MSU Fen Bil. Dergi., 11:1 1-6, 2023 Araştırma Makalesi/ Research Article
MSU J. of Sci., 11:1 1-6, 2023 DOI: https://doi.org/10.18586/msufbd.1188106

Paranormlu Uzaylarda α. Dereceden Deferred İstatistiksel Yakınsaklık

Haşmet KAPŞİGAY[1], Muhammed ÇINAR[2]

[1]Namık Kemal Yatılı Bölge Ortaokulu, Muş, Türkiye
[2] Matematik Eğitimi Bölümü, Muş Alparslan Üniversitesi, Muş, Türkiye

: muhammedcinar23@gmail.com [1]0000-0003-1700-3470 [2] 0000-0002-0958-0705

Geliş (Received): 12.10.2022 Düzeltme (Revision): 04.01.2023 Kabul (Accepted): 07.01.2023

ÖZ

Bu çalışmanın amacı paranormlu uzaylarda $\boldsymbol{\alpha}$. dereceden deferred istatistiksel yakınsaklık, paranormlu uzaylarda $\boldsymbol{\alpha}$. dereceden deferred istatistiksel Cauchy dizisi tanımları ile paranormlu uzaylarda deferred Cesáro yakınsaklık tanımını verip bunlar arasındaki ilişkiyi incelemektir.

Anahtar Kelimeler: Cesáro Ortalaması, Deferred Cesáro Ortalaması, Deferred İstatistiksel Yakınsaklık, İstatistiksel Yakınsaklık

Deferred Statistical Convergence of Order α in Paranormed Space

ABSTRACT

This study aims to define deferred statistical convergence of α. order in paranorm spaces, the definitions of deferred statistical Cauchy convergence of α. order in paranorm spaces and the definition of diferred Cesáro in paranorm spaces and to investigate the relation among these.

Keywords: Cesáro Means, Deferred Cesáro Mean, Deferred Statistical Convergence, Statistical Convergence

GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık ilk olarak Zygmund [1] tarafından 1935 yılında tanıtılmış olup, istatistiksel yakınsaklık kavramı Steinhaus ve Fast [2,3] tarafından ayrı ayrı çalışılmış bunlardan bağımsız olarak Schoenberg [4] istatistiksel yakınsaklığı bir toplanabilme metodu olarak incelemiştir. Connor [5] istatistiksel yakınsaklık ile Cesaro toplanabilme arasındaki ilişkiyi incelemiş bu iki kavram arasındaki ilişki için şartları ortaya koymuştur. İstatistiksel yakınsaklık matematiğin pekçok kısmında incelenmiş ve Fourier analizi teorisinde, Ergodik teoride, sayı teorisinde, ölçü teorisinde, trigonometrik serilerde, turnpike teorisinde ve banach uzaylarında uygulamalrı irdelenmiştşir.Son yılarda da pek çok matematikçi tarafından çalışılmaya devam etmektedir [6-11].

MATERYAL ve YÖNTEM

Tanım 1: X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $g: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa g' ye bir paranorm denir, (X, g) ikilisine de paranormlu uzay denir.
$\forall \lambda \in K$ ve $\forall\, x, y \in X$ için,

P1) $g(\theta) = 0$,
P2) $g(x) = g(-x)$,
P3) $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$,
P4) (λ_k) skalerlerin bir dizisi ve $\lambda_k \to \lambda_0$ $(k \to \infty)$ olsun. $x_k, \alpha \in X$ için $x_k \to \alpha$ $(k \to \infty)$ iken $g(x_k - \alpha) \to 0$ ve $\lambda_k x_k \to \lambda_0 \alpha$ $(k \to \infty)$, $g(\lambda_k x_k \to \lambda_0 \alpha) \to 0$ $(k \to \infty)$ [5].

Tanım 2: Eğer $g(x) = 0$ iken $x = \theta$ oluyorsa g'ye total paranorm denir [12].

Teorem 3: Her yarınorm bir paranormdur. Bu teoremin karşıtı doğru değildir [12].

