



## Hiperstatik aksenal yüklü viskoelastik çubukların analizi için yeni enerji fonksiyoneli

### New energy functional for analysis of statically indeterminate axially loaded viscoelastic bars

Gülçin Tekin<sup>1,\*</sup> , Fethi Kadioğlu<sup>2</sup> 

<sup>1</sup> Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 34220, İstanbul, Türkiye

<sup>2</sup> İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 34469, İstanbul, Türkiye

#### Öz

Elastik cisimlerde gerilme sadece şekil değiştirmenin bir fonksiyonudur, viskoelastik cisimlerde ise gerilme hem şekil değiştirmeye hem de şekil değiştirme hızına bağlıdır. Maddesel sabitleri farklı olan yayların ve sönüm kutularının çeşitli kombinasyonları yapılarak, yüksek polimerler, naylon lifler, beton vb. malzemelerin mekanik davranışlarını temsil etme olanağı vardır. Maxwell modeli kullanılarak mekanik davranışı temsil edilen statikçe belirsiz aksenal yüklü çubuk probleminin ele alındığı bu çalışmada, toplam potansiyel enerji (TPE) teoremi kullanılarak en karmaşık yapı sistemlerine bile kolaylıkla uygulanabilecek bir çözüm yolu önerilmiştir. Düğüm noktalarının yer değiştirmeleri cinsinden bulunan TPE ifadesi Laplace uzayında elde edilmiştir. TPE ifadesini minimum yapan çözümler gerçek yer değiştirmeler olup, Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Ters Laplace dönüşümü yöntemi uygulanmıştır. Yöntem örnek problem üzerinde test edilmiş ve sonuçlar sunulmuştur. Bu yöntem, viskoelastik malzeme modelinin, sistemi oluşturan eleman sayısının ve yükleme tipinin değişmesinden bağımsız olarak birkaç basit işlem adımının takibi ile doğrudan çözüme ulaşmada büyük kolaylık sağlar.

**Anahtar kelimeler:** Hiperstatik sistemler, Viskoelastik, Toplam potansiyel enerji, Laplace dönüşümü, Ters laplace dönüşümü

#### 1 Giriş

Mühendislik yapıları daha çeşitli ve karmaşık hale geldikçe, mühendisin klasik yapısal analiz yöntemlerini uygulamada başarılı olması yeterli olmayacaktır. Mühendisler, temel teşkil eden teorilerin sınırlarının farkında olmalıdırlar ve temel kabullerin geçerliliği hakkında akıllı kararlar verebilmelidirler.

Teoride, yapının herhangi bir noktasında yer değiştirme vektörünü ve gerilme vektörünü elde etmek için probleme ait diferansiyel denklemleri integre etmek ve uygun sınır koşullarını sağlamak mümkündür. Ancak pratikte integrasyonu analitik olarak gerçekleştirmek neredeyse çoğu zaman imkânsız bir iştir. Bu 'vektörel' yaklaşıma bir diğer alternatif yöntem 'skaler' büyüklükler olan *iş* ve *enerjinin*

#### Abstract

In elastic bodies, stress is only a function of strain, while in viscoelastic bodies, stress depends on both strain and strain rate. By making various combinations of springs and dashpots with different material constants, it is possible to represent the mechanical behavior of materials such as high polymers, nylon fibers, concrete etc. In this study, which discusses the statically indeterminate axially loaded bar problem, whose mechanical behavior is represented using the Maxwell model, a solution technique that can be easily applied to even the most complex structural systems is proposed by using the total potential energy (TPE) theorem. The TPE expression in terms of the displacement of the nodes is obtained in the Laplace space. The solutions that minimize the TPE expression are the real displacements, and the Inverse Laplace transform method is applied to return to the time domain. The method has been tested on the sample problem and the results are presented. This method provides great convenience in obtaining the solution directly by following a few simple process steps, regardless of the change in the viscoelastic material model, the number of elements of the system and the type of loading.

**Keywords:** Statically indeterminate systems, Viscoelastic, Total potential energy, Laplace transform, Inverse Laplace transform

dikkate alınması ile geliştirilebilir. Oldukça iyi bilinen, biri yer değiştirmeler cinsinden, diğeri kuvvetler cinsinden ifade edilen iki eşlenik enerji yöntemini ele alalım. Doğrudan denge denklemlerinden ve şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkilerinden gelen sırasıyla *virtüel iş* ve *tamamlayıcı virtüel iş* ilkeleri yer değiştirme ve kuvvet formülasyonlarının temelini oluşturur. *Minimum potansiyel enerji* ilkesi dâhil olmak üzere birçok önemli enerji teoremi, *virtüel* (sanal) *iş* kavramlarından türetilmiştir. Bu çalışmanın temel esası, statikçe belirsiz (hiperstatik) viskoelastik çubuk problemlerinin analizi için *iş* ve enerji yöntemlerinin temeli olan *virtüel iş* ilkesinden yola çıkılarak, *toplam potansiyel enerji* fonksiyonelinin geliştirilmesi ve çeşitli uygulamaları üzerinedir.

\* Sorumlu yazar / Corresponding author, e-posta / e-mail: gulcint@yildiz.edu.tr (G. Tekin)

Geliş / Recieved: 10.10.2022 Kabul / Accepted: 07.11.2022 Yayınlanma / Published: 15.01.2023

doi: 10.28948/ngumuh.1187163

Mühendislik yapıları çeşitli şekillerde sınıflandırılabilir. En yaygın sınıflandırma geometrik konfigürasyon ve yapının yüklemeye özelliklerinin bir kombinasyonuna dayanmaktadır. Geometrik açıdan en basit yapı bir çubuktur. Yüklemenin çekme veya basınç, burulma veya eğilme olmasına bağlı olarak, doğru eksenli bir çubuk genellikle sırasıyla çubuk, kolon, şaft veya kiriş olarak adlandırılır.

Gerilme-şekil değiştirme eğrisi bilinen bir malzemeden üretilmiş bir yapıyı analiz etmek için, gerilme-şekil değiştirme verilerinin matematiksel olarak ifade edilmesi gereklidir. Bunu yaparken, mümkün olduğu kadar basit, ancak yeterince doğru sonuçlar verecek olan bir matematiksel model seçmek istenilir. En basit ve en yaygın idealleştirme, 'doğrusal elastik' davranış türüdür. Hiçbir gerçek malzeme aslında doğrusal olarak 'elastik' olmasa da, karşılaşılan deformasyonların nispeten küçük olması koşuluyla neredeyse tüm malzemeler için 'doğrusal' bir ilişki yaklaşık olarak geçerlidir.

