} = 0.6\beta_{02}$, $\beta_{023} = 0.5\beta_{02}$, $\nu_{12} = 0.25$. Çizelge 1'de değişik malzeme özellikleri için sunulan değerlerin uyum içinde olduğu gözlemlenmektedir.

Çizelge 1. Tek eksenli basınca maruz $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ porozitesiz (M_4) ortotropik tabakalı kompozit plağın boyutsuz kritik burkulma yükü değerlerinin karşılaştırılması

Table 1. Comparison of dimensionless critical buckling load values of non-porous (M_4) orthotropic $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ layered composite plate subjected to uniaxial compression

$\hat{F}_0^{SDT} = F_0^{SDT} (b^2/\beta_{02}h^3)$			
β_{01}/β_{02}	[28]	[30]	Bu çalışma
10	9.7740	9.7621	9.944(1,1)
30	19.957	19.3040	19.698(1,1)

İkinci karşılaştırmada, farklı tabaka dizilişine ve geometrik karakteristiklere sahip ortotropik tabakalı kompozit plağın boyutsuz kritik burkulma değerleri [29] çalışmasındaki değerlerle kıyaslanmaktadır. Karşılaştırmada şu plak karakteristikleri ve malzeme özellikleri kullanılmıştır: $a/b = 1$, $a/h = 20$, $\beta_{01} = 40\beta_{02}$, $\beta_{023} = 0.5\beta_{02}$, $\beta_{012} = \beta_{013} = 0.6\beta_{02}$, $\nu_{12} = 0.25$. Çizelge 2'de değişik malzeme özellikleri için sunulan değerlerin uyum içinde olduğu gözlemlenmektedir.

Çizelge 2. Tek eksenli basınca maruz ve farklı tabaka dizilişine sahip porozitesiz (M_4) ortotropik tabakalı kompozit plağın boyutsuz kritik burkulma yükü değerlerinin karşılaştırılması

Table 2. Comparison of dimensionless critical buckling load values of non-porous (M_4) orthotropic laminated composite plate subjected to uniaxial compression and having different layer sequences

$\hat{F}_0^{SDT} = F_0^{SDT} (b^2/\beta_{02}h^3)$		
Tabaka dizilişi	[29]	Bu çalışma
$0^\circ/90^\circ/0^\circ$	30.922	31.073(1,1)
$0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$	31.737	31.678(1,1)

3.2. Özgün Analizler (Original Analysis)

Porozitesiz ve poroz ortotropik tabakalı kompozit plakların kritik basınç yükü değerleri klasik plak teorisi ve kayma deformasyon teorisi kapsamında sayısal olarak elde edilmektedir. Tabakalı kompozit plakların meydana geldiği ortotropik malzeme özellikleri, $\beta_{01} = 206.844GPa$, $\beta_{02} = 18.616GPa$, $\beta_{023} = 2.551GPa$, $\beta_{012} = \beta_{013} = 4.482GPa$, $\nu_{12} = 0.21$ olarak dikkate alınmaktadır. Poroz ortotropik tabakalı kompozit plakların kritik burkulma yükü değerlerinin $a/b = 2$, $\zeta = 0; 1$ ve $\alpha = 0.8$ için a/h 'a bağlı değişimi Çizelge 3'te verilmektedir. (0°) ve ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$) gibi iki farklı tabaka dizilimi ile M_1 ve M_4 modelleri dikkate alınmaktadır.

a/h 'in artışına bağlı olarak klasik plak teorisi için elde edilen kritik burkulma yükü değerleri sabit kalırken kayma deformasyon teorisi kapsamında ortaya çıkan kritik burkulma yükü değerleri ise artmaktadır. Tek eksenli yükleme durumunda elde edilen kritik burkulma yükü değerleri, iki eksenli yükleme durumunda ortaya çıkan değerlerden daha büyük olmaktadır. Her iki yükleme durumu arasındaki kritik burkulma yükü değeri farkı a/h 'in artışına bağlı olarak klasik plak teorisinde sabit kalırken kayma deformasyon teorisinde ise artmaktadır. Her iki durumda da M_1 modelinin kritik burkulma yükü değerleri M_4 modelinin değerlerinden daha küçüktür. Tabaka dizilişleri kendi aralarında mukayese edildiğinde, iki eksenli yükleme durumunda üç tabakalı plakların kritik burkulma yükü değerleri tek tabakalı plaklarınkinden daha büyük olmaktadır. Tek eksenli yükleme durumunda ise klasik plak teorisi kapsamında tek tabakalı plakların, kayma deformasyon teorisi çerçevesinde ise üç tabakalı plakların kritik burkulma yükü değerleri daha küçük olmaktadır. Tabaka dizilişleri arasındaki bu kritik yük değeri farkı a/h 'in artışına bağlı olarak klasik plak teorisi için sabit kalmaktadır. Kayma deformasyon teorisi için ise iki eksenli yükleme durumunda artarken tek eksenli yükleme durumunda M_1 modeli için önce artıp sonra azalırken M_4 modeli için önce azalır sonra artmaktadır.

Çizelge 3. Tek ve iki eksenli eksenel basınca maruz poroz ortotropik tabakalı kompozit plağın boyutsuz kritik basınç yükü değerlerinin a/h oranına bağlı değişimi

Table 3. Variation of dimensionless critical buckling load values of porous orthotropic laminated composite plate subjected to uniaxial and biaxial compression depending on the a/h ratio

$10\bar{F}_0$								
$\zeta = 0$				$\zeta = 1$				
(0°)								
Klasik Plak Teorisi			Kayma Deformasyon Teorisi		Klasik Plak Teorisi		Kayma Deformasyon Teorisi	
a/h	M_1	M_4	M_1	M_4	M_1	M_4	M_1	M_4
10			2.071 (2,1)	4.665 (2,1)			0.556(1,1)	1.030(1,1)
20			4.260 (1,1)	6.624 (1,1)			0.852(1,1)	1.325(1,1)
30	5.216 (1,1)	7.341 (1,1)	4.740 (1,1)	7.003 (1,1)	1.043(1,1)	1.468(1,1)	0.948(1,1)	1.401(1,1)
40			4.937 (1,1)	7.147 (1,1)			0.987(1,1)	1.429(1,1)
50			5.034 (1,1)	7.215 (1,1)			1.007(1,1)	1.443(1,1)
(90°/0°/90°)								
a/h	M_1	M_4	M_1	M_4	M_1	M_4	M_1	M_4
10			1.324(4,1)	3.149(4,1)			0.952 (2,1)	2.102 (2,1)
20			2.961(4,1)	5.734(3,1)			2.090 (3,1)	3.969 (3,1)
30	5.551(4,1)	8.319(3,1)	3.955(4,1)	6.887(3,1)	3.905 (3,1)	5.759 (3,1)	2.773 (3,1)	4.768 (3,1)
40			4.508(4,1)	7.436(3,1)			3.160(3,1)	5.148(3,1)
50			4.829(4,1)	7.727(3,1)			3.387 (3,1)	5.349 (3,1)

