GAZİOSMANPAŞA BİLİMSEL ARAŞTIRMA DERGİSİ (GBAD)
Gaziosmanpasa Journal of Scientific Research
ISSN: 2146-8168
http://dergipark.gov.tr/gbad
Araştırma Makalesi (Research Article)

Cilt/Volume : 12
Sayı/Number: 1
Yıl/Year: 2023
Sayfa/Pages: 15-23

***Alınış tarihi (Received)*:** 17.11.2022
***Kabul tarihi (Accepted)*:** 12.04.2023

İki Aralıklı Sınır Değer İletim Problemlerinin Sonlu Farklar Yöntemi ile Çözümü

Semih ÇAVUŞOĞLU[1,*] **Oktay Sh. MUKHTAROV**[2]

[1] *Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, 60150 Tokat, Türkiye*
[2]*Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 60150 Tokat, Türkiye*
**Sorumlu yazar: semihcavusoglu@gmail.com*

ÖZET: Kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç ve/veya sınır değer problemleri, matematiksel fizikte ortaya çıkan birçok somut problemin matematiksel modeli olarak ortaya çıkar. Açıktır ki, tüm problemler analitik olarak çözülemez. Bazı durumlarda verilen matematiksel fizik problemi analitik olarak çözülebilir, ancak kesin çözüm kullanımı imkansız olacak kadar karmaşık bir biçim alabilir. Bu nedenle, kesin çözüme en yakın yaklaşık çözümü bulmak için çeşitli yarı analitik ve/veya sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan biri, verilen problemin yeterli sayıda süreklilik koşuluna ve başlangıç/sınır koşullarına sahip olması koşuluyla, matematiksel fizikteki geniş bir problem sınıfına uygulanabilen Sonlu Farklar Yöntemi (SFY) olarak adlandırılır. Bu çalışmada, ana özelliği verilen sınır koşullarının yalnızca tanım alanının uçlarını değil, aynı zamanda iç tekil noktayı da içermesi olan yeni türdeki sınır değer problemlerini (SDP'ler) inceliyoruz. Bu tür problemlere sınır değer iletim problemleri (SDİP'ler) veya kısaca iletim problemleri (İP'ler) denir. Doğal olarak, İP'leri çözmek klasik SDP'lerden çok daha zordur. Klasik SFY, dahili tekil noktalarda iletim koşulları içermeyen problemleri çözmek için tasarlanmıştır. Bu çalışmanın temel amacı, yalnızca düzenli SDP'leri değil, aynı zamanda bazı dahili tekil noktalarda ek iletim koşullarını içeren iki aralıklı sınır değer problemlerini çözmek için klasik SFY'nin yeni bir modifikasyonunu geliştirmektir.

Anahtar Kelimeler – *Sonlu farklar yöntemi, iletim koşulları, iç tekil nokta, iki aralıklı sınır değer problemi*

Solution of two-interval Boundary Value Tranmission Problems with Singular Point by Finite Difference Method

ABSTRACT: Initial and/or boundary value problems for partial differential equations arise as mathematical model of wide class of problems appearing in mathematical physics. Evidently not all problems can be solved analytically. In some cases the given mathematical physics problem can be solved analytically, but the implicit form of the exact solution may take such a complex form that it is useless to use. Therefore various semi-analytical and/or numerical methods are important tools for finding an approximate solution that is closest to the exact solution. One of them is the so-called Finite Difference Method (FDM) which can be applied to a wide class of problems in mathematical physics, provided that the given problem has sufficient number of continuity conditions and initial/boundary conditions. In this paper, we study boundary value problems (BVP's) of a new type, the main feature of which is that the given boundary conditions (BC's) include not only the ends of the domain of definition, but also internal singular point. Such problems called boundary value-transmission problems (BVTP's) or briefly transmission problems (TP's). Naturally, TP's are much more difficult to solve than classical BVP's. The classical FDM is designed to solve problems without transmission conditions at internal singular points. The main purpose of this work is to develop a new modification of the classical FDM for solving not only regular BVP's, but also two-interval boundary value problems that include additional transmission conditions specified at some internal singular point.