Tanım 4: $\delta : K \subset \mathbb{N} \to [0,1]$ ve K kümesi doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi olsun.

$$\delta(K) = \lim_{n \to \infty} \frac{|K(n)|}{n}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona K kümesinin yoğunluğu denir. $K(n) := \{k \leq n : k \in K\}$ olarak tanımlanır ve |K(n)| ifadesine K kümesinin kardinalitesi yani eleman sayısı denir [13].

Örnek 5: $K = \{k \in \mathbb{N} : k = m^2\}$ alınırsa $|K(n)| \leq \sqrt{n}$ olur ve $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$ olur ki buda $\delta(K) = 0$ elde edilir.

$K = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ ve $K = \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ kümeleri içinde $\delta(K) = 1/2$ olur.

Tanım 6: x=(x_k) reel veya kompleks terimli bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\delta(\{k\epsilon\mathbb{N} \mid |x_k - l| \geq \varepsilon\}) = 0$ olacak şekilde bir l sayısı varsa x dizisi l sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim_{k\to\infty} x_k = l$ ile gösterilir [6].

Tanım 7: $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir l sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi l sayısına α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir ve $S^\alpha - lim x = l$ şeklinde gösterilir [14].

Tanım 8: (X, g) bir paranormlu uzay olsun. Bir $x = (x_k)$, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : g(x_k - l) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise (x_k) dizisine, l sayısına istatistiksel yakınsak veya $g(S)$ −yakınsak denir. $g(S) - lim x = l$ şeklinde gösterilir [15].

Tanım 9: (X, g) bir paranormlu uzay ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : g(x_k - l) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise (x_k) dizisine, l sayısına α. dereceden istatistiksel yakınsak veya $g(S)^\alpha$ −yakınsak denir. $g(S)^\alpha - lim x = l$ şeklinde gösterilir [16].

Tanım 10: c ile bütün reel veya kompleks terimli $x = (x_k)$ yakınsak dizilerinin uzayı gösterilir. Yani

$$c = \left\{x = (x_k) : \exists l \in c \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |x_k - l| = 0\right\}$$

dir. c dizi uzayı $d(x, y) = \sup_k |x_k - y_k|$ metriği ile birlikte bir metrik uzaydır [17].

Tanım 11: c_0 uzayı, sıfıra yakınsak dizilerin uzayıdır. Yani

$$c_0 = \left\{x = (x_k) : \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\}$$

dir. Bu uzaydaki metrik $d(x, y) = \max|x_k - y_k|$ şeklinde alınabilir [17].

Tanım 12: l_∞ ile bütün reel veya kompleks terimli $x = (x_k)$ sınırlı dizilerinin uzayı gösterilir. Yani

$$l_\infty = \left\{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\right\}$$

dir. Bu uzaydaki metrik $d(x, y) = \sup_k |x_k - y_k|$ şeklindedir [17].

Tanım 13: Reel veya kompleks terimli $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - l) = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına (C,1) yakınsaktır denir. (C,1) yakınsak olan dizilerin kümesi (C,1) sembolü ile gösterilir.[17]

$$(C,1) = \left\{x = (x_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = l, \exists l \in C\right\}$$

1932 yılında Agnew [18]'in Cesáro alt metodunun bir genellemesi olan deferred Cesáro metodunu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır. p(n) ve q(n) reel terimli diziler olmak üzere:

$$p(n) < q(n) \text{ ve } \lim_{n\to\infty} q(n) = \infty \qquad (1)$$

koşulu sağlayan dizileri olmak üzere $x = (x_k)$ reel terimli dizisinin deferred Cesaro ortalaması

$$\left(D_{p.q}, X\right)_n = \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} x_k, n = 1,2,3, \ldots \quad (2)$$

biçimindedir.

