GAZİOSMANPAŞA BİLİMSEL ARAŞTIRMA DERGİSİ (GBAD)
Gaziosmanpasa Journal of Scientific Research
ISSN: 2146-8168
http://dergipark.gov.tr/gbad
Araştırma Makalesi (Research Article)

Cilt/Volume : 11
Sayı/Number: 3
Yıl/Year: 2022
Sayfa/Pages: 159-169

Alınış tarihi (Received): 21.10.2022
Kabul tarihi (Accepted): 15.12.2022

Çözümleyici Kümeler: Çözümleyici Çizelgelerin Yeni Bir Versiyonu

Naim ÇAĞMAN[1,*]

[1]*Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Tokat.*
**Sorumlu yazar: naim.cagman@gop.edu.tr*

ÖZET: Bu çalışmada, doğruluk değer tablosunun görevini üstlenen, Smullyan (1968) tarafından ortaya atılan çözümleyici çizelgelerin yeni bir versiyonunu vereceğiz ve adına "çözümleyici kümeler" diyeceğiz. Çözümleyici çizelge yöntemi mantıkta bir çelişki denetleme yöntemidir. Yeni bir kavram olarak ortaya attığımız çözümleyici kümeler, çözümleyici çizelgelerin yaptığı aynı görevleri yapacak; fakat burada karar verirken çözümleyici çizelgenin kapalı veya açık yollarına gerek kalmayacak, yeni versiyonda ortaya çıkacak tutarlı ya da tutarsız kümelere bakılacaktır.

Anahtar Kelimeler – *Çözümleyici çizelge, Çözümleme ağacı, Tutarsız önermeler, Çözümleyici kümeler.*

Analytic Sets: A New Version of the Analytic Tableaux

ABSTRACT: In this study, we will give a new version of the analytic tableaux introduced by Smullyan (1968), which takes on the task of the truth value table, and we will call it the "tree of analytic sets". The analytic tableaux method is a contradiction checking method in logic. Analytic sets, which we introduced as a new concept, will do the same tasks that analytic tableaux do; however, there will be no need for the closed or open ways of the analytic tableaux when making decisions here, and the consistent or inconsistent sets that will emerge in the new version will be interested in.

Keywords – *Analytic tableaux, Analysis tree, Inconsistent propositions, Analytic sets.*

1. Giriş

Çözümleyici çizelge, diğer adlarıyla "çürütme ağaçları", "ağaç yöntemi", "çözümleme ağacı", alternatif bir çelişki denetleme yöntemidir. Bu yöntem, Amerikalı matematikçi Smullyan (1968) tarafından ortaya atılmıştır.

Önerme sayısı n olduğunda doğruluk tablosunun satır sayış 2^n olacağı için doğruluk tablosuyla **denetleme** yapılırken, önermelerin sayısı arttıkça işlem yapmak zorlaşır. Bu zorluğu ortadan kaldırmak için **çözümleyici çizelge** doğruluk tablosuna alternatif bir yoldur. Çözümleyici çizelge ile doğruluk tablosunda olduğu gibi önermelerin tutarlılık, denklik ve geçerlilik denetlemelerini yapmak mümkündür.

Hiçbir bağlaç içermeyen önermelere **basit önerme**, en az bir bağlaç ile en az bir basit önerme içeren önermelere **bileşik önerme** denir. Bir bileşik önermede bağlaçların bağladığı önermelerin her birine bir **bileşen** ve basit önermelerden oluşan bileşenlere **basit bileşen** denir.

Çözümleyici çizelge, bir ya da birden çok önermenin adım adım bileşenlerine ayrılması; yani çözümlenmesine dayanır. Bunun için önermelerin bileşenleri ya alt alta ya da ayrık yazılır.

Alt alta yazmaya çengel açma, ayrık yazmaya ise çatal açma denir. Bir çözümleyici çizelge oluşturmanın kuralları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Çözümlemede çengel açmanın çatal açmaya göre önceliği vardır.
2. Önerme kalıbında dıştan içe doğru, önce ana bağlaçlar, sonra ara bağlaçlar çözümlenir.
3. Önermeler, basit önerme veya basit önermelerin değili elde edilinceye kadar çözümleme yapılır.
4. Çözümleme işlemi bittikten sonra en uçta kalan basit önermenin kendi yolundan yukarıya doğru takip edilir. Bu yollarda bir çelişki varsa; yani bir önermenin kendisi ve değili (p ve $\neg$p gibi) varsa buna **kapalı yol** denir.
5. Çelişkili olmayan yani kapalı olmayan yollara **açık yol** denir.