Elastik katılar ve viskoz akışkanlar, yüklere tepkisi neredeyse herkes tarafından anlaşılan iki tür mühendislik malzemesidir. Yüklere tepkisi hem elastik katıların hem de viskoz akışkanların özelliklerini birleştiren malzemelere viskoelastik malzemeler denir ve anlaşılması elastik katılardan veya viskoz sıvılardan biraz daha zordur. Yeni geliştirilen malzemelerin çoğu, elastik ve viskoz davranış kapsamı dışında kalan mekanik tepki özellikleri sergiler, bu nedenle daha genel bir teoriye duyulan ihtiyaç oldukça belirgindir. Bu tür malzemelerin davranışını tanımlamak için geliştirilen mühendislik disiplinine *viskoelastisite* denir. Yüksek sıcaklıklardaki metaller, beton ve polimerler viskoelastik davranışın bazı örnekleridir. Viskoelastik malzemenin en belirgin özelliği zamana bağlı bir gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip olmalarıdır ve hafızalı malzemeler olarak bilinirler. Lineer elastik bir malzemede gerilme-şekil değiştirme eğrisi elastisite modülü ile orantılı bir eğime sahip düz bir çizgi iken, lineer viskoelastik bir malzeme, eğrisel bir gerilme-şekil değiştirme grafiğine sahiptir. Viskoelastik malzemelerdeki en temel olaylar; Sünme: gerilme sabit tutulursa, şekil değiştirme zamanla artar (Creep) ve Gevşeme: şekil değiştirme sabit tutulursa, gerilme zamanla azalır (Relaxation).

Viskoelastisite problemlerine yaklaşık çözümler elde etmek için, sayısal yöntemler sıklıkla kullanılır. Özellikle sonlu elemanlar yöntemi birçok araştırmacı tarafından viskoelastik kirişlerin analizinde başarıyla kullanılmıştır. Chen [1] çalışmasında lineer viskoelastik kirişin yarı-statik ve dinamik analizi için hibrit Laplace dönüşümü ve sonlu elemanlar yöntemini kullanmıştır. Analizde Timoshenko kiriş teorisi ve geleneksel kiriş teorisi kullanılmış, viskoelastik malzeme modeli olarak Maxwell akışkan ve üç parametrelili katı tipi modeller analiz edilmiştir. Sıcaklık alanının sabit ve homojen olduğu gevşeme modülünün Prony serisi formunda olduğu kabul edilmiştir. Laplace uzayında elde edilen çözümler Honig ve Hirdes [2] tarafından önerilen sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi ile gerçek uzaya dönüştürülmüştür. Mehl ve Miles [3] çalışmalarında viskoelastik malzeme içeren kiriş sisteminin geçici tepki analizi (transient response analysis) için çok serbestlik dereceli sonlu eleman modeli sunmuşlardır. Frekans

uzayında çözülen yönetici denklemler, ters Hızlı Fourier Dönüşümü (Fast Fourier Transform) ile zaman uzayına çevrilmiştir. Viskoelastik malzemenin özelliklerini temsil etmek için karmaşık, frekans ve sıcaklığa bağlı kesme modülü kullanılmıştır. Aköz ve Kadioğlu [4] lineer viskoelastik Timoshenko ve Euler-Bernoulli kirişlerinin yarı-statik ve dinamik analizini hibrit Laplace-Carson ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak sayısal olarak incelemiştir. Gâteaux diferansiyel yöntemini kullanarak Laplace-Carson uzayında viskoelastik Timoshenko ve Euler-Bernoulli kirişleri için iki yeni fonksiyonel elde etmişlerdir. Ters dönüşüm için Schapery ve Fourier yöntemlerini kullanmışlardır. Barbosa ve Farange [5] çalışmalarında sandviç viskoelastik kirişler için sonlu eleman modeli geliştirmişlerdir. Laplace uzayındaki hareket denklemlerinin ikinci mertebeden zaman uzayındaki realizasyonuna dayanan Golla-Hughes yöntemi (GHM) kullanılmıştır. Viskoelastik malzemenin tanımlanmasında kullanılan GHM parametreleri deneysel olarak belirlenmiştir. Önerilen sonlu eleman modelinin performansı, sayısal sonuçlar ve deneysel karşılıkları arasında yapılan kıyaslamalarla değerlendirilmiştir. Pálfalvi [6] çalışmasında viskoelastik kirişlerin dinamik analizi için sonlu eleman formülasyonlarını karşılaştırmıştır. Lineer viskoelastik malzemeden yapılmış bir konsol kirişin doğal titreşim frekansı ve ilgili sönüm oranları hesaplanmıştır. Viskoelastik malzeme modeli olarak genelleştirilmiş Maxwell modeli kullanılmıştır. Modelin tanımı için düğüm ve eleman tabanlı viskoelastik değişkenleri kullanan yaklaşımlar ele alınmıştır. Düğüm noktası tabanlı yaklaşım için Enelund ve Lesieutre [7] tarafından önerilen Anelastic Displacement Field (ADF) modeli orijinal haliyle ve değiştirilmiş sınır koşullarıyla birlikte kullanılırken, eleman bazlı yaklaşım için ADF modeli eleman serbestlik dereceleri esas alınarak uygulanmıştır. Ele alınan modellerin sonuçları birbirleriyle ve MARC ticari sonlu eleman kodundan elde edilen sonuçlarla kıyaslanmıştır. Kpeky vd. [8] çalışmalarında viskoelastik sandviç kirişlerin serbest titreşim analizi için katı-kabuk (solid-shell) sonlu elemanlar yöntemini geliştirmişlerdir. Farklı sonlu eleman ayrıştırılmalarını kullanarak problemin genel formülasyonunu sunmuşlar ve bunlarla ilgili kısıtlara değinmişlerdir. Huang vd. [9], iki elastik tabaka arasında sıkıştırılmış viskoelastik malzeme çekirdekli sandviç kirişin titreşim analizi için birinci dereceden kayma deformasyon teorisi ve Hamilton ilkesine dayalı, genel bir sonlu eleman modeli geliştirmişlerdir. Sonlu eleman denkleminde, katmanlar arasında göreceli kayma olmadığı varsayılmış ve eylemsizlik momentinin etkisi dikkate alınmamıştır. Önerilen sonlu eleman modeli kullanılarak ilk üç titreşim modunda viskoelastik sandviç konsol kiriş üzerinde deneysel testler yapılmış ve sonuçların sayısal sonuçlarla uyumlu olduğu gösterilmiştir. Filippi ve Carrera [10] çalışmalarında düşük ve yüksek dereceli tek boyutlu sonlu elemanlara sahip viskoelastik üç boyutlu kiriş benzeri yapıların gerilme analizlerini ele almışlardır. Yönetici denklemlerin elde edilmesinde Hamilton ilkesi kullanılmıştır ve denklemler Laplace uzayında çözülmüştür. Laplace uzayında elde edilen sonuçların sayısal olarak ters çevrilmesiyle yer değiştirme ve

gerilmelerin zamanla değişimi elde edilmiştir. Çalışmada çeşitli sınır koşulları ve yükleme durumlarına maruz kalan farklı yapılar incelenmiştir. Ayrıca, son yıllarda eksenel yüklü viskoelastik kirişlerin [11-19], viskoelastik plak ve kabuk gibi yapı elemanlarının [20-24] titreşim ve stabilite analizi pek çok araştırmacının ilgisini çekmiş ve çözüm için farklı yöntemler kullanılmıştır.