Kritik burkulma yükü üzerindeki porozite etkisi tüm tabaka dizilişlerinde ve yükleme durumlarında a/h 'in artışına bağlı olarak klasik plak teorisi için sabit kalırken kayma deformasyon teorisi için ise azalmaktadır. Örneğin tek eksenli yükleme ve (90°/0°/90°) için a/h 'in 10'dan 50'ye artışına bağlı olarak porozitenin etkisi klasik plak teorisi için (-%33.3) ile sabit kalmaktadır. Benzer şekilde, porozitenin etkisi kayma deformasyon teorisi için (-%58)'den (-%37.5)'e azalmaktadır. İki eksenli yükleme durumunda ortaya çıkan porozite etkisi tek eksenli durumda ortaya çıkan etkiden daha küçük olmaktadır. Her iki durum arasındaki bu porozite etkisi farkı tek tabakalı plaklarda daha büyük olmaktadır ve a/h 'in artışına bağlı olarak klasik plak teorisi için sabit kalırken kayma deformasyon teorisi için ise azalmaktadır. Örneğin tek tabakalı plaklarda her iki yükleme durumu arasındaki porozite etkisi farkı a/h 'in 10'dan 50'ye artışına bağlı olarak kayma deformasyon teorisi için (%9.6) azalmaktadır. Her iki tabaka dizilişi arasındaki en büyük porozite etki farkı (%6.4) olarak $a/h = 10$ 'da elde edilmektedir.

Kritik burkulma yükü üzerindeki kayma deformasyon etkisi tüm tabaka dizilişlerinde ve yükleme durumlarında a/h 'in artışına bağlı olarak azalmaktadır. Örneğin iki eksenli yükleme durumunda tek tabakalı plaklar için a/h 'in 10'dan 50'ye artışına bağlı olarak kayma deformasyon etkisi M_1 modelinde (%46.7)'den (%3.5)'e ve M_4 modelinde (%29.8)'den (%1.7)'ye azalmaktadır. Tek eksenli yükleme durumunda ortaya çıkan kayma deformasyon etkisi iki eksenli yükleme durumunda elde edilen etkiden daha büyük olmaktadır ve a/h 'in artışına bağlı olarak azalmaktadır. Örneğin, M_4 modelinde tek ve iki eksenli yükleme durumları arasındaki kayma deformasyon etkisi farkı a/h 'in 10'dan 50'ye artışına bağlı olarak tek ve üç tabakalı plaklar için sırasıyla (%6.6) ve (%1.4) azalmaktadır. Tabaka dizilişleri kendi aralarında mukayese edildiğinde, üç tabakalı plaklar için elde edilen kayma deformasyon etkisi tek tabakalı plaklar için ortaya çıkan etkiden daha büyük olmaktadır ve tabaka dizilişleri arasındaki bu kayma deformasyon etkisi farkı a/h 'in artışına bağlı olarak azalmaktadır. Örneğin iki eksenli yükleme durumunda tek ve üç tabakalı plaklar arasındaki en büyük kayma deformasyon etkisi farkı M_1 ve M_4 modelleri için sırasıyla (%28.9) ve (%33.7) olmaktadır.

Poroz ortotropik tabakalı kompozit plakların kritik burkulma yükü değerlerinin $a/h = 10$, $\zeta = 0; 1$ ve $\alpha = 0.8$ için a/b 'ye bağlı değişimi Tablo 4'te sunulmaktadır. (0°) ve ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) gibi iki farklı tabaka dizilimi ile M_2 ve M_4 modelleri dikkate alınmaktadır.

Çizelge 4. Tek ve iki eksenli eksenel basınca maruz poroz ortotropik tabakalı kompozit plağın boyutsuz kritik basınç yükü değerlerinin a/b oranına bağlı değişimi

Table 4. Variation of dimensionless critical buckling load values of porous orthotropic laminated composite plate subjected to uniaxial and biaxial compression depending on the a/b ratio

		$10\bar{F}_0$							
		$\zeta = 0$				$\zeta = 1$			
		(0°)							
		Klasik Plak Teorisi		Kayma Deformasyon Teorisi		Klasik Plak Teorisi		Kayma Deformasyon Teorisi	
a/b		M_2	M_4	M_2	M_4	M_2	M_4	M_2	M_4
1.0		5.061 (1,1)	12.141 (1,1)	3.668 (1,1)	8.509 (1,1)	2.448(1,2)	5.873(1,2)	1.776(1,2)	4.119(1,2)
1.5		3.214 (1,1)	7.711 (1,1)	2.373 (1,1)	5.515 (1,1)	0.989(1,1)	2.373(1,1)	0.730(1,1)	1.697(1,1)
2.0		3.060 (1,1)	7.341 (1,1)	2.085 (2,1)	4.665 (2,1)	0.612(1,1)	1.468(1,1)	0.444(1,1)	1.030(1,1)
2.5		3.529 (1,1)	8.466 (1,1)	1.601 (2,1)	3.590 (2,1)	0.487(1,1)	1.168(1,1)	0.331(1,1)	0.764(1,1)
3.0		3.214 (2,1)	7.711 (2,1)	1.270 (3,1)	2.785 (3,1)	0.436(1,1)	1.045(1,1)	0.270(1,1)	0.617(1,1)
		$(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$							
a/b		M_2	M_4	M_2	M_4	M_2	M_4	M_2	M_4
1.0		4.779 (1,1)	12.141 (1,1)	3.368 (1,1)	7.967 (1,1)	2.389(1,1)	6.071(1,1)	1.684(1,1)	3.984(1,1)
1.5		3.455 (1,1)	8.319 (1,1)	2.516 (1,1)	5.734 (1,1)	1.063(1,1)	2.560(1,1)	0.774(1,1)	1.764(1,1)
2.0		3.752 (1,1)	8.605 (1,1)	1.895 (2,1)	4.205 (2,1)	0.750(1,1)	1.721(1,1)	0.531(1,1)	1.176(1,1)
2.5		3.777 (2,1)	9.358 (2,1)	1.436 (3,1)	3.109 (3,1)	0.652(1,1)	1.451(1,1)	0.424(1,1)	0.924(1,1)
3.0		3.455 (2,1)	8.319 (2,1)	1.115 (4,1)	2.378 (4,1)	0.614(1,1)	1.345(1,1)	0.356(1,1)	0.770(1,1)

