Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 13(2), 1237-1246, 2023
Journal of the Institute of Science and Technology, 13(2), 1237-1246, 2023
ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618
Matematik / *Mathematics* **DOI: 10.21597/jist.1205226**
Araştırma Makalesi / *Research Article*
Geliş tarihi / *Received*: 15.11.2022 **Kabul tarihi / *Accepted*: 18.01.2023**

Atıf İçin: Bulut, F. ve Eker, A. (2023). Lorentz-Darboux Çatısına Göre k ve $(k,m)-$tip Slant Helisler. *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 13(2), 1237-1246.

To Cite: Bulut, F. & Eker, A. (2023). k and $(k,m)-$type Slant Helices According to the Lorentz-Darboux Frame. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 13(2), 1237-1246.

Lorentz-Darboux Çatısına Göre k ve $(k,m)-$ tip Slant Helisler

Fatma BULUT[1*], Alisami EKER[1]

Öne Çıkanlar:
- k ve $(k,m)-$tip slant helisler

Anahtar Kelimeler:
- Slant helis,
- Lorentz-Darboux çatısı,
- Minkowski uzayı

ÖZET:

Helis kavramı, mühendislikten fiziğe kadar kapsamlı alanlardaki kullanımları nedeniyle diferansiyel geometri için çok önemlidir. Bu araştırmada, dört boyutlu Lorentz-Darboux çatısına göre k ve $(k,m)-$tip slant helisler verilmiş ve teoremler ispatlanmıştır.

k and $(k,m)-$type Slant Helices According to the Lorentz-Darboux Frame

Highlights:
- k and $(k,m)-$type slant helices

Keywords:
- Slanthelix,
- Lorentz-Darboux frame,
- Minkowski space

ABSTRACT:

The helix notion is a crucial one for differential geometry due to its comprehensive uses in fields ranging from engineering to physics. In this research, k and $(k,m)-$type slant helices are given according to the four-dimensional Lorentz-Darboux frame and theorems are proved.

[1] Fatma BULUT (**Orcid ID:** 0000-0002-7684-6796), Alisami EKER (**Orcid ID:** 0000-0002-9813-0369),
Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Bitlis, Türkiye
***Sorumlu Yazar/*Corresponding Author*:** Fatma BULUT, e-mail: fbulut@beu.edu.tr

Bu çalışma Alisami EKER'in Yüksek Lisans tezinden üretilmiştir.

GİRİŞ

Lorentz-Minkowski uzayındaki alt manifoldlar, çeşitli matematiksel açılardan incelenir ve görelilik teorisinde de ilgi çekicidirler. Son yıllarda, singülerlik teorisinin kullanımı önemli ilerlemelere yol açmış ve hem Öklid uzaylarında hem de yarı Öklid uzaylarında alt manifoldların singülerliğinin sınıflandırılmasına ve karakterizasyonuna odaklanan birçok araştırma yapılmıştır Bruce (1984), Hananoi vd. (2015) ve Hayashi vd. (2017). Izumiya ve ark. (2017), De Sitter uzayında uzay- benzeri eğrilerin horosferik ve hiperbolik ikili yüzeyleri elde etmiş ve Minkowski uzay-zamanında uzay- benzeri alt manifoldlar boyunca hafif hiper yüzeyler bulunmuştur (Izumiya ve ark., 2013). Ayrıca, 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında zamana benzer bir yüzey üzerindeki eğrilerin sözde küresel normal Darboux görüntüleri bulunmuştur (Izumiya ve ark., 2015) ve horosferik düz yüzeyleri (horosferik geometri anlamında düz yüzeyler) hiperbolik 3-uzayında araştırılmıştır (Izumiya ve ark., 2010). Minkowski uzayında ışık-benzeri noktaların yakınında odak eğrileri kümesi tanımlanmıştır (Nabarro ve ark., 2015).