Viskoelastik kiriş problemleriyle ilgili yukarıda bahsedilen çalışmalar dikkate alındığında, mevcut çalışmanın yürütülmesine sebep olan en önemli etken, yaklaşık analiz yöntemlerinin temeli olan iş ve enerji ilkelerini kullanan çalışmalarla ilgili literatürün nispeten sınırlı olmasıdır. İş ve enerji yöntemlerinin geliştirilmesi ve çeşitli elastik yapı elemanları için uygulamaları üzerine birçok kapsamlı araştırma yapılmış olmasına rağmen, malzemenin viskoelastik özellikleri dikkate alınarak yapılmış çalışmalara az rastlanmaktadır. Yazarların bilgisi dâhilinde, statikçe belirsiz viskoelastik çubukların davranışı ilk kez bu araştırma kapsamında enerji esaslı yöntem ile incelenmiştir.

Bu çalışmada, statikçe belirsiz eksenel yüklü viskoelastik çubuk probleminin analizi yapılmıştır. Viskoelastik davranışı tanımlamak için Maxwell modeli kullanılmıştır. Laplace dönüşümünün temel bazı özellikleri kullanılarak, eksenel yüklü hiperstatik viskoelastik çubukların analizi için Laplace uzayında yeni enerji fonksiyoneli elde edilmiştir. Toplam potansiyel enerji ilkesi ile Laplace uzayında elde edilen çözümlerden, gerçek zaman uzayındaki çözümlere geçmek için ters Laplace dönüşümü uygulanmıştır. Sunulan enerji esaslı formülasyon sayısal uygulama ile doğrulanmıştır. Bu çalışma kapsamında geliştirilen yöntem geniş bir uygulama alanına sahip olacak ve çeşitli viskoelastik yapı elemanlarının (iki veya daha fazla çubuktan oluşan ve eğilme, kesme ve eksenel yüklere maruz kalan çerçeve tipi yapılar, düzlem veya uzay kafes sistemler vb.) analizi için rahatlıkla uyarlanabilecektir. Yazar ve çalışma arkadaşlarının bu yöndeki çalışmaları hızla devam etmektedir.

## 2 Metodoloji

Lineer viskoelastisite, lineer yaylar ve sönüm kutularından oluşturulan mekanik modeller aracılığıyla ifade edilebilir. Bu modeller adi diferansiyel denklemler olan kurucu ilişkiler üretir. Viskoelastik malzemelerde herhangi bir 't' zamanındaki tepki, tüm önceki zamanlarda uygulanan uyarılara verilen tepkilerin toplamıdır. Bu nedenle toplama işlemi olan *integraller* de kurucu ilişkileri üretmek için kullanılabilir. Bu integral yaklaşımı viskoelastik teori için bir başlangıç noktası olarak kullanılır ve lineer viskoelastik tepkinin "*Boltzmann Süperpozisyon İntegrali (Boltzmann Superposition Integral)*" ifadesi bu tanımdan ortaya çıkar.

Boltzmann ilkesine göre, her bir artırımlı yüke tepki, diğer artırımlı yüklerden kaynaklanan tepkilerden bağımsızdır ve artırımlı adım yükleri serisi aracılığıyla idealleştirilen tüm yük geçmişine yanıt, bireysel yanıtların toplamına eşittir.

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^N \Delta\sigma_i(t) = \sum_{i=1}^N M(t-t_i)\Delta\varepsilon_i \quad t \geq t_i \quad (1)$$

Denklem (1)'de  $M$  fonksiyonu gevşeme modülüdür (Relaxation Modulus). Benzer bir ilişki şekil değiştirme için aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^N \Delta\varepsilon_i(t) = \sum_{i=1}^N C(t-t_i)\Delta\sigma_i \quad t \geq t_i \quad (2)$$

Denklem (2)'de  $C$  fonksiyonu sünme uyumu (Creep Compliance) olarak isimlendirilir. Denklem (1) ve (2) alternatif olarak sırasıyla,

$$\sigma(t) = \int_0^t M(t-\tau) \frac{\partial\varepsilon(\tau)}{\partial\tau} d\tau \quad (3)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t C(t-\tau) \frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau} d\tau \quad (4)$$

Denklem (3) ve (4) şeklinde ifade edilebilir. Burada  $\tau$ ,  $t$  'den küçük veya ona eşit olan bir zaman değişkenidir. Lineer viskoelastik kurucu denklemler konvolüsyon integrallerine (convolution integral) karşılık geldiğinden, bunları cebirsel denklemlere dönüştürmek için Laplace dönüşümü uygulanabilir. Verilen bir  $f(t)$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü matematiksel olarak Denklem (5)'te verilmiştir.

$$\mathcal{L}(f(t)) \equiv \bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (5)$$

Viskoelastik bünye denklemleri konvolüsyon integrali ile

$$\sigma(t) = M(t-\tau) * d\varepsilon(\tau) \quad (6)$$

$$\varepsilon(t) = C(t-\tau) * d\sigma(\tau) \quad (7)$$

Denklem (6) ve (7) şeklinde ve cebirsel denklemler

$$\bar{\sigma}(s) = s\bar{M}(s)\bar{\varepsilon}(s) \quad (8)$$

$$\bar{\varepsilon}(s) = s\bar{C}(s)\bar{\sigma}(s) \quad (9)$$

Denklem (8) ve (9) şeklinde verilebilir.

Başlangıçta gerilmemiş bir yapı, yük sistemine maruz kaldığında meydana gelen deformasyon termodinamiğin birinci yasası tarafından en genel halde,

$$W_E + Q = \Delta E \quad (10)$$

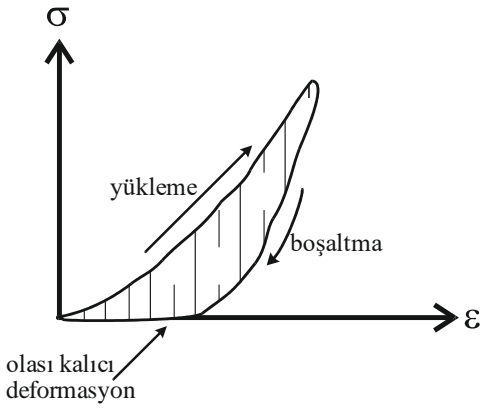
Denklem (10) ile verilir. Burada  $\Delta E$  yükleme sonucunda yapıda meydana gelen enerji değişimi,  $Q$  ise yapının çevresinden emdiği ısıdır. Burada deformasyon sürecinin adyabatik (ısı değişimsiz) olduğu varsayımı ile  $Q=0$  olacaktır.