Keywords – *Finite difference method, transmission conditions, interior singular point, two-interval boundary value problem*

1. Giriş

Adi ve kısmi diferansiyel denklemler, fizik, mühendislik ve diğer doğa bilimleri dallarında birçok problemin matematiksel modeli olarak ortaya çıkmaktadır. Bu denklemlerin çoğunun gerçek çözümlerini bulmak çok zor hatta imkansızdır. Bu nedenle Runge-Kutta yöntemi, Galerkin yöntemi, Sonlu Farklar yöntemi, Diferansiyel Dönüşüm yöntemi, Adomian Ayrıştırma yöntemi, Homotopi Pertürbasyon yöntemi, Varyasyonel Yineleme yöntemi vb. gibi çeşitli yarı analitik ve sayısal yöntemler, gerçek çözümleri bilinmeyen birçok tipte lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için önemli araçlardır (Ascher ve ark., 1994; Burden ve Faires, 1997; Kincaid ve ark., 2009; LeVeque, 2007).

Sonlu Farklar Yöntemi (kısaca SFY), çeşitli türdeki adi ve kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için basit ama etkili yöntemlerden biridir.

Bu yöntem, L. Euler tarafından adi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmış ve C. Runge tarafından kısmi diferansiyel denklemlere genişletilmiştir. 1950'lerin başlarından beri SFY, fizikteki bazı problemleri sayısal olarak çözmek için kullanılmıştır. Bu yöntemin ana fikri, diferansiyel denklemlerde yer alan adi ve kısmi türevleri, bunlara yaklaşan ve sonlu farklar olarak adlandırılan cebirsel ifadelerle değiştirmesidir. Bu yöntemin önemi bilgisayarların ortaya çıkmasıyla daha da artmıştır. Daha sonra SFY'nin yakınsaması ve verimliliği ile ilgili birçok önemli teorik sonuç elde edilmiştir (Kincaid ve ark., 2009; Pandey, 2019).

Tekil noktalara ve ek iletim koşullarına sahip iki aralıklı SDP'ler, yüklü sicimlerin titreşmesi problemlerinin, kırınım problemlerinin, elektrik devresi problemlerinin, ısı ve kütle transferi problemlerinin ve ısıl iletim problemlerinin matematiksel modeli olarak ortaya çıkmaktadır.

Bazı tekil noktalarda ek iletim koşullarını içeren SDP'lerin bazı teorik yönleri son yıllarda özel bir ilgi alanı olmuştur (Aydemir, 2022; Aydemir ve Mukhtarov, 2019, 2021; Çavuşoğlu ve Mukhtarov, 2021,2022; Mukhtarov ve ark.,2022; Muhtarov ve Çavuşoğlu, 2021, 2022; Olğar ve ark, 2018, 2022; Şen ve Štikonas, 2022; Uğurlu ve Taş, 2021; Yücel ve Mukhtarov,2019).

Klasik SFY'nin ek iletim koşullarına sahip iki aralıklı SDP'lere doğrudan uygulanamayacağı açıktır. Bu çalışmanın ana amacı, klasik SFY'nin tekil noktalara ve ek iletim koşullarına sahip iki aralıklı SDP'lere de uygulanabilen yeni bir modifikasyonunu geliştirmektir.

2. İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem için Sonlu Farklar Metodu

SFY adı verilen sayısal yöntemin ana fikri, diferansiyel denklemdeki türevlerin sonlu farklarla değiştirilmesine dayanmaktadır. Bu yöntem uygulandığında diferansiyel denklem, bilgisayar tarafından çözülebilen bir lineer cebirsel denklem sistemine indirgenir. Bunu açıklamak için

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in [a, b] \tag{1}$$

ikinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklemi

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \tag{2}$$

ayrılmış sınır koşulları ile birlikte ele alalım. Burada $p(x), q(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında süreklidir ve $\alpha,\ \beta$ gerçek sayılardır.