a/b 'nin artışına bağlı olarak kayma deformasyon teorisi kapsamındaki kritik burkulma yükü değerleri azalırken, klasik plak teorisi çerçevesindeki kritik yük değerleri ise önce azalıp sonra artıp tekrar azalmaktadır. Tek eksenli yükleme için elde edilen kritik burkulma yükü değerleri iki eksenli yükleme için ortaya çıkan kritik yükten daha büyük olmaktadır. Her iki yükleme durumu arasındaki kritik burkulma yükü değeri farkı a/b 'nin artışına bağlı olarak kayma deformasyon teorisinde azalmaktadır. Klasik plak teorisinde ise önce azalıp sonra artıp tekrar azalmaktadır. Her iki yükleme durumunda da M_2 modelinin kritik burkulma yükü değerleri M_4 modelinin değerlerinden daha küçüktür. Tabaka dizilişleri kendi aralarında kıyaslandığında, iki eksenli yükleme için $a/b > 1$ aralığında üç tabakalı plağın kritik burkulma yükü değeri tek tabakalı plakta ortaya çıkan değerlerden daha büyük olmaktadır. Benzer şekilde tek eksenli yükleme durumunda, tek tabakalı plağın kayma deformasyon teorisi kapsamındaki

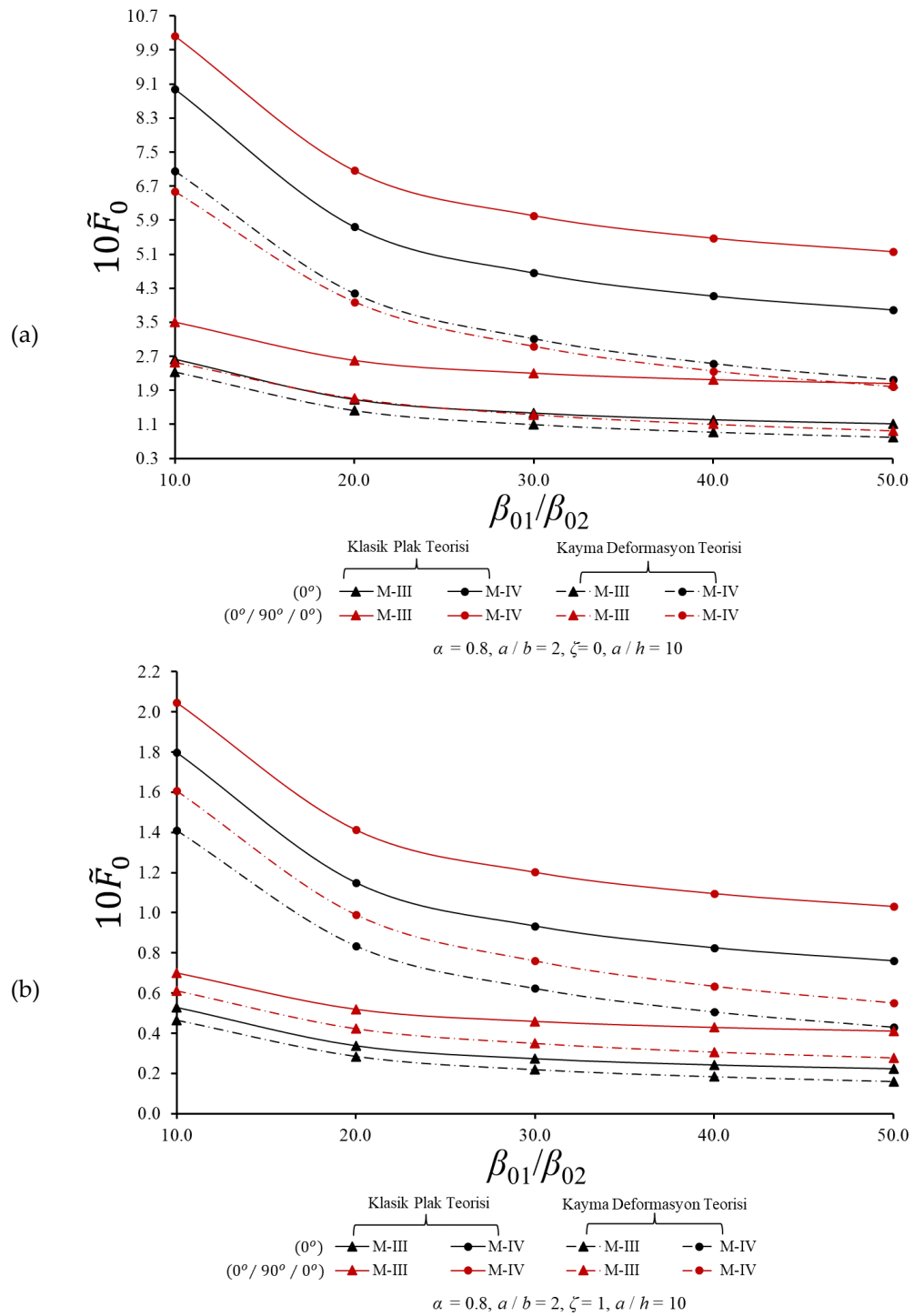
kritik burkulma yükü değeri üç tabakalı plağın değerlerinden daha büyük olmaktadır. Klasik plak teorisi için $a/b > 1$ aralığında tek tabakalı plağın klasik plak teorisi çerçevesindeki kritik burkulma yükü değeri üç tabakalı plağın değerlerinden daha küçük olmaktadır.