Genel olarak elastik bir yapının enerjisindeki değişim, kinetik enerjideki bir değişim ile iç enerjideki bir değişimden oluşur. Yüklerin çok yavaş uygulandığını ve tüm süreç boyunca denge durumunun korunduğunu varsayarsak, bu durumda kinetik enerji sıfırdır ve enerjideki değişiklik sadece, iç enerjideki bir değişikliği ifade eder. Bu kabuller altında, enerjinin korunumu ifadesi

$$W_E = U \quad (11)$$

Denklem (11) şekline indirgenir. Burada  $W_E$  dış kuvvetler tarafından yapılan iş,  $U$  ise iç kuvvetler tarafından yapılan iştir. Bu durumda uygulanan yüklerin yaptığı mekanik iş, iç enerjideki değişime eşittir. Bir başka deyişle iş, deforme olmuş yapıda enerji biçiminde depolanmış olarak kabul edilebilir. Bu depolanmış enerjiye şekil değiştirme enerjisi (strain energy) denir.

Bilindiği gibi elastik malzemeler enerji kaybı olmaksızın mekanik enerjisi depolama kapasitesine sahiptirler. Diğer yandan, Newton tipi viskoz bir sıvı, enerjisi dağıtma kapasitesini tarif eder ve bu malzemelerin enerji depolama kapasiteleri yoktur. Viskoelastik malzemeler ise mekanik enerjisi hem depolama hem de dağıtma kapasitesine sahiptir. Bu dağıtma, histerezis (hysteresis) olarak da bilinir. Bir viskoelastik malzemenin tipik tepkisi; yüklem-boşaltma eğrileri çakışmaz ve bir histerezis döngüsü oluşturur. Tam yük boşaltmada, kalıcı deformasyon olabilir veya olmayabilir (Şekil 1).



Şekil 1. Viskoelastik malzeme için gerilme-şekil değiştirme eğrisi

Tanım olarak şekil değiştirme enerjisi

$$dU_N = \sigma d\varepsilon \quad (12)$$

Denklem (12) ilişkisi ile verilebilir. Bu bağıntıda  $\sigma$ , cismin bir noktasına etkiyen gerilme değerini,  $\varepsilon$  ise o noktada yaratılan şekil değiştirmeyi verecektir.  $N$  alt indisi ise enerjinin cismin bir noktasında hesaplandığını gösterir. Bu noktada şekil değiştirme  $\varepsilon_0$  değerine ulaştığında biriken iç enerji

$$U_N = \int_0^{\varepsilon_0} \sigma d\varepsilon \quad (13)$$

Denklem (13) şeklinde hesaplanır. Bir noktada tanımlanan  $U_N$  iç enerjisi, çubuk hacminde integre edilirse

$$U = \int_V U_N dV \quad (14)$$

Denklem (14) şeklinde iç enerji bağıntısı elde edilir. Bu integralin hesaplanabilmesi için cisme ait gerilme-şekil değiştirme ilişkisinin bilinmesi gerekir. Birim hacme düşen şekil değiştirme enerjisi (şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu) viskoelastik malzeme için Gutierrez-Lemini [25] tarafından

$$U_v = \frac{1}{2} \int_{\tau=0}^t \left[ \int_{s=0}^t M(s-\tau) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds \right] \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (15)$$

Denklem (15) şeklinde verilir.

Deformasyonu oluşturan dış yükler sisteminin yaptığı iş için genel tanım olarak,  $x$ 'in bir fonksiyonu olan değişken  $F(x)$  kuvvetinin yaptığı iş, kuvvet eğrisinin altında kalan alandır şeklinde Denklem (16) ile verilir.  $F(x)$  ile gösterilen yük sadece tekil kuvvetlerle sınırlı değildir.  $F(x)$  aynı zamanda değişken kuvvetleri, kuvvet çiftlerini vb. temsil edebilir ve bu nedenle genelleştirilmiş kuvvet olarak değerlendirilecektir.  $x$ 'de bu kuvvetten dolayı yapıdaki yer değiştirmeyi gösterir.

$$W_E = \int_{x1}^{x2} F(x) dx \quad (16)$$

### 3 Toplam potansiyel enerji ilkesi

Bu bölümde, enerjinin korunumu ilkesinin genelleştirilmiş olarak düşünülen ve mekaniğin birçok dalında kullanılan virtüel iş ilkesinden yola çıkılarak varyasyon hesabı ile toplam potansiyel enerji ilkesine geçiş yapılacaktır. Virtüel iş ilkesi cismin bünyesinden bağımsız olarak elastik, plastik gibi her türlü malzeme için kolaylıkla uygulanabilen yapı mekaniğinin en güçlü teoremidir. Virtüel yer değiştirme teoremine göre, dış yükler altında dengede olan bir sisteme, sistemin bağları ile uyumlu kabul edilebilir virtüel (sanal) yer değiştirme verilirse, dış kuvvetlerin yaptığı virtüel iş, iç kuvvetlerin yaptığı virtüel işe eşittir [Denklem (17)].

$$\delta U = \delta W \quad (17)$$

$\delta$  sembolü değişime uğrayan büyüklüklerin önüne yazılan özel bir operatör işaretidir. Denklem (17)'i  $\delta$  varyasyonuna göre paranteze alırsak:

$$\delta(U - W) = 0 \quad (18)$$

Denklem (18) elde edilir. Toplam potansiyel enerji  $\Pi$ , sistemin iç kuvvetlerinin potansiyeli ile dış kuvvetlerinin potansiyelinin toplamından meydana gelmektedir. İç kuvvetlerin potansiyeli şekil değiştirme enerjisi  $U$  dan ibarettir.

$$\Pi = U - W \quad (19)$$

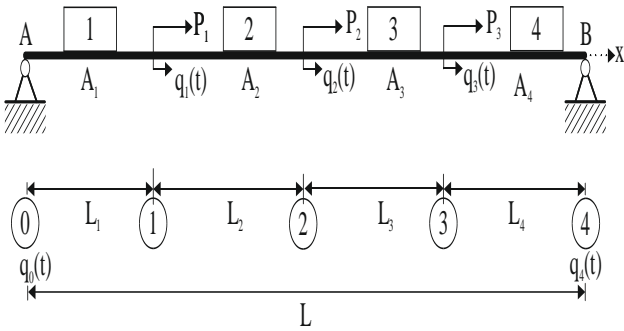
Denklem (19) kullanılarak, virtüel yer değiştirme ilkesi bir başka gösterimle

$$\delta\Pi = 0 \quad (20)$$

Denklem (20) olarak yazılabilir. Toplam potansiyelin birinci varyasyonunun sıfır olduğu görülür. Böylece virtüel iş ilkesi,  $\Pi$  toplam potansiyel enerji fonksiyonunun varyasyonunun sıfır yapılmasına karşı gelmiş olur. Toplam potansiyel enerjiyi en küçük yapan konum gerçek denge konumudur. Bu çalışmada statikçe belirsiz,  $L$  boyunda viskoelastik malzemeden yapılmış ekselel yüklü çubuğun üzerine üç adet ekselel kuvvet etkimesi durumunu ele alalım ve her bir elemanın boylarının da farklı olduğunu düşünelim. Sistemi toplam potansiyel enerji ilkesi ile çözmeye çalışalım. Bu problem ile toplam potansiyel enerji ilkesi, ekselel yüklü statikçe belirsiz viskoelastik çubukların genel formülasyonunun elde edilmesi için ilk kez uygulanmış olacaktır.