Örneğin, en az bir açık yolu bulunan önermeler tutarlı, bütün yolları kapalı olan önermeler tutarsızdır. Çözümleyici çizelgelerin daha detaylı uygulamaları için (Grünberg, 2002), (Hardegree, 2010), (Howson, 1997), (Kutlusoy, 2003), (Nolt, ve ark. 1988), (Özlem, 2004), (Taşdelen, 2009), (Teller, 1989), (Thomas, 1966) kaynaklarına herhangi birine bakılabilir.

Burada, çözümleyici çizelgelerin yeni bir versiyonu olacak çözümleyici kümeler yöntemini vereceğiz. Yeni bir kavram olarak ortaya attığımız çözümleyici kümeler, çözümleyici çizelgelerin yaptığı aynı görevleri yapacak olup; yalnız burada denetlemek için kapalı veya açık yollara bakılmayacak, sadece yeni yöntemle ortaya çıkan tutarlı ya da tutarsız kümelere bakılacaktır.

Çözümleyici kümeler yöntemi verilmeden önce burada kullanılacağından dolayı önermeler arası ilişkiden doğan tutarlı ve tutarsız kavramları verilecektir.

2. Tutarlı ve Tutarsız Önermeler

Bu bölümde, önermeler arasında çelişki olup olmadığını denetleyen tutarlı ve tutarsız kavramları verilecektir.

Tanım 2.1. Bir önermeler kümesindeki önermelerin hepsi birlikte doğru olabiliyorsa bu önermelere aralarında **tutarlı**; aksi durumda **tutarsız** denir.

Burada önermeler kümesinden kasıt, bir çalışmada kullanılan bütün önermelerin topluluğudur. Eğer bir çalışmada bir önermenin hükmünü başka bir önerme yalanlıyorsa yani iddiasının tersini söylüyorsa burada bir tutarsızlık var demektir. Kısaca çalışmayı oluşturan önermeler birbiriyle çelişmiyorsa tutarlı; çelişiyorlarsa tutarsızdır.

Tanım 2.2. Bir kümedeki önermelerin tutarlı ya da tutarsız olup olmadığını bulma işlemine **tutarlılık denetimi** denir ve tutarlılık denetimi aşağıdaki yollardan biriyle yapılır.

2.1 Değil Bağlacı ile Tutarlılık Denetimi

Teorem 2.3. Bir önermenin hem değilinin hem de kendisini içeren bir kümedeki önermeler tutarsızdır.

İspat. p ve ¬p önermelerinden biri doğru iken diğeri yanlış olacağından bu iki önermeyi birlikte içeren her önermeler kümesindeki önermeler birlikte doğru olamayacağı için tutarsız olacaktır.

Bunu genellersek, bir A önermeler kümesi ne olursa olsun herhangi bir p önermesi için $A \cup \{p, \neg p\}$ kümesindeki önermeler tutarsızdır.

Örnek 2.4. Hem p hem de ¬p önermelerini içerdiğinden dolayı $\{p, \neg p\}$, $\{p \wedge q, p, \neg p\}$ ve $\{p, \neg p, p \vee q\}$ kümelerindeki önermeler tutarsızdır.

2.2 Doğruluk Tablosu ile Tutarlılık Denetimi

Teorem 2.5. Bir kümedeki önermelerin doğruluk değeri, doğruluk tablosunun en az bir satırında hep birlikte doğru oluyorsa tutarlı; diğer durumlarda tutarsızdır.

İspat. Verilen önermelerin doğruluk değeri, doğruluk tablosunun en az bir satırında hepsi birlikte doğru oluyorsa bu durumda önermelerin içinde hem kendisi hem de değili olan bir önermenin olmadığını gösterir. Bu da tutarlılık demektir. Aksi durumda önermelerin birlikte doğru oldukları en az bir yorumlama satırı yoksa birlikte doğru olamayacaklarından dolayı tutarsız olurlar.