Üç tabakalı plakların kritik burkulma yükü üzerindeki porozite etkisi a/b 'nin artışına bağlı olarak azalmaktadır. Tek tabakalı plakların kritik burkulma yükü üzerindeki porozite etkisi ise a/b 'nin artışına bağlı olarak iki eksenli yükleme durumunda sabit kalmaktadır ve tek eksenli yükleme durumunda ise klasik plak teorisi için sabit kalırken kayma deformasyon teorisi için ise azalmaktadır. Örneğin iki eksenli yükleme durumunda üç tabakalı plağın kritik burkulma yükü üzerindeki porozite etkisi a/b 'nin 1'den 3'e artışına bağlı olarak kayma deformasyon teorisinde (-%57.7)'den (-%53.8)'e azalırken klasik plak teorisinde ise (-%60.7)'den (-%54.4)'e azalmaktadır. İki eksenli yükleme durumunda kayma deformasyon teorisi için ortaya çıkan porozite etkileri tek eksenli yükleme durumundakilerden daha büyük olmaktadır. Klasik plak teorisi için tek tabakalı plaklarda her iki yükleme durumunda elde edilen porozite etkileri hemen hemen aynı olmaktadır. Üç tabakalı plaklarda ise $a/b \geq 2.5$ aralığında tek eksenli yükleme durumunda elde edilen porozite etkileri iki eksenli yükleme için ortaya çıkan etkilerden daha büyük olmaktadır. Her iki yükleme durumu arasındaki porozite etkisi farkı a/b 'nin artışına bağlı olarak artmaktadır. Örneğin, üç tabakalı plakları için her iki yükleme durumu arasındaki porozite etkisi farkı a/b 'nin 1'den 3'e artışına bağlı olarak kayma deformasyon ve klasik plak teorilerinde sırasıyla (%0.7) ve (%4.1) azalmaktadır. Tabaka dizilişleri kendi aralarında mukayese edildiğinde, iki eksenli yükleme durumunda $a/b > 1$ aralığında tek tabakalı plaklarda meydana gelen porozite etkisi üç tabakalı plaklardakinden daha büyük olmaktadır. Tek eksenli yükleme durumunda ise kayma deformasyon teorisi kapsamında $a/b > 1$ aralığında üç tabakalı plaklarda elde edilen porozite etkisi, klasik plak teorisi çerçevesinde ise $1 \leq a/b \leq 3$ aralığında tek tabakalı plaklarda ortaya çıkan porozite etkisi daha küçük olmaktadır. Her iki tabaka dizilişi arasındaki porozite etkisi farkı a/b 'nin 1'den 3'e artışına bağlı olarak iki eksenli yükleme durumunda yaklaşık (%1.6) artmaktadır. Tek eksenli yükleme durumunda ise kayma deformasyon teorisi için (%0.4) artarken klasik plak teorisi için (%2.1) azalmaktadır.

Kritik burkulma yükü üzerindeki kayma deformasyon etkisi a/b 'nin artışına bağlı olarak önce azalıp sonra artmaktadır. İki eksenli yükleme durumunda tek tabakalı plakların kritik burkulma yükü üzerindeki kayma deformasyon etkisi a/b 'nin 1'den 3'e artışına bağlı olarak önce yaklaşık (%1.4) azalırken sonra yaklaşık (%12.5) artmaktadır. Tek eksenli yükleme durumunda ortaya çıkan kayma deformasyon etkisi iki eksenli yükleme durumundaki etkiden daha büyük olmaktadır ve her iki yükleme durumu arasındaki kayma deformasyon etkisi farkı a/b 'nin artışına bağlı olarak artmaktadır. Örneğin, üç tabakalı plaklarda her iki yükleme durumu arasındaki kayma deformasyon etkisi farkı a/b 'nin 1'den 3'e artışına bağlı olarak M_2 ve M_4 modellerinde sırasıyla (%25.6) ve (%28.7) artmaktadır. Üç tabakalı plaklarda elde edilen kayma deformasyon etkisi tek tabakalı plaklarda ortaya çıkan etkiden daha büyük olmaktadır. Her iki tabaka dizilişi arasındaki en büyük kayma deformasyon etkisi farkı tek eksenli yükleme için (%17.6) ile $a/b = 2$ 'de elde edilirken iki eksenli yükleme durumunda ise (%4.5) ile $a/b = 1$ 'de ortaya çıkmaktadır.

Poroz ortotropik tabakalı kompozit plakların kritik burkulma yükü değerlerinin $a/b = 2$; $a/h = 10$, $\alpha = 0.8$ ve $\zeta = 0; 1$ için β_{01}/β_{02} 'ye bağlı değişimi Şekil 2'de sunulmaktadır. (0°) ve ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) gibi iki farklı tabaka dizilimi ile M_3 ve M_4 modelleri dikkate alınmaktadır.

Düzlem içi ortotropi oranı β_{01}/β_{02} 'nin artışına bağlı olarak kritik burkulma yükü değerleri azalmaktadır. M_3 modelinden oluşan tabakalı plakların kritik burkulma yükü değerleri M_4 modelinden meydana gelen tabakalı plaklarınkinden daha küçük olmaktadır. Tek eksenli yükleme durumunda elde edilen kritik burkulma yükü değerleri iki eksenli yükleme için ortaya çıkan kritik yük değerlerinden daha büyük olmaktadır. Her iki yükleme arasındaki bu kritik burkulma yükü değeri farkı β_{01}/β_{02} 'nin artışına bağlı olarak azalmaktadır.



Şekil 2. (a) Tek eksenli ve (b) iki eksenli aksel basınca maruz poroz ortotropik tabakalı kompozit plağın boyutsuz kritik burkulma yükü değerlerinin β_{01}/β_{02} oranına bağlı değişimi

Figure 2. Variation of dimensionless critical buckling load values of porous orthotropic laminated composite plate subjected to (a) uniaxial and (b) biaxial axial pressure, depending on the β_{01}/β_{02} ratio

Tabaka dizilişleri kendi aralarında mukayese edildiğinde, iki eksenli yükleme durumunda tek tabakalı plakların kritik burkulma yükü değerleri üç tabakalı plakların değerlerinden daha küçük olmaktadır. Tek eksenli yükleme durumunda ise dört tabakalı plakların kritik burkulma yükü değerleri tek tabakalı plakların değerlerinden klasik plak teorisi kapsamında daha büyük olurken kayma deformasyon teorisi çerçevesinde ise M_4 modelinde daha küçük, M_3 modelinde daha büyük olmaktadır.