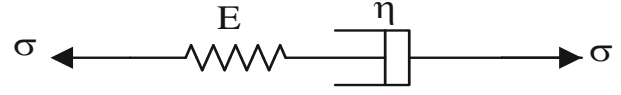
#### 4 Ekselel yüklü hiperstatik viskoelastik çubuk

Şekil 2’de A ve B uçlarından sabitlenmiş kesit alanı A (sabit) ve uzunluğu  $L$  olan bir çubuğun üzerine üç adet tekil kuvvet etkimesi durumunu ele alalım.



Şekil 2. Ekselel yüklü hiperstatik viskoelastik çubuk

İlk olarak mesnetlere ve kuvvet etki noktalarına düğüm noktası numarası verilmiştir. Düğüm noktalarının yer değiştirmeleri  $q_0, q_1, q_2, q_3$  ve  $q_4$ ’tür. A ve B sabit noktalarına ait olan yer değiştirmeler  $q_0$  ve  $q_4$  sıfırdır. Geriye bilinmeyen olarak  $q_1, q_2$  ve  $q_3$  kalacaktır. Düğüm noktaları arasında kalan parçaların her biri eleman olarak isimlendirilmiş ve şekilde görüldüğü gibi numaralandırılmıştır. Şekil 2’de görüldüğü gibi sistemin dört elemanı ve beş düğüm noktası vardır. Viskoelastik malzeme davranışını temsil etmek için standart reolojik model olan Maxwell mekanik modeli kullanılmıştır. Reolojik modeller doğrusal elastik yaylar ve viskoz sönüm kutularının çeşitli kombinasyonlarından oluşmaktadır. Lineer elastik bir yay ve lineer viskoz sönüm kutusunun seri bağlanmasıyla geliştirilen (Şekil 3) temel reolojik modellerden biri Maxwell modelidir.



Şekil 3. Maxwell modeli

Bir Maxwell malzemesinde gerilme, şekil değiştirme ve bunların  $t$  zamanına göre değişimi Denklem (21) ile verilir.

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\epsilon} \quad (21)$$

Zamana göre türevler terimlerin üzerindeki bir nokta ile temsil edilmiştir. Burada  $\eta$  sabiti viskozite katsayısı,  $E$  ise elastisite sabitidir. Zamana bağlı deplasmana ve kısa süreli elastik davranışa sahip bir malzeme modeli sunularak, birçok viskoelastik cisimlerin davranışları hakkında yaklaşık fakat akla yatkın bir model elde edilebilir. Maxwell modeli bu özelliğe sahip mekanik bir modeldir.

Sistemin iç enerjisi, elemanların enerjileri toplamı olarak Laplace uzayında hesaplanabilir. Bu durumda sistemin  $\bar{\Pi}$  toplam potansiyel enerjisi:

$$\bar{\Pi} = \sum_{i=1}^N \bar{U}_i - \bar{W}_E \quad (22)$$

Denklem (22) şeklinde yazılabilir. Sistemin  $\bar{W}_E$  potansiyel enerjisi, düğüm noktalarına etkiyen kuvvetlerle, düğüm noktalarının yer değiştirmelerinin çarpımlarının toplamı olarak elde edilir. Elemanların zamana bağlı boy değiştirmeleri  $\Delta_i(t)$ ’yi düğüm noktalarının zamana bağlı yer değiştirmeleri cinsinden

$$\Delta_i(t) = q_i(t) - q_{i-1}(t) \quad (23)$$

Denklem (23) şeklinde hesaplayabiliriz.  $q_i(t)$ ,  $i$  numaralı düğüm noktasının (nod) zamana bağlı yer değiştirmesi,  $q_{i-1}(t)$  ise,  $i-1$  numaralı düğüm noktasının yer değiştirmesidir. Sistemin dengede olması koşulunu sağlamak üzere  $\bar{\Pi}$  fonksiyonelinin  $\bar{q}_i$ ’lere göre kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlenerek [Denklem (24)] bilinmeyen sayısına eşit sayıda doğrusal denklem üretilir.

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \bar{q}_i} = 0 \quad (24)$$

Denklemler matris formda

$$\frac{\eta s E A}{E + \eta s} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) & \left(-\frac{1}{L_2}\right) & (0) \\ \left(-\frac{1}{L_2}\right) & \left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}\right) & \left(-\frac{1}{L_3}\right) \\ (0) & \left(-\frac{1}{L_3}\right) & \left(\frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

**Denklem (25)** şeklinde yazılır. Buradan bilinmeyen uç yer değiştirmeleri Laplace uzayında hesaplanarak işlemler sonuçlandırılır. Artık Laplace uzayında uç yer değiştirmeler bilindiğine göre, istenirse Laplace uzayında elemanların boy değişimleri  $\bar{\Delta}_i$  ler hesaplanabilir. Elde edilen sonuçları gerçek zaman uzayına taşımak için, ters Laplace dönüşüm tekniği kullanılır. Viskoelastik malzemenin bünye bağıntısı yardımıyla istenildiği takdirde normal kuvvetler kolaylıkla hesaplanabilir.