Örnek 2.6. p, q, $\neg p$, $\neg p \wedge q$, $p \vee q$, $p \to q$ önermelerinden bazılarını alarak aralarında tutarlı ya da tutarsız olup olmadıklarına bakalım. Önce hepsini içeren doğruluk tablosu yapalım.

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

1) $\{p, \neg p\}$ kümesindeki önermeler hiç bir satırda birlikte doğru olmadığı için tutarlı değildir.
2) $\{q, p \vee q, p \to q\}$ kümesindeki önermeler 1. ve 3. satırda birlikte doğru oldukları için tutarlıdır.
3) $\{p, q, \neg p \wedge q, p \to q\}$ kümesindeki önermeler birlikte hiç bir satırda doğru olmadıkları için tutarsızdır.

2.3 Çelişki ile Tutarsızlık Denetimi

Teorem 2.7. $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ kümesindeki önermeler aralarında tutarsızdır ancak ve ancak $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n$ önermesi bir çelişkidir.

İspat. $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ kümesindeki önermeler aralarında tutarsız ise doğruluk tablosunda $i = 1, 2, ..., n$ için p_i önermelerinin 1 doğruluk değerini aldığı en az bir satır olamayacağından, en az birinin doğruluk değeri 0 olmak zorundadır. Bu durumda, en az bir basit önermenin doğruluk değeri 0 olan $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n$ bileşik önermesi bir çelişki olur.

Tersine, $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n$ bileşik önermesi bir çelişki ise $i = 1, 2, ..., n$ için p_i önermelerinin en az birinin doğruluk değeri 0 olmak zorundadır. Bu durumda, doğruluk tablosunda

p_i önermelerinin 1 doğruluk değerini aldığı en az bir satır olamayacağından dolayı $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ kümesindeki önermeler tutarsızdır.

Örnek 2.8. $\{p, q, \neg(p \rightarrow q)\}$ kümesindeki önermelerin tutarsız olduğunu çelişki bulma yoluyla gösterelim.

Doğruluk tablosunda görüldüğü gibi $p \wedge q \wedge \neg(p \rightarrow q)$ önermesi bir çelişki olduğu için bu önermeler aralarında tutarsızdır.

p	q	$\neg(p \rightarrow q)$	$p \wedge q \wedge \neg(p \rightarrow q)$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	0

3. Çözümleyici Kümeler

Çözümleyici çizelge yöntemi mantıkta bir çelişki denetleme yöntemidir. Mantıkta doğruluk değer tablosu kullanmak, basit bileşen ve bağlaç sayısı arttıkça zorlaşmaktadır. Burada, çözümleyici çizelgelerin yaptığı aynı görevleri yapacak çözümleyici kümeler yöntemini tanımlayacağız.

Bir çelişki denetleme çizelgesi olan çözümleyici kümeler, önermelerin yanlışlığı dikkate alınarak doğruluk tablosundan elde edilen iki temel kurallara dayanmaktadır.

Tanım 3.1. p, q ve r önermeleri verilsin.

I) $p \vee q$ önermesinin yanlış olması için p ve q önermelerinin ikisinin birden yanlış olması gerekir. $p \vee q$ önermesinin bileşenlerini aşağıdaki gibi çatal açarak iki kümeye ayırma yöntemine **∨-kümeleme kuralı** denir.

$$\begin{array}{ccc} & \{p \vee q\} & \\ & \diagup \diagdown & \\ \{p\} & & \{q\} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \{p \vee q, r\} & \\ & \diagup \diagdown & \\ \{p, r\} & & \{q, r\} \end{array}$$

II) $p \wedge q$ önermesinin yanlış olması için p ve q önermelerinden en az birinin yanlış olması yeterlidir. $p \wedge q$ önermesinin bileşenlerini aşağıdaki gibi çengel açarak bir kümeye toplama yöntemine **∧-kümeleme kuralı** denir.

$$\begin{array}{c} \{p \wedge q\} \\ | \\ \{p, q\} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \{p \wedge q, r\} \\ | \\ \{p, q, r\} \end{array}$$

Buradaki kuralların sağında bulunan r önermeli gösteriş şekli, kurallar uygulanırken diğer önermelerin davranışını göstermektedir.