$(D_{p.q}, X)_n$ dönüşümüne $x = (x_k)$ dizisinin deferred Cesáro ortalaması denir. (2)'de verilen $D_{p.q}$ metodu regüler olmasının yanı sıra başka önemli özellikleri de sağladığı Agnew [18] tarafından ifade edilmiştir. $x = (x_k)$ reel veya kompleks terimli bir dizi, p(n) ve q(n)'de (2) şartlarını sağlayan diziler olmak üzere; $x = (x_k)$ dizisinin kuvvetli Deferred Cesáro toplanabilmesi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} |x_k - l| = 0$$

şeklinde tanımlanır. Bu durum $x_k \to l(D[p,q])$ ile gösterilir. Tüm kuvvetli Deferred Cesáro toplanabilen dizilerin uzayı $D[p,q]$ ile gösterilir.

Tanım 14: $x=(x_k)$ reel ya da karmaşık terimli bir dizi $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (1) koşulunu sağlayan pozitif tam sayıların dizileri olmak üzere, her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{q(n)-p(n)}|\{\,p(n)<k\le q(n): |x_k-l|\ge\varepsilon\}| = 0,$$

sağlanır ise $x=(x_k)$ dizisi l sayısına deferred istatistiksel yakınsaktır denir ve

$\lim_{n\to\infty} x_k = l(\mathrm{DS}[p,q])$ biçiminde gösterilir [19].

Teorem 15: $p=\{p(n)\}_{n\in N}$ ve $q=\{q(n)\}_{n\in N}$ pozitif tamsayıların (1) koşullarını sağlayan dizileri olsun. Bu durumda $x_k\to l(\mathrm{D}[p,q])$ ise $x_k\to l(\mathrm{DS}[p,q])$'dır [19].

İspat: $p=\{p(n)\}_{n\in N}$ ve $q=\{q(n)\}_{n\in N}$ pozitif tam sayıların (1) koşullarını sağlayan $x_k\to l(\mathrm{D}[p,q])$ olsun. Bu durumda keyfi $\varepsilon>0$ sayısı için

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ |x_k-l|\ge\varepsilon}}^{q(n)}|x_k-l| \ge \frac{1}{q(n)-p(n)}|\{\,p(n)<k \le q(n): |x_k-l|\ge\varepsilon\}|\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer, yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafında n→∞ iken limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}|\{\,p(n)<k\le q(n): |x_k-l|\ge\varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Bu ise $x=(x_k)$ dizisinin l sayısına deferred istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir.

TARTIŞMA

Bu bölümde paranormlu uzaylarda α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaklık, deferred istatistiksel Cauchy dizisi ve deferred Cesáro yakınsaklık kavramları tanımlanıp bunlar arasındaki ilişki incelenecektir.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesinin α. dereceden deferred yoğunluğunu

$$\delta_{p,q}^{\alpha}(\mathrm{A}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(q(n)-p(n))^{\alpha}}|\{\mathrm{k}\in \mathrm{A}: p(n)<k\le q(n)\}|$$

şeklinde tanımlayacağız.

Tanım 16: $x=(x_k)$, (X,g) paranormlu uzayında bir dizi ve {p(n)} ve {q(n)} pozitif tamsayıların (1)'deki şartları sağlayan iki dizi ve $\alpha\in(0,1]$ olsun. $\forall\,\varepsilon>0$ için;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(q(n)-p(n))^{\alpha}}|\{\;p(n)<k\le q(n): g(x_k-l)\ge\varepsilon\}| = 0$$

ise $x=(x_k)$ dizisine (X,g) paranormlu uzayında l sayısına α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır denir.

$x=(x_k)$ dizisi paranormlu uzayda l sayısına α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak ise $g(DS^{\alpha}[p,q])-\lim x_k = l$ yazılır. Bu şekilde yakınsayan tüm dizilerin kümesini $g(DS^{\alpha}[p,q]$) ile göstereceğiz.

i) Bu tanımda $q(n)=n$, $p(n)=0$ ve $\alpha=1$ seçilirse paranormlu uzayda α. dereceden istatistiksel yakınsaklık [15]'deki paranormlu uzaylardaki istatistiksel yakınsaklık tanımına indirgenir.

ii) Bu tanımda $q(n)=\lambda_n$, $p(n)=0$ ve $\alpha=1$ seçilirse [20]'deki paranormlu uzaylarda λ-istatistiksel yakınsaklık tanımına indirgenir.

iii) Bu tanımda $q(n)=n, p(n)=0$ seçilirse [16]'deki paranormlu uzaylarda α. dereceden istatistiksel yakınsaklık tanımına indirgenir.