#### 4.1 Sayısal örnek

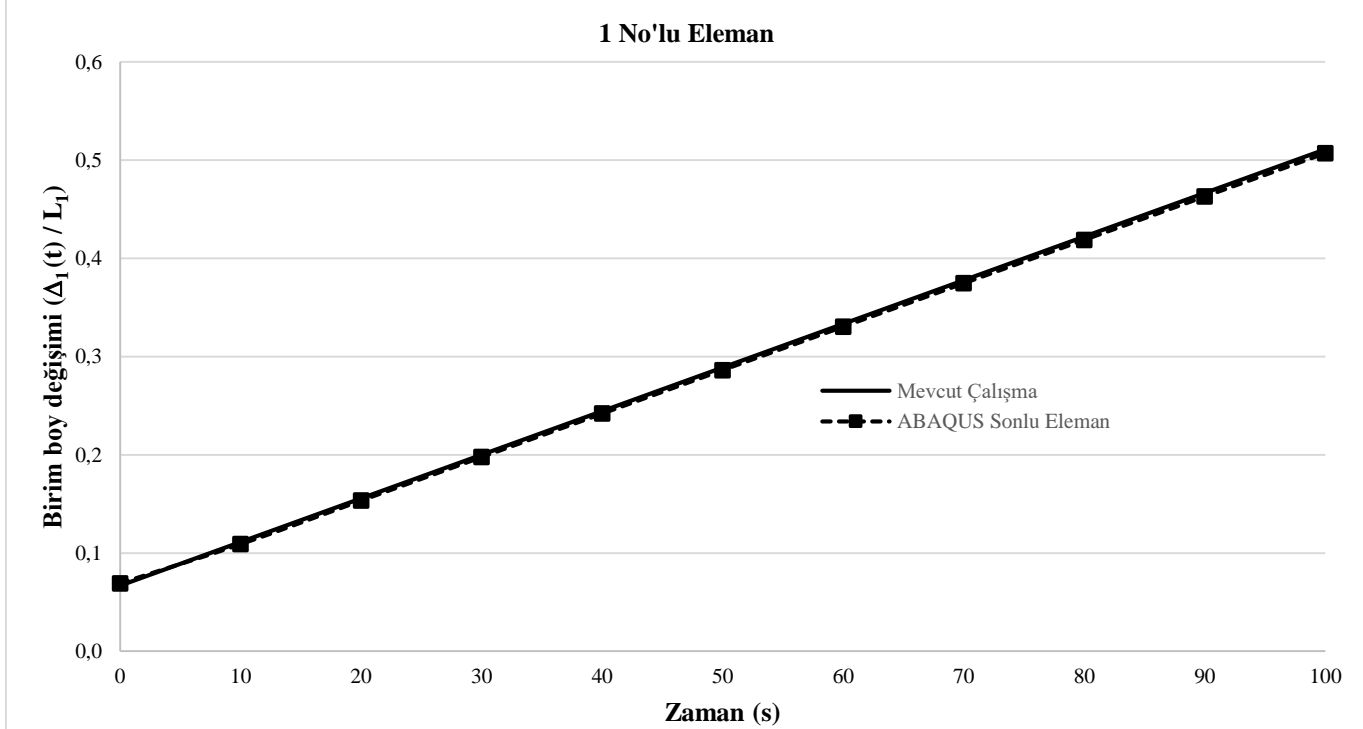
Bu bölümde, geliştirilen formülasyonun doğrulanması amacıyla **Şekil 2**'de yükleme durumu verilen sisteme ait zamana bağlı yer değiştirme bilinmeyenleri  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  ve  $q_3(t)$  hesaplanarak, dört eleman için zamana bağlı boy değiştirmeler  $\Delta_i(t)$  elde edilecektir. En kesit alanı sabit  $A_1=A_2=A_3=A_4=A=400 \text{ cm}^2$ , viskoelastik malzeme sabitleri  $E=20 \times 10^3 \text{ N/m}^2$  ve  $\eta=300 \times 10^3 \text{ Ns/m}^2$  olan eksenel yüklü çubuğun toplam boyu  $L=(L_1+L_2+L_3+L_4)=(1+2+2+1) \text{ m}=6 \text{ m}$  dir. Hiperstatik sistem  $P_1=30 \text{ N}$ ,  $P_2=40 \text{ N}$  ve  $P_3=50 \text{ N}$ 'luk eksenel kuvvetlerin etkisi altındadır. Elde edilen sonuçlar, ABAQUS Sonlu Eleman programı sonuçları ile kıyaslanmıştır. ABAQUS Sonlu Eleman programı ile çözümde, çubuk toplam 60 sonlu elemana bölünmüştür. **Şekil 2**'de 1, 2, 3 ve 4 olarak numaralandırılmış sistem elemanlarının zamana bağlı birim boy değiştirmeleri sırasıyla **Şekil 4**, **Şekil 5**, **Şekil 6** ve **Şekil 7**'de ABAQUS sonuçları ile birlikte sunulmuştur. Sonuçlar neredeyse üst üste düşmüştür ve sonuçlarda üç ondalık basamağa kadar yakınsaklık sağlanmıştır. Teorik olarak anlaşılması basit ve pratik olarak uygulanması kolay olan bu yöntemin en önemli avantajı, birkaç basit işlem adımı ile farklı eleman sayıları, viskoelastik malzeme modelleri ve yükleme tiplerine sahip sistemlere ait sonuçlar doğrudan elde edilebilir. Sonlu

eleman analizinde daha hassas sonuçların elde edilmesi için ağ sıklığına dikkat edilmelidir. Sık bir eleman ağı kullanıldığında sonuçlar daha hassas olacaktır ancak eleman sıklığı ne kadar artarsa, çözümün elde edilmesi için gereken zaman o kadar artacaktır. Bu çalışma kapsamında önerilen yöntem, literatürde sıklıkla kullanılan sonlu eleman yönteminin aksine zamandan tasarruf ile oldukça tatmin edici sonuçlar vermektedir.

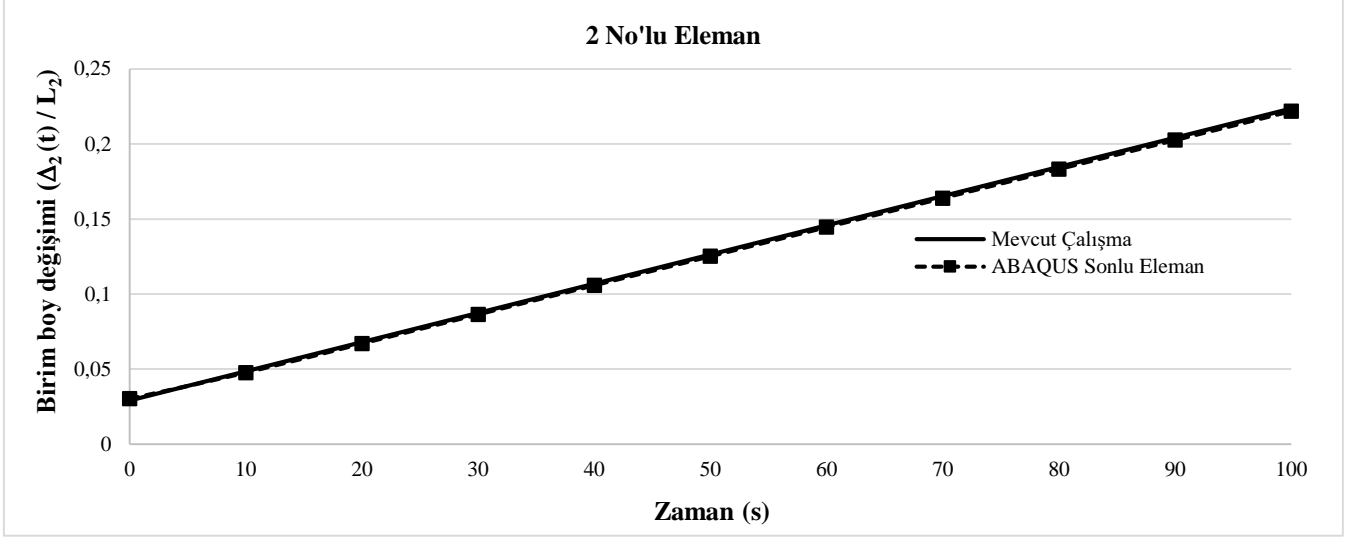
Ayrıca,  $P_1$ ,  $P_2$  ve  $P_3$  yüklerinin etkidiği noktalarda hesaplanan zamana bağlı eksenel yer değiştirmeler ilk 100 saniye için **Tablo 1**'de sunulmuştur.