Üç ve tek tabakalı plaklar arasındaki bu kritik yük değeri farkı β_{01}/β_{02} 'nin artışına bağlı olarak klasik plak teorisi için artarken kayma deformasyon teorisi için azalmaktadır.

Kritik burkulma yükü üzerindeki porozite etkisi β_{01}/β_{02} 'nin artışına bağlı olarak sadece tek tabakalı plak için klasik plak teorisi kapsamında sabit kalmaktadır. Bunun dışındaki tüm durumlarda β_{01}/β_{02} 'nin artışına bağlı olarak kritik burkulma yükü üzerindeki porozite etkisi azalmaktadır. Örneğin iki eksenli yüklemeye maruz üç tabakalı plak için β_{01}/β_{02} 'nin 10'dan 50'ye artışına bağlı olarak kritik burkulma yükü üzerindeki porozite etkisi kayma deformasyon teorisi için (-%62)'den (-%49.7)'e ve klasik plak teorisi için (-%65.8)'den (-%60.1)'e azalmaktadır. Her iki yükleme durumu porozite etkisi açısından kıyaslandığında, iki eksenli yüklemeye maruz üç tabakalı plakların kayma deformasyon teorisi kapsamındaki porozite etkileri tek eksenli yükleme durumundaki etkilerden daha büyük olurken bunun dışındaki tüm durumlarda her iki yükleme durumundaki porozite etkisi eşit olmaktadır. Üç tabakalı plakların kayma deformasyon teorisi kapsamındaki yükleme durumları arasındaki porozite etkisi farkı β_{01}/β_{02} 'nin 10'dan 50'ye artışına bağlı olarak yaklaşık (%2) artmaktadır. Kritik burkulma yükü üzerindeki porozite etkisi üç tabakalı durumda daha küçük olmaktadır. Tek ve üç tabakalı plaklar arasındaki bu porozite etkisi farkı β_{01}/β_{02} 'nin artışına bağlı olarak artmaktadır. Örneğin, her iki tabaka dizilişi arasındaki porozite etkisi farkı β_{01}/β_{02} 'nin 10'dan 50'ye artışına bağlı olarak tek ve iki eksenli yükleme durumlarında sırasıyla (%6) ve (%8) civarı artmaktadır.

Kritik burkulma yükü üzerindeki kayma deformasyon etkisi β_{01}/β_{02} 'nin artışına bağlı olarak artmaktadır. Örneğin üç tabakalı plaklar için β_{01}/β_{02} 'nin 10'dan 50'ye artışına bağlı olarak kritik burkulma yükü üzerindeki kayma deformasyon etkisi tek eksenli yükleme durumunda her iki model için de (%26) civarı artarken iki eksenli yükleme durumunda ise M_3 ve M_4 modellerinde sırasıyla (%20) ve (%25) artmaktadır. Üç tabakalı plaklar için ortaya çıkan kayma deformasyon etkisi tek tabakalı plaklar için elde edilen değerlerden daha büyük olmaktadır. İki tabaka dizilişi arasındaki kayma deformasyon etkisi farkı β_{01}/β_{02} 'nin artışına bağlı olarak artmaktadır. Örneğin, M_3 modelinden meydana gelen tek ve üç tabakalı plaklar arasındaki kayma deformasyon etkisi farkı β_{01}/β_{02} 'nin 10'dan 50'ye artışına bağlı olarak tek eksenli yükleme durumunda (%15.3)'ten (%25.6)'ya ve iki eksenli yükleme durumunda (%1.1)'den (%4.5)'e artış göstermektedir.

4. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada, poroz ortotropik tabakalı plakların burkulma davranışı yüksek mertebeden kayma deformasyon teorisi kapsamında incelenmektedir. Plakların tek ve iki eksenli eksenel basınç yüküne maruz kaldığı varsayılmaktadır. Poroz ortotropik tabakalı plakların kritik burkulma yükü üzerindeki geometrik parametrelerin, porozitenin, kayma deformasyonun, yükleme koşullarının ve düzlem içi ortotropinin etkileri detaylı olarak incelenmektedir. Bu analizler sonucunda ortaya çıkan genel sonuçlar aşağıda sunulduğu gibidir:

1. Kayma deformasyon teorisi kapsamındaki kritik burkulma yükü değerleri a/h oranının artışına bağlı olarak artarken klasik plak teorisi kapsamında elde edilen kritik yük değerleri ise sabit kalmaktadır.
2. Kayma deformasyon teorisi kapsamındaki kritik burkulma yükü değerleri a/b oranının artışına bağlı olarak azalırken klasik plak teorisi kapsamında elde edilen kritik yük değerleri ise önce azalıp sonra artıp tekrar azalmaktadır.
3. Kullanılan her iki teori kapsamında elde edilen kritik burkulma yükü değerleri β_{01}/β_{02} oranlarının artışına bağlı olarak azalmaktadır.
4. Tek eksenli yüklemeye maruz poroz tabakalı plakların kritik burkulma yükü değerleri, iki eksenli yüklemeye maruz poroz tabakalı plakların kritik burkulma yükü değerlerinden daha büyük olmaktadır.
5. Kayma deformasyon teorisi kapsamında her iki yükleme durumu arasındaki kritik burkulma yükü değeri farkı a/h oranının artışına bağlı olarak artarken, a/b ve β_{01}/β_{02} oranlarının artışına bağlı olarak azalmaktadır.
6. Porozitenin varlığı tabakalı plakların kritik burkulma yükü değerlerini azaltmaktadır.