(X,g) paranormlu uzayda tanımlı α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaklık $\alpha\in(0,1]$ için iyi tanımlı fakat $\alpha>1$ için iyi tanımlı değildir.
$x=(x_k)$ dizisini;

$$x_k=\begin{cases}1, & k=2m\\ 0, & k\ne 2m\end{cases}$$

şeklinde seçelim. Bu takdirde $q(n)=n^2$, $p(n)=n$, $g(x)=|x|$ ve $\alpha>1$ seçilirse

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n^2-n)^{\alpha}}|\{\mathrm{n}<\mathrm{k}\le n^2 : g(x_k-1)\ge\varepsilon\}| \le \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2(n^2-n)^{\alpha}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n^2-n)^{\alpha}}|\{\mathrm{n}<\mathrm{k}\le n^2 : g(x_k-0)\ge\varepsilon\}| \le \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2(n^2-n)^{\alpha}} = 0$$

elde edilir ki bu mümkün değildir.

Tanım 17: $x=(x_k)$, (X,g) paranormlu uzayında bir dizi, {p(n)} ve {q(n)} pozitif tamsayıların (1)'deki şartları sağlayan iki dizisi $\alpha\in(0,1]$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(q(n)-p(n))^{\alpha}}|\{\;p(n)<k\le q(n): g(x_k-x_N)\ge\varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir N∈N(ε) sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisine (X,g) paranormlu uzayında α. dereceden deferred istatistiksel Cauchy dizisi denir.

MSU J. of Sci., 11:1 1-6, 2023 DOI: https://doi.org/10.18586/msufbd.1188106

Tanım 18: $x = (x_k)$, (X, g) paranormlu uzayında bir dizi, {p(n)} ve {q(n)} pozitif tamsayıların (1)'deki şartları sağlayan iki dizisi ve $\alpha \in (0,1]$, $m \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(q(n)-p(n))^\alpha} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} |g(x_k - l)|^m = 0$$

olacak şekilde bir l sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine α. dereceden kuvvetli deferred m- Cesáro yakınsaktır denir ve $DW_m^\alpha(g) - lim x_k = l$ ile gösterilir.

Teorem 19: $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ herhangi iki dizi ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Bu takdirde;
i) $c \in \mathbb{R}$ ve (x_k) dizisi (X, g) total paranormlu uzayında l sayısına α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak ise (cx_k) dizisi cl'ye α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır.

ii) (X, g) total paranormlu uzayında (x_k) dizisi l_1'e ve (y_k) dizisi l_2'ye α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak ise $(x_k + y_k)$ dizisi $(l_1 + l_2)'ye$ α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 20: (X, g) total paranormlu uzayında (x_k) dizisi α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir.

İspat: Farz edelim ki $g(DS^\alpha[\mathrm{p},\mathrm{q}]) - lim x_k = l_1$ ve $g(DS^\alpha[\mathrm{p},\mathrm{q}]) - lim x_k = l_2$ olsun ve $\varepsilon > 0$ için $A_1(\varepsilon)$ ve $A_2(\varepsilon)$ kümelerini

$$A_1(\varepsilon) = \left\{\mathrm{p(n)} < \mathrm{k} \le \mathrm{q(n)} : g(x_k - l_1) \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$A_2(\varepsilon) = \left\{\mathrm{p(n)} < \mathrm{k} \le \mathrm{q(n)} : g(x_k - l_2) \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

şeklinde tanımlayalım ve $g(DS^\alpha[\mathrm{p},\mathrm{q}]) - lim x_k = l_1$ olduğundan $\delta(A_1(\varepsilon)) = 0$ dır. Benzer şekilde $g(DS^\alpha[\mathrm{p},\mathrm{q}]) - lim x_k = l_2$ olduğundan $\delta(A_2(\varepsilon)) = 0$ dır.