**Tablo 1.** Zamana bağlı eksenel yer değiştirmeler

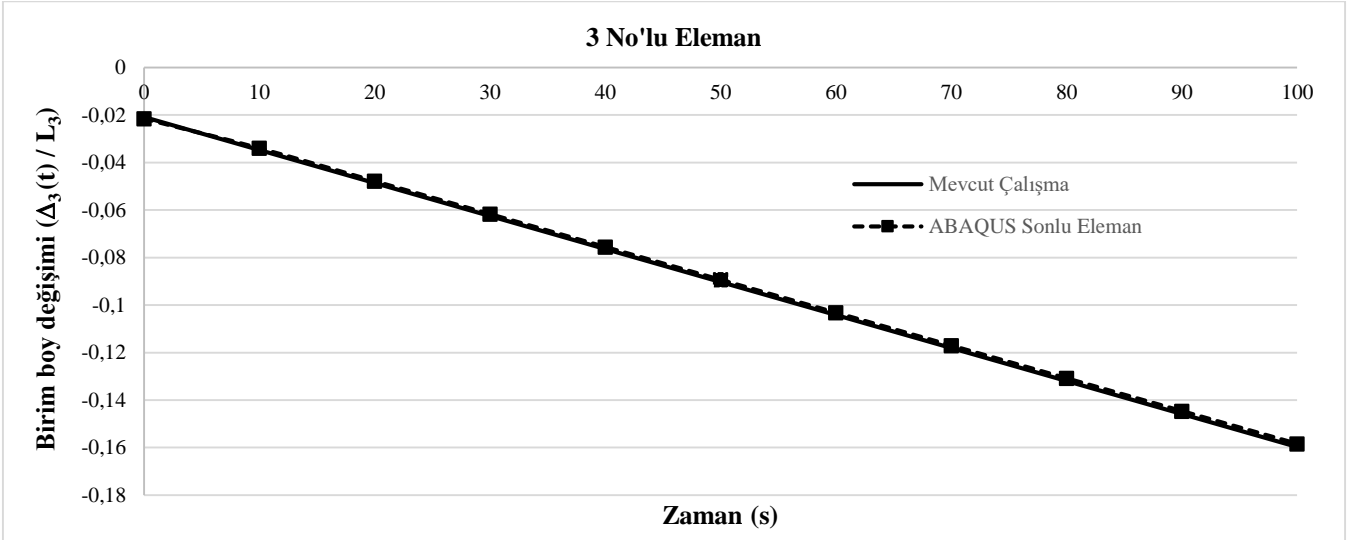
Zaman (s)	$q_1(t)$ (m)	$q_2(t)$ (m)	$q_3(t)$ (m)
5	0.088889	0.166667	0.111111
10	0.111111	0.208333	0.138889
20	0.155556	0.291667	0.194444
30	0.2	0.375	0.25
40	0.244444	0.458333	0.305556
50	0.288889	0.541667	0.361111
60	0.333333	0.625	0.416667
70	0.377778	0.708333	0.472222
80	0.422222	0.791667	0.527778
90	0.466667	0.875	0.583333
100	0.511111	0.958333	0.638889



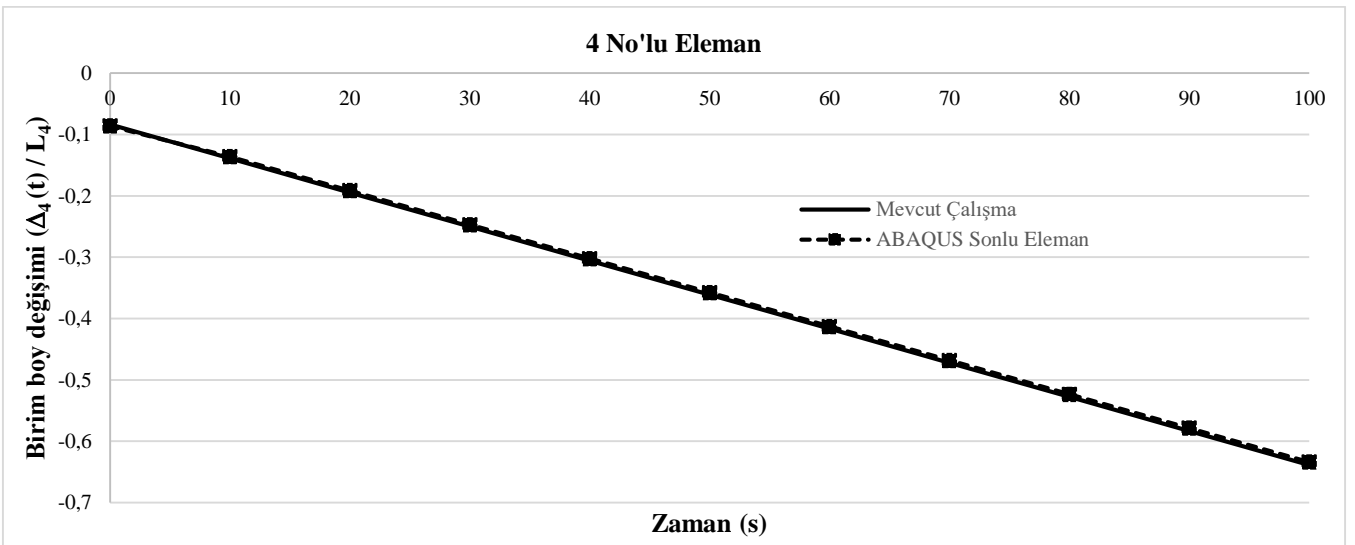
**Şekil 4.** 1 no'lu elemanın birim boy değişimi (ε)



Şekil 5. 2 no'lu elemanın birim boy değişimi ( $\epsilon$ )



Şekil 6. 3 no'lu elemanın birim boy değişimi ( $\epsilon$ )



Şekil 7. 4 no'lu elemanın birim boy değişimi ( $\epsilon$ )

## 5 Sonuçlar

Elastik cisimlerde gerilme sadece şekil değiştirmenin bir fonksiyonudur, viskoelastik cisimlerde ise gerilme hem şekil değiştirmeye hem de şekil değiştirme hızına bağlıdır. Gerilme-şekil değiştirme eğrisi bilinen bir malzemeden üretilmiş bir yapıyı analiz etmek için, gerilme-şekil değiştirme verilerinin matematiksel olarak ifade edilmesi gereklidir. Maxwell mekanik modelin temsil ettiği hiperstatik eksenel yüklü çubuk probleminin ele alındığı bu çalışmada, Laplace uzayında toplam potansiyel enerji teoremi kullanılarak yeni enerji fonksiyoneli elde edilmiştir. En karmaşık taşıyıcı sistemlerin çözümüne sistematik bir biçimde uygulanabilen bu yaklaşım ile elemanların enerjileri, elemanların birleşim noktalarındaki nodların yer değiştirmeleri cinsinden elde edilmiştir. Laplace uzayında elde edilen çözümlerden, gerçek zaman uzayındaki çözümlere geçmek için ters Laplace dönüşümü uygulanmıştır. Sunulan yaklaşım ile sabit en kesit alanına sahip, farklı eksenel yüklerin etkisi altında hiperstatik viskoelastik çubuk problemi örnek olarak ele alınmıştır. Bilgimiz dâhilinde literatürde toplam potansiyel enerji ilkesinin hiperstatik viskoelastik problemlerine uygulaması ile karşılaşılmamıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar, ABAQUS Sonlu Eleman programı sonuçları ile kıyaslanmıştır. ABAQUS Sonlu Eleman programı ile çözümde, çubuk toplam 60 sonlu elemana bölünmüştür. Sonlu eleman analizinde daha hassas sonuçların elde edilmesi için sık bir eleman ağı kullanılması esastır. Ancak eleman ağı ne kadar sık olursa, çözümün elde edilmesi için gereken zaman o kadar artacaktır. Bu çalışma kapsamında, teorik olarak anlaşılması basit ve pratik olarak uygulanması oldukça kolay olan bir yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntemin en önemli avantajı, farklı viskoelastik malzeme modellerine, yükleme tiplerine ve sistemi oluşturan eleman sayılarına bağlı olarak çözülecek denklem setini birkaç basit adımda yeniden oluşturmak mümkündür. Bu özelliği sayesinde sunulan yöntem zamandan tasarruf sağlarken, oldukça tatmin edici sonuçlar vermektedir.