Tanım 3.2. Önermelere, ∨-kümeleme veya ∧-kümeleme kuralı uygulanarak basit veya basit önermelerin değilleri elde edilene kadar dallandırma yapılmasına **çözümleme** ve çözümlemede ortaya çıkan dallandırmaya **çözümleme ağacı** denir. Bir çözümleme ağacında, çözümlenecek önermeler kümesine **kök** ve çözümlenemez hale gelmiş ağacın dalları ucundaki basit önerme veya değilinden oluşan kümelerin her birine bir **çözümleyici küme** denir.

Sadelik için bundan sonra küme işareti sadece çözümleyici kümelerde kullanılacaktır.

Örnek 3.3. 1) $(\neg p \vee q) \wedge p$ önermesini çözümleyelim.

$(\neg p \vee q) \wedge p$

$\neg p \vee q, p$

$\{\neg p, p\}$ $\{q, p\}$

Burada, $\{\neg p, p\}$ ve $\{q, p\}$ çözümleme ağacının çözümleyici kümeleridir. Bu çözümleyici kümelerden $\{q, p\}$ tutarlıdır. Fakat p ve $\neg p$ basit önermelerini içerdiği için $\{\neg p, p\}$ çözümleyici kümesi tutarsızdır.

2) $p \vee q, \neg q \wedge r, \neg p$ önermelerini çözümleyelim.

$p \vee q, \neg q \wedge r, \neg p$

$p, \neg q \wedge r, \neg p$ $q, \neg q \wedge r, \neg p$

$\{p, \neg q, r, \neg p\}$ $\{q, \neg q, r, \neg p\}$

Bu çözümleme ağacının iki çözümleyici kümesi de tutarsızdır.

Not 3.4. Çözümleme ağacı yaparken kuralların öncelik sırası yoktur. Sıra değiştiğinde ağacın dallanma şekli değişse de çözümleyici kümeler değişmez.

Örnek 3.5. Örnek 3.3-2)'de verilen $p \vee q, \neg q \wedge r, \neg p$ önermeleri çözümlenirken önce $\vee$-kümeleme kuralı uygulanmıştır. Şimdi ise önce $\wedge$-kümeleme kuralını uygulayarak çözümleme yapalım.

$p \vee q, \neg q \wedge r, \neg p$

$p \vee q, \neg q, r, \neg p$

$\{p, \neg q, r, \neg p\}$ $\{q, \neg q, r, \neg p\}$

Görüldüğü gibi çözümleme ağacının dallandırması farklı olsa da çözümleyici kümeler aynı kalmıştır.

Not 3.6. $\vee$ ve $\wedge$ bağlaçları birleşme özelliğini sağladıkları için bir birleşik önermede ikiden fazla önerme $\vee$ veya $\wedge$ bağlacı kullanılmış ise çözümleme ağacı yaparken $\vee$-kümeleme kuralı ve $\wedge$-kümeleme kuralı, uygun olduğu durumlarda ikiden fazla önermeye uygulanabilir. Örneğin, verilen herhangi p, q, r önermeleri için $\vee$-kümeleme kuralı ve $\wedge$-kümeleme kuralı sırasıyla aşağıdaki gibi olur.

$p \vee q \vee r$ $p \wedge q \wedge r$

$\{p\} \quad \{q\} \quad \{r\} \qquad\qquad \{p, q, r\}$

Tanım 3.7. ¬ birli bağlacıyla birlikte sadece ∨ ve ∧ ikili bağlaçları kullanarak yazılmış birleşik önermelere ∨∧-**formunda** yazılmış önermeler denir.

Örnek 3.8. $\neg p \vee q$, $p \wedge q$, $(\neg p \vee q) \wedge p$ ve $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ önermeleri ∨∧-formunda yazılmıştır.

Teorem 3.9. Basit önermeler ve basit önermelerin değili dışındaki bütün önermeler ve değilleri ∨∧−formunda yazılabilir.