$A(\varepsilon) = A_1(\varepsilon) \cup A_2(\varepsilon)$ olduğundan $\delta(A(\varepsilon)) = 0$ ve $\delta(A^c(\varepsilon)) = 1$ dir. Şimdi $k \in \mathbb{N} \setminus A(\varepsilon)$ olsun. Bu takdirde

$$g(l_1 - l_2) \le g(x_k - l_1) + g(x_k - l_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $g(l_1 - l_2) = 0$ elde ederiz ki buradan $l_1 = l_2$ elde edilir.

Teorem 21: (X, g) paranormlu uzayında $x = (x_k)$ dizisi l'ye $g - yakınsak$ ise (x_k) dizisi l'ye α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır fakat bunun karşıtı değildir.

İspat: Farz edelim ki (x_k) dizisi l'ye $g - yakınsak$ olsun. O zaman $\forall\, \varepsilon > 0$ için $N \in \mathbb{N}^+$ vardır öyle ki $\forall k \ge \mathbb{N}$ için $g(\mathrm{x_k} - l) < \varepsilon$ yazabiliriz. $A(\varepsilon) = \{k \in N : g(\mathrm{x_k} - l) \ge \varepsilon\} \subset \{1,2,\ldots,k\}$ olduğundan $(A(\varepsilon)) = 0$ dır. Bu nedenle $g(DS^\alpha[\mathrm{p},\mathrm{q}]) - lim x_k = l$ olur.

Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Örnek 22:

$$X = \ell\left(\frac{1}{k}\right) = \left\{x = (x_k) : \sum_{k=1}^\infty |x_k|^{\frac{1}{k}} < \infty\right\}, g(X) = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^{\frac{1}{k}}\right)$$

paranormu ile bir paranormlu uzay olsun. (x_k) dizisini

$$x_k = \begin{cases} k, & k = n^2 \\ 0, & k \ne n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan

$$A(\varepsilon) = \{k \le n : g(x_k) \ge \varepsilon\}$$

kümesini ele alalım. Buradan

$$g(x_k) = \begin{cases} k^{\frac{1}{k}}, & k = n^2\ ise \\ 0, & k \ne n^2\ ise \end{cases}$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{k\to\infty} g(x_k) = \begin{cases} 1, & k = n^2 ise \\ 0, & k \ne n^2\ ise \end{cases}$$

elde edilir. Bu da bize (x_k) dizisinin $g - limitinin$ olmadığını gösterir. Diğer taraftan $\alpha > \frac{1}{2}$ için $\delta_{\mathrm{p,q}}^\alpha(\mathrm{A}(\varepsilon)) = 0$ elde edilir. Bu da $g(DS^\alpha[\mathrm{p},\mathrm{q}]) - lim x_k = 0$ olduğunu verir.

Teorem 23: $x = (x_k)$ dizisinin (X, g) tam paranormlu uzayında α. dereceden deferred istatistiksel Cauchy olması için gerek ve yeter şart α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak olmasıdır.