7. Poroz tabakalı plakların kritik burkulma yükü üzerindeki porozite etkisi, kayma deformasyon teorisi kapsamında a/h oranının artışına bağlı olarak azalmaktadır. Klasik plak teorisi için ise a/h oranının artışına bağlı olarak sabit kalmaktadır.
8. Poroz çok tabakalı plakların kritik burkulma yükü üzerindeki porozite etkisi a/b ve β_{01}/β_{02} oranlarının artışına bağlı olarak azalmaktadır.
9. Tek ve iki eksenli yükleme koşulları arasındaki porozite etkisi farkı kayma deformasyon teorisi kapsamında a/h oranının artışına bağlı olarak azalırken a/b oranının artışına bağlı olarak ise artmaktadır.
10. Tabaka dizilişleri arasındaki porozite etkisi farkı β_{01}/β_{02} ve a/b oranlarının artışına bağlı olarak artmaktadır.
11. Poroz tabakalı plakların kritik burkulma yükü üzerindeki kayma deformasyon etkisi, a/h oranının artışına bağlı olarak azalırken β_{01}/β_{02} oranlarının artışına bağlı olarak artmaktadır. a/b oranının artışına bağlı olarak ise önce azalır sonra artmaktadır.
12. Tek ve iki eksenli yükleme koşulları arasındaki kayma deformasyon etkisi farkı a/h oranının artışına bağlı olarak azalırken a/b oranının artışına bağlı olarak ise artmaktadır.
13. Çok tabakalı poroz plaklar ve tek tabakalı poroz plaklar arasındaki kayma deformasyon etkisi farkı a/h oranının artışına bağlı olarak azalırken β_{01}/β_{02} oranlarının artışına bağlı olarak ise artmaktadır.

Etik Standartlar Bildirimi (Declaration of Ethical Standards)

Bu makalenin yazarları, yazarlık, alıntı, veri raporlama ve orijinal araştırma yayınlama da dahil olmak üzere etik yönergelere uyduklarını beyan ederler.

Yazar Katkı Beyannamesi (Credit Authorship Contribution Statement)

Ferruh TURAN: Orijinal taslak – makalenin yazımı – sonuçların incelenmesi ve değerlendirilmesi, denetleme. Suna ULU: Araştırma, analizler, kaynaklar. Yıldız ÜNAL: Analizler, modelleme.

Çıkar Çatışması Beyannamesi (Declaration of Competing Interest)

Yazarların herhangi bir çıkar çatışması yoktur.

Destek / Teşekkür (Funding / Acknowledgements)

Bu çalışma, kamu, ticari veya kar amacı gütmeyen sektörlerdeki finansman kuruluşlarından herhangi bir özel hibe almamıştır.

Veri Kullanılabilirliği (Data Availability)

Uygulanamaz.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

- [1] F. Turan, M. F. Başoğlu, and Z. Zerin, "Analytical solution for bending and buckling response of laminated non-homogeneous plates using a simplified-higher order theory," *Challenge Journal of Structural Mechanics*, vol. 3, no. 1, pp. 1-16, 2017.
- [2] K. Magnucki, M. Malinowski, and J. Kasprzak, "Bending and buckling of a rectangular porous plate," *Steel and Composite Structures*, vol. 6, no. 4, pp. 319-333, 2006.
- [3] E. Magnucka-Blandzi, "Axi-symmetrical deflection and buckling of circular porous-cellular plate," *Thin-Walled Structures*, vol. 46, no. 3, pp. 333-337, 2008.

- [4] M. Jabbari, E. F. Joubaneh, A. R. Khorshidvand, and M. R. Eslami, "Buckling analysis of porous circular plate with piezoelectric actuator layers under uniform radial compression," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 70, pp. 50-56, 2013.
- [5] A. Mojahedin, E. F. Joubaneh, and M. Jabbari, "Thermal and mechanical stability of a circular porous plate with piezoelectric actuators," *Acta Mechanica*, vol. 225, no. 12, pp. 3437-3452, 2014.
- [6] E. Farzaneh Joubaneh, A. Mojahedin, A. R. Khorshidvand, and M. Jabbari, "Thermal buckling analysis of porous circular plate with piezoelectric sensor-actuator layers under uniform thermal load," *J. Sandw. Struct. Mater.*, vol. 17, no. 1, pp. 3-25, 2015.
- [7] M. Jabbari, M. Hashemitaheri, A. Mojahedin, and M. R. Eslami, "Thermal buckling analysis of functionally graded thin circular plate made of saturated porous materials," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 37, no. 2, pp. 202-220, 2014.
- [8] A. Gupta and M. Talha, "Stability characteristics of porous functionally graded plate in thermal environment," *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.*, vol. 330, no. 1, p. 012011, 2018.
- [9] M. Malikan, F. Tornabene, and R. Dimitri, "Nonlocal three-dimensional theory of elasticity for buckling behavior of functionally graded porous nanoplates using volume integrals," *Mater. Res. Express*, vol. 5, no. 9, 2018.
- [10] M. Panah, A. R. Khorshidvand, S. M. Khorsandijou, and M. Jabbari, "Pore pressure and porosity effects on bending and thermal postbuckling behavior of FG saturated porous circular plates," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 42, no. 9, pp. 1083-1109, 2019.
- [11] F. Kiarasi, M. Babaei, K. Asemi, R. Dimitri, and F. Tornabene, "Three-dimensional buckling analysis of functionally graded saturated porous rectangular plates under combined loading conditions," *Appl. Sci.*, vol. 11, no. 21, pp. 1-21, 2021.
- [12] J. N. Reddy, "A simple higher-order theory for laminated composite plates," *J Appl Mech Trans ASME*, vol. 51, no. 4, pp. 745-752, 1984.
- [13] M. Touratier, "An efficient standard plate theory," *International Journal of Engineering Science*, vol. 29, no. 8, pp. 901-916, 1991.
- [14] K. P. Soldatos, "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates," *Acta Mechanica*, vol. 94, no. 3-4, pp. 195-220, 1992.
- [15] M. Karama, K. S. Afaq, and S. Mistou, "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, no. 6, pp. 1525-1546, 2003.
- [16] M. Aydogdu, "A new shear deformation theory for laminated composite plates," *Composite Structures*, vol. 89, no. 1, pp. 94-101, 2009.
- [17] H. T. Thai and D. H. Choi, "A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates," *Composite Structures*, vol. 101, pp. 332-340, 2013.
- [18] H. T. Thai and D. H. Choi, "A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates," *Composite Structures*, vol. 106, pp. 754-763, 2013.
- [19] A. Mahi, E. A. Adda Bedia, and A. Tounsi, "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 9, pp. 2489-2508, 2015.
- [20] A. Mojahedin, M. Jabbari, A. R. Khorshidvand, and M. R. Eslami, "Buckling analysis of functionally graded circular plates made of saturated porous materials based on higher order shear deformation theory," *Thin-Walled Structures*, vol. 99, pp. 83-90, 2016.
- [21] A. Gupta and M. Talha, "Influence of initial geometric imperfections and porosity on the stability of functionally graded material plates," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 46, no. 6, pp. 693-711, 2018.
- [22] S. Coskun, J. Kim, and H. Toutanji, "Bending, free vibration, and buckling analysis of functionally graded porous micro-plates using a general third-order plate theory," *J. Compos. Sci.*, vol. 3, no. 1, pp. 1-22, 2019.