$(1)-(2)$ sınır değer problemini ayrıklaştırmak için $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ tanım aralığı $[x_{j-1}, x_j]$, $(j=0,1,\ldots,N)$ şeklinde sonlu sayıda aralıklara bölünür.
Burada

$$x_j = a + jh, \quad (j=0,1,\ldots,N), \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

Taylor açılımından yararlanarak

$$y(x_j + h) = y(x_j) + y'(x_j)h + O(h^2) \tag{3}$$

eşitliği elde edilir. Birinci mertebeden türevin ileri sonlu fark yaklaşımı

$$y'(x_j) \approx \frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h}$$

biçiminde tanımlanır. Benzer şekilde birinci mertebeden türevin geri sonlu fark yaklaşımı

$$y'(x_j) \approx \frac{y(x_j) - y(x_{j-1})}{h}$$

biçiminde tanımlanır. İleri ve geri sonlu fark yaklaşımından

$$y'(x_j) \approx \frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1})}{2h}$$

biçiminde birinci mertebeden türevin merkezi sonlu fark yaklaşımı elde edilir. İleride

$$D_+ y(x) := \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$$D_- y(x) := \frac{y(x) - y(x-h)}{h}$$

$$D_0 y(x) := \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} \tag{5}$$

gösterimlerinden yararlanacağız. Benzer teknik kullanılarak ikinci türev için

$$y''(x_j) \approx \tfrac{1}{h}\left(D_+ y(x_j) - D_- y(x_j)\right) = \tfrac{1}{h^2}\left(y(x_j+1) - 2y(x_j) + y(x_j-1)\right) \tag{6}$$

sonlu fark yaklaşımı bulunur. (5)-(6) sonlu farklar yaklaşımları (1)-(2) sınır değer probleminde yerine koyarsak verilen sınır değer probleminin aşağıdaki sonlu fark yaklaşımını elde ederiz.

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + q_j y_j = f_j, \quad j = 1, \ldots, N-1$$

Burada $y_j, p_j, q_j\ ve\ f_j$ gösterimleri sırasıyla $y(x_j), p(x_j), q(x_j)\ ve\ f(x_j)$ için kullanılır
Böylece, $y_0, y_1, \ldots, y_N$ değişkenlerine göre aşağıdaki lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{cases} (-p_j h + 2)y_{j-1} + (2q_j h^2 - 4)y_j + (p_j h + 2)y_{j+1} = 2h^2 f_j \\ \qquad j = 1,2,\ldots,N-1 \end{cases}$$

(2) sınır değer koşulları ile

$$y_0 = \alpha, \quad y_N = \beta$$

elde edilir. Böylece (1)-(2) denklemlerini

$$AY = B \tag{7}$$

matris denklem formunda yazabiliriz. Burada A matrisi ile Y ve B vektörleri aşağıdaki biçimdedir.

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} 2q_i h^2 - 4 & i = j \\ p_i h + 2 & i = j - 1 \\ -p_i h + 2 & i = j + 1 \\ 0 & |\, i - j \,| \geq 2 \end{cases}$$

$$Y^T = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N-1})$$

$$(b_j) = \begin{cases} 2h^2 f(x_j) + (p_i h - 2) & i = 1 \\ 2h^2 f(x_j) & 1 < i \leq N - 2 \\ 2h^2 f(x_j) + (p_i h - 2)\beta & i = N - 1 \end{cases}$$

A matrisi tridiagonal olduğundan, Crout veya Cholesky algoritması ile verimli bir şekilde çözülebilir.