İspat: Farz edelim ki (x_k) dizisi $g(DS^\alpha[\mathrm{p},\mathrm{q}]) - Cauchy$ fakat $g(DS^\alpha[\mathrm{p},\mathrm{q}])$ yakınsak olmasın o zaman $\mathrm{F}(\varepsilon) = \{\mathrm{k} \in \mathbb{N} : g(x_k - x_m) \ge \varepsilon\}$ olmak üzere $\delta_{\mathrm{p,q}}^\alpha(\mathrm{F}(\varepsilon)) = 0$ elde ederiz. Aynı şekilde $\mathrm{H}(\varepsilon) = \left\{\mathrm{k} \in \mathbb{N} : g(x_k - l) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ olmak üzere $\delta_{\mathrm{p,q}}^\alpha(\mathrm{H}(\varepsilon)) = 0$ yani $\delta_{\mathrm{p,q}}^\alpha(H^c(\varepsilon)) = 1$ elde ederiz. $g(x_k - l) < \frac{\varepsilon}{2}$ ise o zaman $g(x_k - x_m) < 2g(x_k - l) < \varepsilon$ elde ederiz. Dahası $\delta_{\mathrm{p,q}}^\alpha(F^c(\varepsilon)) = 0$ yani $\delta_{\mathrm{p,q}}^\alpha(\mathrm{F}(\varepsilon)) = 1$ elde edilir ki (x_k) dizisi $g(DS^\alpha[\mathrm{p},\mathrm{q}]) - Cauchy$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu nedenle $x = (x_k)$ dizisi $g(DS^\alpha[\mathrm{p},\mathrm{q}])$ yakınsak olmalıdır.

Tersine farz edelim ki $g(DS^\alpha[\mathrm{p},\mathrm{q}]) - lim x_k = l$ olsun o zaman

$$\mathrm{A}(\varepsilon)=\left\{\mathrm{k}\in\mathbb{N}: g(x_k-l)\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

olmak üzere $\delta_{p,q}^{\alpha}\big(A(\varepsilon)\big)=0$ elde ederiz. Bu da
$\delta_{p,q}^{\alpha}\big(N\setminus A(\varepsilon)\big)=\delta_{p,q}^{\alpha}\left(\left\{\mathrm{k}\in\mathbb{N}: g(x_k-l)<\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)=1$
olduğu anlamına gelir. $m,k\notin A(\varepsilon)$ olsun o zaman $g(x_m-x_k)<\varepsilon$ dur. Sabit $m\notin A(\varepsilon)$ için $B(\varepsilon)=\{\mathrm{k}\in\mathbb{N}: g(x_m-x_k)<\varepsilon\}$ olsun. O zaman $\mathbb{N}\setminus A(\varepsilon)\subset B(\varepsilon)$ dur. Bundan dolayı

$$1=\delta_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{N}/A(\varepsilon))\leq\delta_{p,q}^{\alpha}(B(\varepsilon))\leq 1.$$

$$N\setminus B(\varepsilon)=\{\mathrm{k}\in\mathbb{N}: g(x_k-x_m)\geq\varepsilon\}$$

olmak üzere $\delta_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{N}\setminus B(\varepsilon))=0$ anlamına gelir ki buda (x_k) dizisinin (X,g) paranormlu uazayında α. dereceden deferred istatistiksel Cauchy olduğu anlamına gelir.

Teorem 24: (X,g) paranormlu uzayında (x_k) dizisi l'ye α. dereceden kuvvetli deferred - Cesáro yakınsak ise $(\mathrm{x_k})$ dizisi l'ye α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır.

İspat: (x_k) dizisi l'ye α. dereceden kuvvetli deferred - Cesáro yakınsak olsun $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{\big(q(n)-p(n)\big)^{\alpha}}\sum_{k=p(n)+1}^{\mathrm{q(n)}}|g(x_k-l)|$$
$$=\frac{1}{\big(q(n)-p(n)\big)^{\alpha}}\left[\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ g(x_k-L)\geq\varepsilon}}^{\mathrm{q(n)}}|g(x_k-l)|+\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ g(x_k-L)<\varepsilon}}^{\mathrm{q(n)}}|g(x_k-l)|\right]$$
$$\geq\frac{1}{\big(q(n)-p(n)\big)^{\alpha}}\left[\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ g(x_k-L)\geq\varepsilon}}^{\mathrm{q(n)}}|g(x_k-l)|\right]$$
$$\geq\boldsymbol{\varepsilon}.\frac{1}{(q(n)-p(n))^{\alpha}}|\{\ p(n)<k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}|$$

elde ederiz. $n\to\infty$ için her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(q(n)-p(n))^{\alpha}}|\{\ p(n)<k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}|=0$$

Olur ki bu ise bize (x_k) dizisinin α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak olduğunu verir.