- [23] T. H. L. Bekkaye et al., "Porosity-dependent mechanical behaviors of FG plate using refined trigonometric shear deformation theory," *Comput. Concr.*, vol. 26, no. 5, pp. 439-450, 2020.
- [24] A. R. Khorshidvand and A. R. Damercheloo, "Bending, axial buckling and shear buckling analyses of FG-porous plates based on a refined plate theory," *Aust. J. Mech. Eng.*, pp. 1-20, 2021.
- [25] M. Dhuria, N. Grover, and K. Goyal, "Influence of porosity distribution on static and buckling responses of porous functionally graded plates," *Structures*, vol. 34, pp. 1458-1474, 2021.
- [26] A. M. Zenkour and M. H. Aljadani, "Buckling Response of Functionally Graded Porous Plates Due to a Quasi-3D Refined Theory," *Mathematics*, vol. 10, no. 4, pp. 1-20, 2022.
- [27] R. Kumar, A. Lal, B. N. Singh, and J. Singh, "Numerical simulation of the thermomechanical buckling analysis of bidirectional porous functionally graded plate using collocation meshfree method," *Proc. Inst. Mech. Eng. Part L J. Mat. Des. Appl.*, vol. 236, no. 4, pp. 787-807, 2022.
- [28] N. D. Phan and J. N. Reddy, "Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, no. 12, pp. 2201-2219, 1985.
- [29] J. N. Reddy and N. D. Phan, "Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 98, no. 2, pp. 157-170, 1985.
- [30] A. K. Noor, "Stability of multilayered composite plates," *Fibre Science and Technology*, vol. 8, no. 2, pp. 81-89, 1975.
- [31] Y. Yuan, K. Zhao, and K. Xu, "Enhancing the static behavior of laminated composite plates using a porous layer," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 72, no. 6, pp. 763-774, 2019.
- [32] Y. Z. Yüksel and Ş. D. Akbaş, "Hygrothermal stress analysis of laminated composite porous plates," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 80, no. 1, pp. 1-13, 2021.
- [33] F. Pathan, S. Singh, S. Natarajan, and G. Watts, "An analytical solution for the static bending of smart laminated composite and functionally graded plates with and without porosity," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 92, no. 3, pp. 903-931, 2022.

EK A (APPENDIX A)

$$\begin{aligned}
r_{11} &= (\lambda_1^3 \eta_{11}^0 + \lambda_1 \lambda_2^2 \eta_{66}^0), r_{12} = \lambda_1^2 \lambda_2 (\eta_{12}^0 + \eta_{66}^0), r_{13} = -[\lambda_1^4 \eta_{11}^1 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 (\eta_{12}^1 + 2\eta_{66}^1)], \\
r_{14} &= (\lambda_1^3 \hat{\eta}_{11}^0 + \lambda_1 \lambda_2^2 \hat{\eta}_{66}^0), r_{15} = \lambda_1^2 \lambda_2 (\hat{\eta}_{12}^0 + \hat{\eta}_{66}^0), r_{21} = \lambda_1 \lambda_2^2 (\eta_{21}^0 + \eta_{66}^0), \\
r_{22} &= (\lambda_1^2 \lambda_2 \eta_{66}^0 + \lambda_2^3 \eta_{22}^0), r_{23} = -[\lambda_1^2 \lambda_2^2 (\eta_{21}^1 + 2\eta_{66}^1) + \lambda_2^4 \eta_{22}^1], r_{24} = \lambda_1 \lambda_2^2 (\hat{\eta}_{21}^0 + \hat{\eta}_{66}^0), \\
r_{25} &= (\lambda_1^2 \lambda_2 \hat{\eta}_{66}^0 + \lambda_2^3 \hat{\eta}_{22}^0), r_{31} = [\lambda_1^3 \eta_{11}^1 + \lambda_1 \lambda_2^2 (\eta_{21}^1 + 2\eta_{66}^1)], \\
r_{32} &= [\lambda_2^3 \eta_{22}^1 + \lambda_1^2 \lambda_2 (\eta_{12}^1 + 2\eta_{66}^1)], r_{33} = -[\lambda_1^4 \eta_{11}^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 (\eta_{12}^2 + \eta_{21}^2 + 4\eta_{66}^2) + \lambda_2^4 \eta_{22}^2], \\
\tilde{r}_{33} &= (\lambda_1^2 p_x + \lambda_2^2 p_y) - r_{33}, r_{34} = [\lambda_1^3 \hat{\eta}_{11}^1 + \lambda_1 \lambda_2^2 (\hat{\eta}_{21}^1 + 2\hat{\eta}_{66}^1)], \\
r_{35} &= [\lambda_2^3 \hat{\eta}_{22}^1 + \lambda_1^2 \lambda_2 (\hat{\eta}_{12}^1 + 2\hat{\eta}_{66}^1)], r_{41} = (\lambda_1^3 \hat{\eta}_{11}^0 + \lambda_1 \lambda_2^2 \hat{\eta}_{66}^0), r_{42} = \lambda_1^2 \lambda_2 (\hat{\eta}_{12}^0 + \hat{\eta}_{66}^0), \\
r_{43} &= -[\lambda_1^4 \hat{\eta}_{11}^1 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 (\hat{\eta}_{12}^1 + 2\hat{\eta}_{66}^1)], r_{44} = (\lambda_1^3 \hat{\eta}_{11}^1 + \lambda_1 \lambda_2^2 \hat{\eta}_{66}^1 + \lambda_1 \eta_{55}^1), r_{45} = \lambda_1^2 \lambda_2 (\hat{\eta}_{12}^1 + \hat{\eta}_{66}^1), \\
r_{51} &= \lambda_1 \lambda_2^2 (\hat{\eta}_{21}^0 + \hat{\eta}_{66}^0), r_{52} = (\lambda_1^2 \lambda_2 \hat{\eta}_{66}^0 + \lambda_2^3 \hat{\eta}_{22}^0), r_{53} = -[\lambda_1^2 \lambda_2^2 (\hat{\eta}_{21}^1 + 2\hat{\eta}_{66}^1) + \lambda_2^4 \hat{\eta}_{22}^1], \\
r_{54} &= \lambda_1 \lambda_2^2 (\hat{\eta}_{21}^1 + \hat{\eta}_{66}^1), r_{55} = (\lambda_1^2 \lambda_2 \hat{\eta}_{66}^1 + \lambda_2^3 \hat{\eta}_{22}^1 + \lambda_2 \eta_{44}^1)
\end{aligned} \tag{A1}$$