Sato (2012), 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında uzay benzeri bir yüzey üzerindeki eğrilerin sözde küresel evolütlerini çalışmıştır. Ali ve ark. (2012), $k-$tip slant helisler üzerine ve $k-$tip null slant helisleri tanımlamışlardır. Izumiya ve ark. (2021), Minkowski uzay-zamanında uzay-benzeri bir hiper yüzeydeki eğrileri incelemişlerdir. Bulut ve Bektaş (2020), equiform geometrisinde uzay-benzeri eğrilerin k ve $(k,m)-$tip slant helisleri oluşturmuşlardır. Ayrıca, 4-boyutlu Öklid uzayında ilk $(k,m)-$ tipi slant helis olarak adlandırılan yeni tip slant helisleri Yilmaz ve Bektaş (2018) tarafından tanımlanmıştır.

Bu çalışmamızın bulgular bölümünde k ve $(k,m)-$tip slant helis teoremleri yeni çatısında ispatlanmıştır.

MATERYAL VE METOT

Bu çalışmada, Lorentz-Darboux çatısı kullanılarak k ve $(k,m)-$tip slant helisler ile ilgili bazı teoremler ispatlanarak orijinal çalışmalar ortaya konulacaktır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, bilimsel çalışmalar için yeni teorilerin literatüre eklenmesi açısından önemlidir.

Tanım 1. $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ Lorentz-Darboux çatısı ile verilen α birim hızlı bir regüler eğri olsun. α bir $k-$tip slant helis ise $\mathrm{U} \in \mathbb{R}_1^4$ sıfırdan farklı bir doğrultu (sabit bir vektör alanı) olmak üzere $1 \leq k \leq 4,\ k \neq c$ için $\langle L_k, \mathrm{U} \rangle = c$ sabittir.

Pseudo-ortonormal çatısı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} t \\ n_\gamma \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & k_n & k_g & 0 \\ k_n & 0 & \tau_1 & \tau_2 \\ -k_g & \tau_1 & 0 & \tau_g \\ 0 & \tau_2 & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ n_\gamma \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}.$$

Bu Lorentz-Darboux çatısının türev denklemleri (Izumiya ve ark. 2021)

$$t' = k_n n_\gamma + k_g n_1,$$

$$n'_\gamma = k_n t + \tau_1 n_1 + \tau_2 n_2,$$

$$n_1' = \tau_1 n_\gamma - k_g t + \tau_g n_2,$$

$$n_2' = \tau_2 n_\gamma - \tau_g n_1$$

eşitlikleri ile elde edilir.

BULGULAR VE TARTIŞMA

Lorentz-Darboux Çatısına göre k-tip helisler

Teorem 1. α eğrisi $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\{t, n_\gamma, n_1, n_2\}$ Lorentz-Darboux çatısında bir birim hızlı eğri olsun. $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\{t, n_\gamma, n_1, n_2\}$ Lorentz-Darboux çatısına göre 1- tip slant helis yoktur. O halde, $\mathbb{R}_1^4$ uzayında pseudo-ortonormal çatısına göre de 1-tip slant helis yoktur.

İspat. Kabul edelim ki $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\{t, n_\gamma, n_1, n_2\}$ Lorentz-Darboux çatısı ile verilen α Frenet eğrisi 1-tip slant helis olmak üzere U sıfırdan farklı bir doğrultu (vektör alanı) olsun. O halde;

$$\langle t, U\rangle = c_1 \text{ ve } c_1 \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. (1) denkleminin türevi alındığında

$$\langle t', U\rangle = 0$$

olur. Burada türev denklemleri yazıldığında

$$\langle k_n n_\gamma + k_g n_1, U\rangle = 0,$$

$$k_n\langle n_\gamma, U\rangle + k_g\langle n_1, U\rangle = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde $\langle n_\gamma, U\rangle = a,\ \langle n_1, U\rangle = d,\ \langle n_2, U\rangle = e \quad a, d, e \in \mathbb{R}$ olmak üzere, U sıfırdan farklı bir doğrultu (vektör alanı) vektörünü yazalım:

$$U = c_1 t + a n_\gamma + d n_1 + e n_2$$

ve $a = d = 0$ olduğundan

$$U = c_1 t + e n_2 \tag{2}$$

biçiminde yazılır. (2) denkleminin türevi alındığında ve türev denklemleri yerine yazıldığında:

$$U' = c_1 t' + e n_2',$$

$$U' = c_1\left(k_n n_\gamma + k_g n_1\right) + e\left(\tau_2 n_\gamma - \tau_g n_1\right) = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan $c_1 = 0$ ve $e = 0$ dır. O halde, 1-tip slant helis yoktur.