Teorem 25: (X,g) paranormlu uzayında (x_k) dizisi α. dereceden istatistiksel yakınsak ve $\left(\frac{\mathrm{q(n)}}{\mathrm{q(n)-p(n)}}\right)^{\alpha}$ sınırlı bir dizi olsun. Bu takdirde (x_k) dizisi α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır.

İspat: (x_k) dizisi (X,g) paranormlu uzayında α. dereceden istatistiksel yakınsak olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}|\{k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}|=0$$

yazabiliriz. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\{k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}|}{(q(n))^{\alpha}}=0$$

yazabiliriz. Buradan

$$\{\ p(n)<k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}\subseteq\{k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}$$

olduğundan

$$|\{\ p(n)<k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}|\leq|\{\ k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}|$$

yazabiliriz.

$$\frac{1}{(q(n)-p(n))^{\alpha}}|\{\ p(n)<k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}|\leq\left(1+\frac{p(n)}{q(n)-p(n)}\right)^{\alpha}\frac{1}{(q(n))^{\alpha}}|\{k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}|$$

olduğu göz önüne alınırsa (x_k) dizisinin α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak olduğunu elde ederiz.

Sonuç 26: Her $n\in\mathbb{N}$ için $q(n)<n$ ve $\left(\frac{n}{q(n)-p(n)}\right)^{\alpha}$ sınırlı bir dizi olsun. Bu takdirde (X,g) paranormlu uzayında bir dizi α. dereceden istatistiksel yakınsak ise α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 27: $\{p(n)\}$, $\{q(n)\}$, $\{p'(n)\}$ ve $\{q'(n)\}$, dizileri her $n\in N$ için

$$p(n)\leq p'(n)<q'(n)\leq q(n)$$

eşitsizliğini sağlayan diziler ve $\alpha\in(0,1]$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q(n)-p(n)}{q'(n)-p'(n)}\right)^{\alpha}>0$$

ve (X,g) paranormlu uzayında $x=(x_k)$ dizisi $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p,q}])$ yakınsak ise $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p',q'}])$ yakınsaktır.

İspat:
$$\{k: p'(n)<k\leq q'(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}\subseteq\{k: p(n)+1\leq k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}$$
kapsamasını yazabiliriz. Buradan hareketle

$$|\{k: p'(n) < k \leq q'(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}| \leq |\{k: p(n) + 1 \leq k \leq q(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}|$$

ve bu eşitsizlikten faydalanarak

$$\frac{1}{(q'(n) - p'(n))^{\alpha}} |\{\mathrm{k}: p'(n) < k \leq q'(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}| \leq \left(\frac{q(n) - p(n)}{q'(n) - p'(n)}\right)^{\alpha} \frac{1}{(q(n) - p(n))^{\alpha}} |\{\mathrm{k}: p(n) + 1 < k \leq q(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}|$$

yazarız. $n \to \infty$ için eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(q(n) - p(n))^{\alpha}} |\{ p(n) < k \leq q(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Bu da $x \in g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}', \mathrm{q}'])$ olması demektir.

Teorem 28 $\{p(n)\}$, $\{q(n)\}$, $\{p'(n)\}$ ve $\{q'(n)\}$, dizileri her $n \in N$ için

$$p(n) \leq p'(n) < q'(n) \leq q(n)$$

eşitsizliğini sağlayan diziler ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{k: p(n) < k \leq p'(n)\}$ ve $\{k: q'(n) < k \leq q(n)\}$ sonlu kümeler olsun. Bu takdirde (X, g) paranormlu uzayında (x_k) dizisi α. dereceden $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}', \mathrm{q}'])$ yakınsak ise α. dereceden $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}, \mathrm{q}])$ yakınsaktır.