İspat. p ve q herhangi iki önerme olmak üzere önermeler kümesindeki basit önermeler ve basit önermelerin değili dışındaki birleşik önermeler $p \vee q$, $\neg(p \vee q)$, $p \wedge q$, $\neg(p \wedge q)$, $p \rightarrow q$, $\neg(p \rightarrow q)$, $p \leftrightarrow q$ ve $\neg(p \leftrightarrow q)$ formundadır. Bunların hepsinin ∨∧−formunda yazılabileceğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
\neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q,\\
\neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q,\\
p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q,\\
\neg(p \rightarrow q) &\equiv p \wedge \neg q,\\
p \leftrightarrow q &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q),\\
\neg(p \leftrightarrow q) &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q).
\end{aligned}$$

Not 3.10. Teorem 3.9'un ispatında verilen denklikler kullanılarak her önerme ∨∧−formuna dönüştürülebildiğinden ∨-kümeleme kuralı ve ∧-kümeleme kuralını kullanarak verilen her önermenin çözümleme ağacı çıkarılabilir.

Örnek 3.11. $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ önermesini denklikleri, ∨-kümeleme kuralı ve ∧-kümeleme kuralını uygulayarak çözümleyelim.

$(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

$\neg(p \vee q) \vee (p \rightarrow q)$

$\neg(p \vee q) \qquad\qquad p \rightarrow q$

$\neg p \wedge \neg q \qquad\qquad \neg p \vee q$

$\{\neg p, \neg q\} \quad \{\neg p\} \qquad \{q\}$

Not 3.12. Teorem 3.9'a göre iki temel çözümleme kuralına ek olarak istendiği taktirde $\neg(p \vee q)$, $\neg(p \wedge q)$, $p \rightarrow q$, $\neg(p \rightarrow q)$, $p \leftrightarrow q$ ve $\neg(p \leftrightarrow q)$ önermeleri için kümeleme kuralı yazılabilir. Bu kurallar kullanıldığı zaman denkliklerle uğraşılmayacağından dolayı çözümleme ağacının daha sade olacağı açıktır. Herhangi p ve q önermeleri için bu kurallar sırasıyla aşağıdaki gibi olur.

<u>¬∧−kümeleme kuralı</u>	<u>¬∨−kümeleme kuralı</u>	<u>→−kümeleme kuralı</u>
$\neg(p \wedge q)$	$\neg(p \vee q)$	$p \rightarrow q$
$\{\neg p\} \quad \{\neg q\}$	$\{\neg p, \neg q\}$	$\{\neg p\} \quad \{q\}$

¬→−kümeleme kuralı

$\neg(p \to q)$

$\{p, \neg q\}$

↔−kümeleme kuralı

$p \leftrightarrow q$

$\{p, q\} \quad \{\neg p, \neg q\}$

¬↔−kümeleme kuralı

$\neg(p \leftrightarrow q)$

$\{p, \neg q\} \quad \{\neg p, q\}$

Örnek 3.13. Burada Örnek 3.11'de verilen aynı $(p \vee q) \to (p \to q)$ önermesinin çözümlemesini uygun bütün kümeleme kuralları kullanarak yaparsak denklikler görülmeyeceği için çözümleme ağacı daha sade olacaktır.

$$(p \vee q) \to (p \to q)$$

$$\neg(p \vee q) \qquad p \to q$$

$$\{\neg p, \neg q\} \quad \{\neg p\} \quad \{q\}$$

Not 3.14. Uygulama kolaylığı için herhangi $p \equiv q$ denkliği ∨-kümeleme kuralı ve ∧-kümeleme kuralıyla birlikte çözümleme ağacında sırasıyla aşağıdaki gibi kullanılır.

$$p \qquad\qquad p$$
$$q \qquad\qquad q$$
$$\{...\} \quad \{...\} \qquad\qquad \{...\}$$

3.1 Çözümleyici Kümelerle Çelişki Denetimi

Burada, çözümleyici kümeler yöntemini kullanarak bir önermenin çelişki olup olmadığının nasıl bulunduğu gösterilecektir.

Teorem 3.15. Bir önerme çelişkidir ancak ve ancak bu önermenin çözümleme ağacındaki bütün çözümleyici kümeler tutarsızdır.