Teorem 2. α eğrisi $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\{t, n_\gamma, n_1, n_2\}$ Lorentz-Darboux çatısında bir birim hızlı eğri olsun. O halde, $\mathbb{R}_1^4$ uzayında pseudo-ortonormal çatısına göre 2-tip slant helis yoktur.

İspat. Kabul edelim ki $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\{t, n_\gamma, n_1, n_2\}$ Lorentz-Darboux çatısı ile verilen α Frenet eğrisi 2-tip slant helis olmak üzere U sıfırdan farklı bir doğrultu (vektör alanı) olsun. O halde;

$$\left\langle n_\gamma, U\right\rangle = c_2 \text{ ve } c_2 \in \mathbb{R} \tag{3}$$

yazılabilir. (3) denkleminin türevi alındığında

$$\left\langle n'_\gamma, U\right\rangle = 0$$

olur. Burada türev denklemleri yazıldığında

$$k_n\left\langle t, U\right\rangle + \tau_1\left\langle n_1, U\right\rangle + \tau_2\left\langle n_2, U\right\rangle = 0$$

elde edilir. $\left\langle t, U\right\rangle = a,\ \left\langle n_1, U\right\rangle = d,\ \left\langle n_2, U\right\rangle = e \quad a, d, e \in \mathbb{R}$ olmak üzere, U sıfırdan farklı sabit bir doğrultu (vektör alanı) vektörünü yazalım:

$$U = at + c_2 n_\gamma + dn_1 + en_2$$

$a = d = e = 0$ olduğundan

$$U = c_2 n_\gamma \tag{4}$$

elde edilir. (4) denkleminin türevi alındığında ve türev denklemleri yerine yazıldığında

$$U' = c_2 n'_\gamma,$$

$$U' = c_2\left(k_n t + \tau_1 n_1 + \tau_2 n_2\right) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $c_2 = 0$ olduğu için 2-tip slant helisin olmadığı ispatlanmış olur.

Teorem 3. α eğrisi $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\left\{t,\ n_\gamma, n_1, n_2\right\}$ Lorentz-Darboux çatısında bir birim hızlı eğri olsun. O halde, $\mathbb{R}_1^4$ uzayında Lorentz-Darboux çatısına göre 3-tip slant helis yoktur.

İspat. Kabul edelim ki $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\left\{t,\ n_\gamma, n_1, n_2\right\}$ Lorentz-Darboux çatısı ile verilen α Frenet eğrisi 3-tip slant helis olmak üzere U sıfırdan farklı bir doğrultu (vektör alanı) olsun. O halde

$$\left\langle n_1, U\right\rangle = c_3 \text{ ve } c_3 \in \mathbb{R} \tag{5}$$

yazılabilir. (5) denkleminin türevi alındığında

$$\left\langle n'_1, U\right\rangle = 0$$

olur. Burada türev denklemleri yazıldığında aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\tau_1\left\langle n_\gamma, U\right\rangle - k_g\left\langle t, U\right\rangle + \tau_g\left\langle n_2, U\right\rangle = 0.$$

$\left\langle n_\gamma, U\right\rangle = a,\ \left\langle t, U\right\rangle = b,\ \left\langle n_2, U\right\rangle = d \quad a, b, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere, U sıfırdan farklı bir doğrultu (vektör alanı) vektörünü yazalım:

$$U = -bt + an_\gamma + c_3 b_1 + dn_2$$

ve $a = b = d = 0$ olduğundan,

$$U = c_3 n_1 \tag{6}$$

yazabiliriz. (6) denkleminin türevini alıp türev denklemleri yerine yazarsak

$$U' = c_3\left(\tau_1 n_\gamma - k_g t + \tau_g n_2\right) = 0$$

elde edilir. Buradan $c_3 = 0$ olduğu için 3-tip slant helisin olmadığı ispatlanmış olur.