3. Sınır Değer Geçiş Probleminin Çözümü

(1)-(2) sınır değer probleminin $x = c$ iletim noktasında verilmiş

$$y(c - 0) = \theta y(c + 0) \tag{8}$$

ve

$$y'(c - 0) = \gamma y'(c + 0) \tag{9}$$

iletim koşullarını da sağlayan çözümünü araştıralım.
$[a, b]$ tanım aralığını $x_j = a + jh,\ (j = 0,1, \dots, N)$ grid noktalarına göre N eşit alt aralıklara bölelim. Burada $h = \frac{b-a}{N}$ ağ genişliği yani ardışık grid noktaları arasındaki mesafedir. $p_j, q_j\ ve\ f_j$ değerleri $x = x_j$ grid noktasında $p, q\ ve\ f$ fonksiyonlarının belirtilen sırasıyla data değerleridir. y_j ise x_j grid noktasında $y(x)$ çözümünün yaklaşık değeridir.
Şimdi, sınır-değer-geçiş probleminin $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}, y_N$ değerlerinden oluşan sayısal çözümünü hesaplayacağız.
(2) sınır koşullarından

$$y_0 = \alpha,\ y_N = \beta$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde (8)-(9) iletim koşullarından

$$y(c - 0) \approx y(x_k), \quad y(c + 0) \approx y(x_{k+1})$$

$$y'(c - 0) \approx \frac{y(x_k) - y(x_{k-1})}{h}, \qquad y'(c + 0) \approx \frac{y(x_{k+2}) - y(x_{k+1})}{h}$$

yaklaşık değerleri bulunur. Yeterince büyük N için ve $x_k\ ve\ x_{k+1}$ noktalarında sonlu fark yaklaşımı kullanarak, iletim şartlarından

$$y_k = \theta y_{k+1}, \qquad \frac{1}{h}(y_k - y_{k-1}) = \frac{\gamma}{h}(y_{k+2} - y_{k+1})$$

elde edilir. Sonuç olarak, $y_1,\ y_2, \dots, y_N$ bilinmeyenleri için elde edilen lineer cebirsel denklemimiz aşağıdaki biçimde bulunur.

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{p_j h}{2}\right)y_{j-1} + \left(-2+q_j h^2\right)y_j + \left(1+\dfrac{p_j h}{2}\right)y_{j+1} = h^2 f_j & j = 1,2,\dots,k-1 \\ y_j - \theta y_{j+1} = 0 & j = k \\ -y_{j-1} + y_j + \gamma y_{j+1} - \gamma y_{j+2} = 0 & j = k+1 \\ \left(1-\dfrac{p_j h}{2}\right)y_{j-1} + \left(-2+q_j h^2\right)y_j + \left(1+\dfrac{p_j h}{2}\right)y_{j+1} = h^2 f_j & j = k+2,\dots,N-1 \end{cases}$$

Bu lineer cebirsel denklem sisteminin çözümü Matlab/Octave veya Mathematica gibi programlar kullanılarak bulunabilir.

4. Yöntemin Yakınsaklığı

Bir diferansiyel denklemi çözmek için yaklaşık yöntem uygulandığında, sayısal çözümün ayrık değerlerinin gerçek çözüme ne kadar yakın olduğunu bilmek çok önemlidir.

Tanım 1. $x_1, x_2, \dots, x_n$ grid noktalarında $\mathrm{Y} = (\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \dots, \mathrm{Y}_\mathrm{n})$ sonlu fark çözümünün ve $y = \big(y(x_1),\ y(x_2), \dots, y(x_n)\big)$ gerçek çözümünün değerleri olmak üzere

$$E = \big(Y_1 - y(x_1), Y_2 - y(x_2), \dots, Y_n - y(x_N)\big) = Y - y$$

ifadesine global hata vektörü denir. Amacımız, bu hata vektörünün normu ile ilgili olarak kabul edilebilir bir üst sınır bulmaktır.

Tanım 2. $\parallel \tilde{E} \parallel_\infty = max_{1\le i\le n} \mid y_i - y(x_i) \mid$ ve $h \coloneqq max_{1\le i\le n}(x_{i+1} - x_i)$ olmak üzere, eğer $h \rightarrow \infty$ iken $\parallel \tilde{E} \parallel_\infty$ sıfıra yaklaşıyorsa sonlu farklar metodu yakınsaktır denir.