İspat. Önermelerin çözümleme ağacı iki temel kurala bağlıdır.

$$0 \vee 0 \qquad\qquad 1 \wedge 0$$
$$\{0\} \quad \{0\} \qquad\qquad \{1, 0\}$$

∨-kümeleme kuralına göre ∨ bağlacı ile birleşime giren bir önerme çelişki ise birleşime giren her iki önermede yanlıştır; aksi taktirde çelişki olmaz. Bu durumda, çözümleme ağacında, yanlış önermelerden oluşan her iki çözümleyici küme tutarsız olmak zorundadır.

∧-kümeleme kuralına göre ∧ bağlacı ile birleşime giren bir önerme çelişki ise birleşime giren en az bir önerme yanlıştır; aksi taktirde çelişki olmaz. Bu durumda çözümleme ağacında oluşan tek çözümleyici küme en az biri yanlış olan önermelerden oluşacağı için tutarsız olmak zorundadır.

Tersine, ∨-kümeleme kuralına göre oluşan iki tane çözümleyici küme tutarsız ise tutarsız önermelerin ∨ bağlacı ile birleşimi çelişki olmak zorundadır.

∧-kümeleme kuralına göre oluşan bir tane çözümleyici küme tutarsız ise en az biri çelişki olan önermelerin ∧ bağlacı ile birleşimi çelişki olmak zorundadır.

Örnek 3.16. $(\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q$ önermesinin bir çelişki olduğunu çözümleyici kümeler yöntemiyle gösterelim.

$(\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q$

$\neg p \vee q, p, \neg q$

$\{\neg p, p, \neg q\}$ $\{q, p, \neg q\}$

Çözümleme ağacının iki tane çözümleyici kümesi var ve ikisi de tutarsız olduğu için verilen önerme bir çelişkidir.

Not 3.17. Bir önermenin çözümleme ağacında bütün çözümleyici kümeleri tutarlı olsa bu önerme bir dosdoğru (totoloji) olabilir mi?

$1 \vee 1$ $0 \wedge 1$

$\{1\}$ $\{1\}$ $\{0, 1\}$

Olduğu durumlar olsa da genel olarak olamaz. Çünkü, ∧-kümeleme kuralına göre oluşan bir tane çözümleyici küme tutarsız olsun. Eğer çözümleyici kümeyi oluşturan önermelerin hepsi doğru ise problem yoktur; fakat en az biri yanlış olabilir. Biri yanlış olan önermelerin ∧ bağlacı ile birleşimi de yanlış olmak zorundadır. Bu durumda bir dosdoğru oluşması imkansızdır.

Benzer şekilde ∨-kümeleme kuralının yorumunun yapılması okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek 3.18. Burada, bir çözümleme ağacında bütün çözümleyici kümeleri tutarlı olan iki önermeden birinin dosdoğru olduğuna ve diğerinin olmadığına örnek verelim.

1) $(\neg p \vee q) \vee (p \wedge \neg q)$ önermesi dosdoğrudur ve çözümleme ağacının çözümleyici kümeleri tutarlıdır.

$(\neg p \vee q) \vee (p \wedge \neg q)$

$\neg p \vee q$ $p \wedge \neg q$

$\{\neg p\}$ $\{q\}$ $\{p, \neg q\}$

2) $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ önermesi dosdoğru değildir ve çözümleme ağacının çözümleyici kümeleri tutarlıdır.

$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

$\neg p \wedge q$ $\qquad$ $p \wedge \neg q$

$\{\neg p, q\}$ $\qquad$ $\{p, \neg q\}$

3.2 Çözümleyici Kümelerle Dosdoğru Denetimi

Burada, bir önermenin dosdoğru olup olmadığını çözümleyici kümeler yöntemiyle nasıl gösterildiği verilecektir.

Teorem 3.19. Bir p önermesi dosdoğrudur ancak ve ancak $\neg p$ önermesi bir çelişkidir.

İspat. Aşikar.