Teorem 4. α eğrisi $\mathbb{R}^4_1$ Minkowski uzayında $\{t,\ n_\gamma, n_1, n_2\}$ Lorentz-Darboux çatısında bir birim hızlı eğri ise o halde, $\mathbb{R}^4_1$ Minkowski uzayında Lorentz-Darboux çatısına göre 4-tip slant helis yoktur.

İspat. Kabul edelim ki $\mathbb{R}^4_1$ Minkowski uzayında Lorentz-Darboux çatısı $\{t,\ n_\gamma, n_1, n_2\}$ ile verilen α Frenet eğrisi 4-tip slant helis olmak üzere U sıfırdan farklı bir doğrultu (vektör alanı) olsun. O halde;

$$\langle n_2, U\rangle = c_4 \text{ ve } c_4 \in \mathbb{R} \tag{7}$$

yazılabilir. (7) denkleminin türevini alırsak

$$\langle n_2', U\rangle = 0.$$

Burada türev denklemleri yazıldığında aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\tau_2 \langle n_\gamma, U\rangle - \tau_g \langle n_1, U\rangle = 0.$$

$\langle n_\gamma, U\rangle = a,\ \langle t, U\rangle = b,\ \langle n_1, U\rangle = d \ ve\ a, b, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere, U sıfırdan farklı bir doğrultu (vektör alanı) vektörünü yazalım:

$$U = bt + an_\gamma + db_1 + c_4 n_2$$

ve $a = d = 0$ olduğundan

$$U = bt + c_4 n_2 \tag{8}$$

yazabiliriz. (8) denkleminin türevini alıp türev denklemleri yerine yazarsak

$$U' = bt' + c_4 n_2{}',$$

$$U' = b\left(k_n n_\gamma + k_g n_1\right) + c_4\left(\tau_2 n_\gamma - \tau_g n_1\right) = 0$$

elde edilir. Buradan $b = 0$ ve $c_4 = 0$ olduğu için 4-tip slant helisin olmadığı ispatlanmış olur.

Lorentz-Darboux Çatısına göre (k,m)-tip helisler

Teorem 5. α eğrisi $\mathbb{R}^4_1$ Minkowski uzayında $\{t,\ n_\gamma, n_1, n_2\}$ Lorentz-Darboux çatısına göre $(1,2)-$ tip slant helis ise o halde, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\langle n_1, U\rangle = \frac{-k_n c_2}{k_g},$$

$$\langle n_2, U\rangle = \frac{-k_n c_1}{\tau_2} + \frac{\tau_1 k_n c_2}{\tau_2 k_g}.$$

Burada c_1 ve c_2 sabitlerdir.

İspat. Kabul edelim ki $\mathbb{R}^4_1$ Minkowski uzayında Lorentz-Darboux çatısı ile verilen α eğrisi $(1,2)-$ tip slant helis olsun. U sıfırdan farklı bir doğrultu (vektör alanı) vektörü olmak üzere,

$$\langle t, U\rangle = c_1,$$

$$\langle n_\gamma, U\rangle = c_2$$

yukarıdaki denklemlerin türevini alalım:

$$\langle t', U\rangle = 0, \tag{9}$$

$$\left\langle n_\gamma',U\right\rangle=0 \tag{10}$$

(9) denkleminde türev denklemleri yerine yazılırsa

$$k_n c_2+k_g\left\langle n_1,U\right\rangle=0 \quad \Rightarrow \left\langle n_1,U\right\rangle=\frac{-k_n c_2}{k_g} \tag{11}$$

elde edilir. (10) denkleminde türev denklemleri yerine yazılırsa

$$k_n\underbrace{\left\langle t,U\right\rangle}_{c_1}+\tau_1\left\langle n_1,U\right\rangle+\tau_2\left\langle n_2,U\right\rangle=0 \tag{12}$$

elde edilir. (11) denkleminde bulunan ifade (12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left\langle n_2,U\right\rangle=\frac{-k_n c_1}{\tau_2}+\frac{\tau_1 k_n c_2}{\tau_2 k_g}$$

elde edilir, böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6. α eğrisi $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\{t,\ n_\gamma,n_1,n_2\}$ Lorentz-Darboux çatısına göre $(1,3)-$tip slant helis ise o halde, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\left\langle n_\gamma,U\right\rangle=\frac{-k_g c_3}{k_n},$$

$$\left\langle n_2,U\right\rangle=\frac{k_g\tau_1 c_3}{\tau_g k_n}+\frac{k_g c_1}{\tau_g}.$$

Burada c_1 ve c_3 sabitlerdir.