### Çıkar çatışması

Yazarlar çıkar çatışması olmadığını beyan etmektedir.

### Benzerlik oranı (iThenticate): %7

### Kaynaklar

- [1] T-M. Chen, The hybrid Laplace transform/finite element method applied to the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, 509-522, 1995. <https://doi.org/10.1002/nme.1620380310>.
- [2] G. Honig and U. Hirdes, A method for the numerical inversion of Laplace transform. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 10(1), 113-132, 1984. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(84\)90075-X](https://doi.org/10.1016/0377-0427(84)90075-X).
- [3] J.D. Mehl, R.N. Miles, Finite element modeling of the transient response of viscoelastic beams. *Proceedings of the SPIE*, pp. 306-311, 1995.
- [4] A.Y. Aköz, F. Kadioğlu, The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44, 1909-1932, 1999. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)10970207\(19990430\)44:12<1909::AID-NME573>3.0.CO;2-P](https://doi.org/10.1002/(SICI)10970207(19990430)44:12<1909::AID-NME573>3.0.CO;2-P).
- [5] F.S. Barbosa, M.C.R. Farage, A finite element model for sandwich viscoelastic beams: Experimental and numerical assessment. *Journal of Sound and Vibration*, 317, 91-111, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.03.013>.
- [6] A. Pálfalvi, A comparison of finite element formulations for dynamics of viscoelastic beams. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44, 814- 818, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2008.06.009>.
- [7] M. Enelund, G.A. Lesieutre, Time domain modeling of damping using anelastic displacement fields and fractional calculus. *International Journal of Solids and Structures*, 36 (29), 4447-4472, 1999. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(98\)00194-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00194-2).
- [8] F. Kpeky, H. Boudaoud, F. Abed-Meraim, E.M. Daya, Modeling of viscoelastic sandwich beams using solid-shell finite elements. *Composite Structures*, 133, 105-116, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.07.055>.
- [9] Z. Huang, Xi. Wang, N. Wu, F. Chu, and J. Luo, A finite element model for the vibration analysis of sandwich beam with frequency-dependent viscoelastic material core. *Materials*, 12 (20), 3390, 2019. <https://doi.org/10.3390/ma12203390>.
- [10] M. Filippi, E. Carrera, Stress analyses of viscoelastic three-dimensional beam-like structures with low- and high-order one-dimensional finite elements. *Meccanica*, 56, 1475-1482, 2021. <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01191-5>.
- [11] M. Arda, Vibration analysis of an axially loaded viscoelastic nanobeam. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 10 (3), 252-263, 2018. <https://doi.org/10.24107/ijeas.468769>.
- [12] A. Shariati, D.W. Jung, H.M. Sedighi, K.K. Zur, M. Habibi, M. Safa, On the vibrations and stability of moving viscoelastic axially functionally graded nanobeams. *Materials*, 13(7), 1707, 2020. <https://doi.org/10.3390/ma13071707>.
- [13] A. Ebrahimi-Mamaghani, A. Forooghi, H. Sarparast, A. Alibeigloo, M.I. Friswell, Vibration of viscoelastic axially graded beams with simultaneous axial and spinning motions under an axial load. *Applied Mathematical Modelling*, 90, 131-150, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.08.041>.
- [14] S. Liu, Y.Q. Tang, L. Chen, Multi-scale analysis and Galerkin verification for dynamic stability of axially translating viscoelastic Timoshenko beams. *Applied Mathematical Modelling*, 93, 885-897, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.12.039>.
- [15] A. Mokhtari, H.R. Mirdamadi, Study on vibration and stability of an axially translating viscoelastic Timoshenko beam: non-transforming spectral element



- analysis. *Applied Mathematical Modelling*, 56, 342-358, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.12.007>.
- [16] M. Gürgöze, Parametric vibrations of a viscoelastic beam (Maxwell model) under steady axial load and transverse displacement excitation at one end. *Journal of Sound and Vibration*, 115(8), 329-338, 1987. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(87\)90476-7](https://doi.org/10.1016/0022-460X(87)90476-7).
- [17] U.S. Shirahatti, S.C. Sinha, Stability of perfect viscoelastic columns subjected to periodic axial loading, *Proceedings of the ASME 1991 Design Technical Conferences. 13th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise: Vibration Analysis - Analytical and Computational*. Miami, Florida, USA, 225-231, 1991.
- [18] A. Manevich and Z. Kołakowski, Free and forced oscillations of Timoshenko beam made of viscoelastic material. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 49(1), 3-16, 2011.
- [19] J. Freundlich, Dynamic response of a simply supported viscoelastic beam of a fractional derivative type to a moving force load. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 54(4), 1433-1445, 2016. <https://doi.org/10.15632/jtam-pl.54.4.1433>.
- [20] A. H. Sofiyev, On the solution of the dynamic stability of heterogeneous orthotropic visco-elastic cylindrical shells. *Composite Structures*, 206, 124-130, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.08.027>.
- [21] A. H. Sofiyev, Z. Zerín, N. Kuruoglu, Dynamic behavior of FGM viscoelastic plates resting on elastic foundations. *Acta Mechanica*, 231, 1-17, 2020. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02502-y>.
- [22] A. H. Sofiyev, About an approach to the determination of the critical time of viscoelastic functionally graded cylindrical shells. *Composites Part B: Engineering*, 156, 156-165, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.08.073>.
- [23] H.A. Zamani, M.M. Aghdam, M. Sadighi, Free vibration analysis of thick viscoelastic composite plates on visco-Pasternak foundation using higher-order theory. *Composite Structures*, 182(15), 25-35, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.08.101>.
- [24] G. Tekin, F. Kadioğlu, Viscoelastic behavior of shear-deformable plates. *International Journal of Applied Mechanics* 9(6), 1750085 (23 pages), 2017. <https://doi.org/10.1142/S1758825117500855>.
- [25] D. Gutierrez-Lemini, *Engineering Viscoelasticity*, Springer, New York, 2014.