Örnek 3.20. $\neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q$ önermesinin bir dosdoğru olduğunu çözümleyici kümeler yöntemiyle gösterelim. Bunun için Teorem 3.19'u kullanarak bu önermenin değilinin çelişki olduğunu çözümleyici kümelerle gösterelim.

$$\neg[\neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q] \equiv ((\neg p \vee q) \wedge p) \wedge \neg q$$

Örnek 3.16'da $((\neg p \vee q) \wedge p) \wedge \neg q$ önermesinin bir çelişki olduğu çözümleyici kümeler yöntemiyle gösterilmiştir. O halde $\neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q$ önermesinin bir dosdoğrudur.

3.3 Çözümleyici Kümelerle Çıkarım Denetimi

Burada bir çıkarımın geçerli olup olmadığını çözümleyici kümeler yöntemiyle nasıl gösterildiği verilecektir.

Öncülleri $p_1, p_2, ..., p_n$ ve sonucu q olan bir çıkarım $p_1, p_2, ..., p_n \vdash q$ şeklinde gösterilir. Öncülleri doğru olduğunda sonucu doğru olan çıkarımlar geçerlidir; aksi durumda geçersizdir. $p_1, p_2, ..., p_n$ öncüllerinin her biri doğru olduğu için çıkarımda bu öncüller yerine $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n$ bileşik önermesi yazılabilir. Çünkü, $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n$ önermesinin doğru olması için $p_1, p_2, ..., p_n$ önermelerinin her birinin doğru olması gerekir. O halde, n tane öncüllü $p_1, p_2, ..., p_n \vdash q$ şeklindeki her geçerli çıkarımı tek öncüllü geçerli $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \vdash q$ çıkarımına dönüşür.

Bir $p \vdash q$ çıkarımının geçerli çözümleyici kümeler yöntemiyle göstermek için $p \rightarrow q$ önermesinin bir dosdoğru olup olmadığını denetlemek yeterli olacağından $\neg(p \rightarrow q)$ önermesinin çelişki olup olmadığına bakmak yeterlidir.

Teorem 3.21. Bir $p \vdash q$ çıkarımı geçerli ancak ve ancak $p \rightarrow q$ önermesi bir dosdoğrudur.

İspat. $p \vdash q$ çıkarımı geçerli ise p öncülü ve q sonucu doğrudur. p ve q önermelerini doğru olduğu durumlarda $p \rightarrow q$ önermesi bir dosdoğrudur.

Tersine, $p \rightarrow q$ önermesi bir dosdoğru ise p ve q önermeleri için doğruluk tablosunda $1 \rightarrow 1$, $0 \rightarrow 1$ ve $0 \rightarrow 0$ durumları ortaya çıkar. $p \vdash q$ çıkarımının geçerli olması için p önermesinin doğru olduğu durumlarda q önermesinin de doğru olmalıdır. Buna sadece $1 \rightarrow 1$ durumu uyduğu için $p \vdash q$ çıkarımının geçerli olur.

Örnek 3.22. $(\neg p \vee q) \wedge p \vdash q$ çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici kümeler yöntemiyle gösterelim. Bunun için Teorem 3.21'i kullanarak $((\neg p \vee q) \wedge p) \rightarrow q$ önermenin bir dosdoğru olduğunu gösterelim. Bu önermenin bir dosdoğru olduğunu göstermek için Teorem 3.19'u kullanarak bu önermenin değilinin çelişki olduğunu çözümleyici kümelerle gösterelim.

$$\neg[((\neg p \vee q) \wedge p) \rightarrow q] \equiv \neg[\neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q] \equiv ((\neg p \vee q) \wedge p) \wedge \neg q$$

Örnek 3.16'da $((\neg p \vee q) \wedge p) \wedge \neg q$ önermesinin bir çelişme olduğu çözümleyici kümeler yöntemiyle gösterilmiştir. O halde $(\neg p \vee q) \wedge p \vdash q$ çıkarımının geçerlidir.

3.4 Çözümleyici Kümelerle Denklik Denetimi

Burada bir denkliğin doğru olup olmadığını çözümleyici kümeler yöntemiyle nasıl gösterildiği verilecektir.

Teorem 3.23. Bir $p \equiv q$ denkliği doğrudur ancak ve ancak $p \leftrightarrow q$ önermesi bir dosdoğrudur.