İspat. Kabul edelim ki $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında Lorentz-Darboux çatısı ile verilen α eğrisi $(1,3)-$tip slant helis olsun. U sıfırdan farklı sabit bir doğrultu (vektör alanı) vektörü olmak üzere,

$$\left\langle t,U\right\rangle=c_1,$$

$$\left\langle n_1,U\right\rangle=c_3$$

sabitlerdir. Yukarıdaki denklemlerin türevini alalım:

$$\left\langle t',U\right\rangle=0 \tag{13}$$

$$\left\langle n_1',U\right\rangle=0 \tag{14}$$

buradan (13) ve (14) denklemlerinde türev denklemleri yerine yazılırsa

$$k_n\left\langle n_\gamma,U\right\rangle+k_g\underbrace{\left\langle n_1,U\right\rangle}_{c_3}=0\ , \tag{15}$$

$$\tau_1\left\langle n_\gamma,U\right\rangle-k_g\underbrace{\left\langle t,U\right\rangle}_{c_1}+\tau_g\left\langle n_2,U\right\rangle=0 \tag{16}$$

(15) deki denklemde gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\left\langle n_\gamma,U\right\rangle=\frac{-k_g c_3}{k_n} \tag{17}$$

elde edilir. (17) denkleminde bulunan ifade (16) denkleminde yerine yazılırsa

$$\langle n_2, U\rangle = \frac{k_g \tau_1 c_3}{\tau_g k_n} + \frac{k_g c_1}{\tau_g}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 7. $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\{t,\ n_\gamma, n_1, n_2\}$ Lorentz-Darboux çatısına göre $(1,4)-$tip slant helis yoktur.

İspat. Kabul edelim ki $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\{t,\ n_\gamma, n_1, n_2\}$ Lorentz-Darboux çatısı ile verilen α eğrisi $(1,4)-$tip slant helis olsun. $U \in \mathbb{R}_1^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere,

$$\langle t, U\rangle = c_1,$$

$$\langle n_2, U\rangle = c_4$$

sabitlerdir. Yukarıdaki denklemlerin türevini alalım:

$$\langle t', U\rangle = 0, \tag{18}$$

$$\langle n_2', U\rangle = 0. \tag{19}$$

Buradan (18) ve (19) denklemlerinde türev denklemleri yerine yazılırsa

$$k_n \langle n_\gamma, U\rangle + k_g \langle n_1, U\rangle = 0,$$

$$\tau_2 \langle n_\gamma, U\rangle - \tau_g \langle n_1, U\rangle = 0$$

elde edilir ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra $\langle n_\gamma, U\rangle$ ve $\langle n_1, U\rangle$ ifadeleri sıfır çıkacağından $(1,4)-$tip slant helis yoktur.

Teorem 8. $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\{t,\ n_\gamma, n_1, n_2\}$ Lorentz-Darboux çatısına göre $(2,3)-$tip slant helis yoktur.

İspat. Kabul edelim ki $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\{t,\ n_\gamma, n_1, n_2\}$ Lorentz-Darboux çatısı ile verilen α eğrisi $(2,3)-$tip slant helis olsun. $U \in \mathbb{R}_1^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere,

$$\langle n_\gamma, U\rangle = c_2,$$

$$\langle n_1, U\rangle = c_3$$

yazılabilir. Yukarıdaki denklemlerin türevini alırsak:

$$\langle n_\gamma', U\rangle = 0, \tag{20}$$

$$\langle n_1', U\rangle = 0 \tag{21}$$

elde edilir. Buradan (20) ve (21) denklemlerinde türev denklemleri yerine yazılırsa:

$$k_n \langle t, U\rangle + \tau_1 \underbrace{\langle n_1, U\rangle}_{c_3} + \tau_2 \langle n_2, U\rangle = 0,$$

$$\tau_1 \underbrace{\langle n_\gamma, U\rangle}_{c_2} - k_g \langle t, U\rangle + \tau_g \langle n_2, U\rangle = 0$$

elde edilir ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra $\langle t, U\rangle$ ve $\langle n_2, U\rangle$ ifadeleri sıfır çıkacağından o halde $(2,3)-$tip slant helis yoktur.