EK B (APPENDIX B)

$$\begin{aligned}
\psi_{31} &= r_{12} r_{23} (r_{44} r_{55} - r_{45} r_{54}) + r_{12} r_{43} (r_{25} r_{54} - r_{24} r_{55}) + r_{12} r_{53} (r_{24} r_{45} - r_{25} r_{44}) \\
&+ r_{13} r_{45} (r_{22} r_{54} - r_{24} r_{52}) + r_{13} r_{44} (r_{25} r_{52} - r_{22} r_{55}) + r_{13} r_{42} (r_{24} r_{55} - r_{25} r_{54}) \\
&+ r_{14} r_{23} (r_{45} r_{52} - r_{42} r_{55}) + r_{14} r_{22} (r_{43} r_{55} - r_{45} r_{53}) + r_{14} r_{25} (r_{42} r_{53} - r_{43} r_{52}) \\
&+ r_{15} r_{53} (r_{22} r_{44} - r_{24} r_{42}) + r_{15} r_{43} (r_{24} r_{52} - r_{22} r_{54}) + r_{15} r_{23} (r_{42} r_{54} - r_{44} r_{52})
\end{aligned} \tag{B1}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{32} &= -r_{11} r_{23} (r_{44} r_{55} - r_{45} r_{54}) - r_{11} r_{43} (r_{25} r_{54} - r_{24} r_{55}) - r_{11} r_{53} (r_{24} r_{45} - r_{25} r_{44}) \\
&- r_{13} r_{45} (r_{21} r_{54} - r_{24} r_{51}) - r_{13} r_{44} (r_{25} r_{51} - r_{21} r_{55}) - r_{13} r_{41} (r_{24} r_{55} - r_{25} r_{54}) \\
&- r_{14} r_{23} (r_{45} r_{51} - r_{41} r_{55}) - r_{14} r_{21} (r_{43} r_{55} - r_{45} r_{53}) - r_{14} r_{25} (r_{41} r_{53} - r_{43} r_{51}) \\
&- r_{15} r_{21} (r_{44} r_{53} - r_{43} r_{54}) - r_{15} r_{41} (r_{23} r_{54} - r_{24} r_{53}) - r_{15} r_{51} (r_{24} r_{43} - r_{23} r_{44})
\end{aligned} \tag{B2}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{33} &= r_{11} r_{22} (r_{44} r_{55} - r_{45} r_{54}) + r_{11} r_{42} (r_{25} r_{54} - r_{24} r_{55}) + r_{11} r_{52} (r_{24} r_{45} - r_{25} r_{44}) \\
&+ r_{12} r_{21} (r_{45} r_{54} - r_{44} r_{55}) + r_{12} r_{24} (r_{41} r_{55} - r_{45} r_{51}) + r_{12} r_{25} (r_{44} r_{51} - r_{41} r_{54}) \\
&+ r_{14} r_{41} (r_{25} r_{52} - r_{22} r_{55}) + r_{14} r_{21} (r_{42} r_{55} - r_{45} r_{52}) + r_{14} r_{51} (r_{22} r_{45} - r_{25} r_{42}) \\
&+ r_{15} r_{41} (r_{22} r_{54} - r_{24} r_{52}) + r_{15} r_{21} (r_{44} r_{52} - r_{42} r_{54}) + r_{15} r_{51} (r_{24} r_{42} - r_{22} r_{44})
\end{aligned} \tag{B3}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{34} &= -r_{11} r_{42} (r_{25} r_{53} - r_{23} r_{55}) - r_{11} r_{22} (r_{43} r_{55} - r_{45} r_{53}) - r_{11} r_{52} (r_{23} r_{45} - r_{25} r_{43}) \\
&- r_{12} r_{21} (r_{45} r_{53} - r_{43} r_{55}) - r_{12} r_{51} (r_{25} r_{43} - r_{23} r_{45}) - r_{12} r_{41} (r_{23} r_{55} - r_{25} r_{53}) \\
&- r_{13} r_{41} (r_{25} r_{52} - r_{22} r_{55}) - r_{13} r_{21} (r_{42} r_{55} - r_{45} r_{52}) - r_{13} r_{51} (r_{22} r_{45} - r_{25} r_{42}) \\
&- r_{15} r_{21} (r_{43} r_{52} - r_{42} r_{53}) - r_{15} r_{51} (r_{23} r_{42} - r_{22} r_{43}) - r_{15} r_{41} (r_{22} r_{53} - r_{23} r_{52})
\end{aligned} \tag{B4}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{35} &= r_{11} r_{22} (r_{43} r_{54} - r_{44} r_{53}) + r_{11} r_{42} (r_{24} r_{53} - r_{23} r_{54}) + r_{11} r_{52} (r_{23} r_{44} - r_{24} r_{43}) \\
&+ r_{12} r_{41} (r_{23} r_{54} - r_{24} r_{53}) + r_{12} r_{21} (r_{44} r_{53} - r_{43} r_{54}) + r_{12} r_{51} (r_{24} r_{43} - r_{23} r_{44}) \\
&+ r_{13} r_{51} (r_{22} r_{44} - r_{24} r_{42}) + r_{13} r_{21} (r_{42} r_{54} - r_{44} r_{52}) + r_{13} r_{41} (r_{24} r_{52} - r_{22} r_{54}) \\
&+ r_{14} r_{41} (r_{22} r_{53} - r_{23} r_{52}) + r_{14} r_{21} (r_{43} r_{52} - r_{42} r_{53}) + r_{14} r_{51} (r_{23} r_{42} - r_{22} r_{43})
\end{aligned} \tag{B5}$$