İspat. $p \equiv q$ denkliği doğrudur ise p ve q önermelerinin doğruluk değerleri aynıdır. p ve q önermelerini doğruluk değerlerinin aynı olduğu durumlarda $p \leftrightarrow q$ önermesi bir dosdoğrudur.
Tersine, $p \leftrightarrow q$ önermesi bir dosdoğru ise p ve q önermelerinin doğruluk değerleri aynıdır. p ve q önermelerini doğruluk değerlerinin aynı olduğu durumlarda $p \equiv q$ denkliği doğrudur.

Örnek 3.24. $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ denkliğinin doğruluğunu çözümleyici kümelerle yöntemiyle gösterelim. Bunun için Teorem 3.23'ü kullanarak $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ önermesinin bir dosdoğru olduğunu gösterelim. Bu önermenin bir dosdoğru olduğunu göstermek için Teorem 3.19'u kullanarak bu önermenin değilinin çelişki olduğunu çözümleyici kümeler yöntemiyle gösterelim.

$$\neg[(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)]$$
$$\neg[((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)) \wedge ((\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q))]$$
$$\neg[(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)] \vee \neg[(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)]$$
$$\neg[\neg(p \rightarrow q) \vee (\neg p \vee q)] \vee \neg[\neg(\neg p \vee q) \vee (p \rightarrow q)]$$
$$[(p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg p \vee q)] \vee [(\neg p \vee q) \wedge \neg(p \rightarrow q)]$$
$$[(\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q)] \vee [(\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee q)]$$
$$[(\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q)] \vee [(\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q]$$

$(\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q)$ $\qquad$ $(\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q$

$\{\neg p \vee q, p, \neg q\}$ $\qquad$ $\{\neg p \vee q, p, \neg q\}$

$\{\neg p, p, \neg q\}$ $\quad$ $\{q, p, \neg q\}$ $\quad$ $\{\neg p, p, \neg q\}$ $\quad$ $\{q, p, \neg q\}$

Bu önermenin çözümleme ağacının bütün çözümleyici kümeleri tutarsız olduğu için bu önerme bir çelişkidir. O halde $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ denkliği doğrudur.

4. Sonuç

Mantıkta doğruluk değer tablosu kullanmak, basit bileşen ve bağlaç sayısı arttıkça zorlaşmaktadır. Bu zorluğun üstesinden gelen çözümleyici çizelge, Smullyan (1968) tarafından ortaya atılan, bir çelişki denetleme yöntemidir. Çözümleyici çizelge, mantıkta doğruluk değer tablosunun görevini üstlenen bir yöntemdir. Bu çalışmada, çözümleyici çizelgelerin yeni bir versiyonunu verdik ve adına "çözümleyici kümeleri" diyerek temel özelliklerini inceledik. Önermelerin tutarlılığını, denkliğini ve çıkarımların geçerliliğini nasıl denetlediğini gösterdik. Çözümleme kümeleri ağacının, çözümleyici çizelgeden en önemli farkı; karar vermek için kapalı veya açık yollara bakmaya gerek kalmadan sadece tutarlı ya da tutarsız kümelere bakmak yeterli olmaktadır.

5. Kaynaklar

Grünberg, T., 2002. Modern Logic, METU Press, Ankara.
Hardegree, G. M., 2010, Symbolic Logic: A First Course, McGraw Hill, New York.
Howson, C., 1997. Logic with Trees: An Introduction to Symbolic Logic, Routledge, London.
Kutlusoy, Z., 2003. Temel Sembolik Mantık, ART Basın Yayın, Ankara.
Nolt, J., Rohatyn, D., Varzi, A., 1988. Schaum's Outline of Logic, McGraw Hill Professional.
Özlem, D., 2004. Mantık: Klasik/Sembolik Mantık, Mantık Felsefesi, 7. Baskı, İnkılâp Kitabevi, İstanbul.
Smullyan, R. M., 1968. First-Order Logic. Springer-Verlag, Berlin.
Taşdelen, İ., 2009. Sembolik Mantık, AÜ Açıköğretim Fakültesi Yayınları, Eskişehir.
Teller, P., 1989. A Modern Formal Logic Primer: Sentence Logic, Vol. 1, Prentice Hall, New Jersey.
Thomas, N., 1966. Modern Logic : An Introduction, Barnes & Noble Inc., New York.