Teorem 9. α eğrisi $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\{t,\ n_\gamma, n_1, n_2\}$ Lorentz-Darboux çatısına göre $(2,4)-$tip slant helis ise o halde, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\langle t,U\rangle = -\frac{\tau_1\tau_2 c_2}{k_n\tau_g} - \frac{\tau_2 c_4}{k_n},$$

$$\langle n_1,U\rangle = \frac{\tau_2 c_2}{\tau_g}.$$

Burada c_2 ve c_4 sabitlerdir.

İspat. Kabul edelim ki $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında Lorentz-Darboux çatısı ile verilen α eğrisi $(2,4)-$tip slant helis olsun. U sıfırdan farklı sabit bir doğrultu (vektör alanı) olmak üzere,

$$\langle n_\gamma,U\rangle = c_2,$$

$$\langle n_2,U\rangle = c_4$$

yazılabilir. Yukarıdaki denklemlerin türevini alırsak:

$$\langle n'_\gamma,U\rangle = 0, \tag{22}$$

$$\langle n'_2,U\rangle = 0 \tag{23}$$

elde edilir. Buradan (22) ve (23) denklemlerinde türev denklemleri yerine yazılırsa:

$$k_n\langle t,U\rangle + \tau_1\langle n_1,U\rangle + \tau_2\underbrace{\langle n_2,U\rangle}_{c_4} = 0\ , \tag{24}$$

$$\tau_2\underbrace{\langle n_\gamma,U\rangle}_{c_2} - \tau_g\langle n_1,U\rangle = 0 \tag{25}$$

elde edilir. (25) denkleminde gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\langle n_1,U\rangle = \frac{\tau_2 c_2}{\tau_g} \tag{26}$$

ve (26) denklemi (24) denkleminde yerine yazılırsa

$$\langle t,U\rangle = -\frac{\tau_1\tau_2 c_2}{k_n\tau_g} - \frac{\tau_2 c_4}{k_n}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 10. α eğrisi $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\{t,\ n_\gamma, n_1, n_2\}$ Lorentz-Darboux çatısına göre $(3,4)-$tip slant helis ise o halde, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\langle n_\gamma,U\rangle = \frac{\tau_g c_3}{\tau_2},$$

$$\langle t,U\rangle = \frac{\tau_g c_4}{k_g} + \frac{\tau_1\tau_g c_3}{k_g\tau_2}.$$

Burada c_3 ve c_4 sabitlerdir.

İspat. Kabul edelim ki $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında $\{t, n_\gamma, n_1, n_2\}$ Lorentz-Darboux çatısı ile verilen α eğrisi $(3,4)-$tip slant helis olsun. U sıfırdan farklı sabit bir doğrultu (vektör alanı) olmak üzere,

$$\langle n_1, U\rangle = c_3,$$

$$\langle n_2, U\rangle = c_4$$

yazılabilir. Yukarıdaki denklemlerin türevini alırsak:

$$\langle n_1', U\rangle = 0, \tag{27}$$

$$\langle n_2', U\rangle = 0 \tag{28}$$

elde edilir. Buradan (27) ve (28) denklemlerinde türev denklemleri yerine yazılırsa:

$$\tau_1\langle n_\gamma, U\rangle - k_g\langle t, U\rangle + \tau_g\underbrace{\langle n_2, U\rangle}_{c_4} = 0 \qquad 29)$$

$$\tau_2\langle n_\gamma, U\rangle - \tau_g\underbrace{\langle n_1, U\rangle}_{c_3} = 0 \tag{30}$$

elde edilir. (30) denkleminde gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\langle n_\gamma, U\rangle = \frac{\tau_g c_3}{\tau_2} \tag{31}$$

ve (31) denklemi (29) denkleminde yerine yazılırsa

$$\langle t, U\rangle = \frac{\tau_g c_4}{k_g} + \frac{\tau_1\tau_g c_3}{k_g\tau_2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