İspat: $x = (x_k)$ dizisi l'ye $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}', \mathrm{q}'])$ yakınsak olsun. Bu takdirde $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\{p(n) < k \leq q(n): g(x_k - l)\} \geq \varepsilon\} = \{p(n) < k \leq p'(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\} \cup \{p'(n) < k \leq q'(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\} \cup \{q'(n) < k \leq q(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan

$$\frac{1}{(q(n) - p(n))^{\alpha}} |\{ p(n) < k \leq q(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{(q'(n) - p'(n))^{\alpha}} |\{ p(n) < k \leq p'(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}| + \frac{1}{(q'(n) - p'(n))^{\alpha}} |\{ p'(n) < k \leq q'(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}| \frac{1}{(q'(n) - p'(n))^{\alpha}} |\{ q'(n) < k \leq q(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}|,$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $n \to \infty$ eşitsizliğinde limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(q(n) - p(n))^{\alpha}} |\{ p(n) < k \leq q(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde ederiz. Bu da $x \in g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}, \mathrm{q}])$ olması demektir.

SONUÇ

Bu çalışmada paranormlu uzayda Deferred istatistiksel yakınsaklık ve Deferred istatistiksel Cauchy ve Deferred Cesaro yakınsaklık tanımları yapılmış ve tanımlanan bu yakınsaklık çeşitleri arasındaki kapsama bağıntıları incelenmiştir. Ayrıca çalıştığımız bu konu tanım ve teoremlerin yanı sıra verilen çeşitli örneklerle desteklenmiştir. Bu çalışma ilerideki araştırmalar için bir kaynak teşkil etmesi amaçlanarak hazırlanmıştır.

KAYNAKÇA

[1] Zygmund A. Trigonometric series, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

[2] Steinhaus, H. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloquium Mathematicum. 2 73-74, 1951

[3] Fast, H. Sur la convergence statistique, Colloquium Mathematicum. 2 241- 24, 1951.

[4] Schoenberg, I. J. The integrability of certain functions and related summability methods II, The American Mathematical Monthly. 66 562-563, 1959.

[5] Connor, J. The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, Analysis. 8 47-64, 1988.

[6] Fridy, J. A. On statistical convergence, Analysis. 5 301-314, 1985.

[7] Altundağ, S., Başarır M. Lacunary statistical convergence in a paranormed space, AIP Conference Proceedings, 1479- 929, 2012.

[8] Çolak, R., Bektaş, Ç. A. λ −statistical convergence of order α, Acta Mathematica Scientia Series B. 31 953-959, 2011.

[9] Mursaleen M. λ − statistically convergence Mathematica Slovaca. 50 111-115, 2000.

[10] Cinar M., Karakas M., Et, M. On pointwise and uniform statistical convergence of order α for sequences of functions, Fixed Point Theory and Applications. 33 1–11 2013.

[11] Şengül, H., Et, M. On lacunary statistical convergence of order α. Acta Mathematica Scientia. 34 473–482, 2014.

[12] Wilansky, A. Summability through functional analysis, North Holland, 1984.

[13] Niven, I., Zucherman, H. S. and Montgomery H. L. An introduction to the theory of numbers, John Wiley, New York, 1991.

[14] Çolak, R. Statistical convergence of order α, Modern methods in analysis and its applications, İndia: Anamaya Pub., New Delhi, 121-129, 2010.

[15] Alotaibi, A., Alroqi, A. M. Statistical convergence in a paranormed space, Journal of Inequalities and Applications. 39 1-6, 2012.

[16] Ercan, S. On the statistical convergence of order α in paranormed space, Symmetry. 10 483-492, 2018.

[17] Maddox, I. Elements of functional analysis, Cambiridge University press, 1970.

[18] Agnew, R. P. On deferred Cesaro means, Annals of Mathematics. 33 413-421, 1932.

[19] Küçükaslan, M., Yılmaztürk, M. On deferred statistical convergence of sequences, Kyungpook Mathematical Journal. 56 357-366, 2016.

[20] Alghamdi, M. A., Mursaleen, M., λ-statistical convergence in paranormed space, Abstract and Applied Analysis. Art. ID 264520. 1-5 2013.