SONUÇ

Bu çalışmada daha önce farklı uzaylarda farklı çatılar üzerine yapılmış bazı çalışmalar incelenmiş ve bu çalışmalar daha ileri bir noktaya taşınmıştır. Ancak bu çalışmada, Minkowski 4-uzayında bulunan spacelike ve timelike hiper-düzlemler üzerinde eğriler ile ilgili teoremler ve önermeler verilmiştir. Bu uzayda Frenet vektörleri ile verilen Lorentz-Darboux çatısı kullanılarak, bazı özel slant helisleri elde edilmiştir.

Çıkar Çatışması

Makale yazarları aralarında herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan ederler.

Yazar Katkısı

Yazarlar makaleye eşit oranda katkı sağlamış olduklarını beyan eder.

KAYNAKLAR

Bruce, J. W. (1984). Curves and singularities : A geometrical introduction to singularity theory. *Cambridge University Press*, October 07, 2022. URL: http://archive.org/details/curvessingularit0000bruc. New York.

Hananoi, S., Ito, N., Izumiya, S. (2015). Spherical Darboux images of curves on surfaces. *Beitr. Zur Algebra Geom. Contrib. Algebra Geom*. 56. URL: https://doi.org/10.1007/s13366-015-0240-z.

Hayashi, R., Izumiya, S., Sato, T. (2017). Focal Surfaces And Evolutes Of Curves in Hyperbolic Space. *Commun. Korean Math. Soc.*, 32(1), 147-163.

Izumiya, S., Nabarro, A. C,, Sacramento, A. J. (2017). Horospherical and hyperbolic dual surfaces of spacelike curves in de Sitter space. *J. Singul*. URL: https://doi.org/10.5427/jsing.2017.16h.

Izumiya, S., Nabarro, A. C., Sacramento, A. J. (2015). Pseudo-spherical normal Darboux images of curves on a timelike surface in three dimensional Lorentz–Minkowski space. *J. Geom. Phys*., 97, 105-118.

Izumiya, S., Saji, K., Takahashi, M. (2010). Horospherical flat surfaces in Hyperbolic 3-space. *J. Math. Soc. Jpn*., 62(3). URL: https://doi.org/10.2969/jmsj/06230789.

Izumiya, S., Sato, T. (2013). Lightlike hypersurfaces along spacelike submanifolds in Minkowski space–time. *J. Geom. Phys*., 71, 30-52.

Nabarro, A. C., Sacramento, A. J. (2015). Focal set of curves in the Minkowski space near lightlike points. *arXiv, 27*. URL: http://arxiv.org/abs/1507.07957.

Sato, T. (2012). Pseudo-spherical evolutes of curves on a spacelike surface in three dimensional Lorentz–Minkowski space. *J. Geom*., 103(2), 319-331.

Ali, A. T., López, R., Turgut, M. (2012). k-type partially null and pseudo null slant helices in Minkowski 4-space. *Math. Commun*., 17(1), 93-103.

Bulut, F., Bektaş, M. (2020). Special helices on equiform differential geometry of spacelike curves in Minkowski space-time. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat*., 69(2), 1045-1056.

Hacısalihoğlu, H. H. (1983). Diferansiyel Geometri. *İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları*. Ankara.

O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity. *Academic Press*.

Ratcliffe, J. G. (2019). Euclidean Geometry. *Springer International Publishing*, 1-33. doi: 10.1007/978-3-030-31597-9_1.

Izumiya, S., Nabarro, A. C., Sacramento, A. J. (2021). Curves in a spacelike hypersurface in Minkowski space-time. *Osaka J. Math*., 58(4), 947-966.

Yilmaz, M. Y., Bektaş, M. (2018). Slant helices of $(k,m)-$type in E^4. *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica*, 10(2), 395-401.