5. SFY'nin Sınır Değer İletim Problemlerine Uygulanması

Örnek: Şimdi

$$y'' - 2(x-1)y' + ((x-1)^2 - 1)y = 0, \quad x \in [-1,1] \tag{10}$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini

$$\mathrm{y}(-1) = 0, \quad \mathrm{y}(1) = 2 \tag{11}$$

sınır değer koşulları ile ele alalım. $\mathrm{N} = 32$ için $h = \frac{2}{32}$ ve $\mathrm{x_i} = 1 + \mathrm{ih}$, $(\mathrm{i} = 0,1,\dots,32)$ olmak üzere (11) sınır koşullarından $\mathrm{x_0} = 0,\ \mathrm{x_{32}} = 2$ olmak üzere $\mathrm{y_0} = 0,\ \mathrm{y_{32}} = 2$ bulunur.

(5)-(6) sonlu fark açılımları (10) denkleminde yerine yazılarak

$$\big(2 + 2\mathrm{h}(\mathrm{x_i} - 1)\big)\mathrm{y_{i-1}} + \big(-4 + 2\mathrm{h}^2((\mathrm{x_i} - 1)^2 - 1)\big)\mathrm{y_i} + \big(2 - 2\mathrm{h}(\mathrm{x_i} - 1)\big)\mathrm{y_{i+1}} = 0, \quad \mathrm{i} = 1,2,\dots,31$$

biçiminde $\mathrm{y_1}, \mathrm{y_2}, \dots, \mathrm{y_{31}}$ değişkenlerine göre lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Lineer cebirsel denklemler sistemi

$$\mathrm{AY} = \mathrm{B}$$

tridiagonal matris-vektör formunda yazılabilir. Burada

$$A = \begin{pmatrix} -4 + 2h^2((x_1 - 1)^2 - 1) & 2 - 2h(x_1 - 1) & \dots & 0 \\ 2 + 2h(2 - 1) & -4 + 2h^2((x_2 - 1)^2 - 1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 - 2h(x_{31} - 1) \end{pmatrix}$$

$$Y^T = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_{31})$$

ve

$$B^T = (0, 0, 0, \dots, 4h(x_{31} - 1) - 4)$$

biçimde elde edilir.

Bu sistemin çözümü MATLAB-Octave kullanılarak elde edildi ve elde edilen sayısal SFY çözümleri, gerçek çözüm ile grafiksel olarak karşılaştırıldı (bakınız, Şekil 1,2,3 ve 4).

Şimdi (1)-(2) sınır değer problemini

$$y(0^-) = 3y(0^+), \quad y'(0^-) = 2y'(0^+) \tag{12}$$

iletim şartları ile inceleyeceğiz. $N = 64$ seçer ve (12) iletim koşullarını uygularsak, o zaman iki ek cebirsel denklemimiz olur. y_{32} değeri $x = 0$'a en yakın noktada hesaplandığı ve $x = 0$'ın solunda kaldığı için, $y_{32} \approx y(0^-)$ ve benzer şekilde y_{33} değeri $x = 0$' a en yakın noktada hesaplandığı için ve $x = 0$'ın sağında yer aldığı için, $y_{33} \approx y(0^+)$ ile tanımladık. Böylece (12)'den

$$y_{32} - 3y_{33} = 0 \tag{13}$$

$$y_{30} - y_{32} - 2y_{33} + 2y_{35} = 0 \tag{14}$$

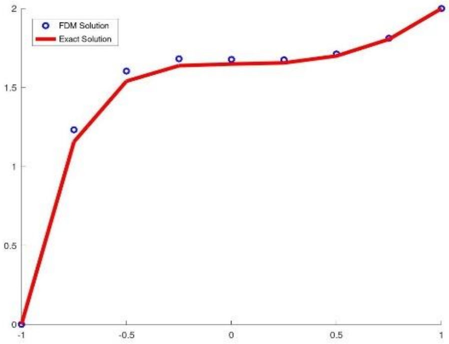
eşitlikleri elde edilir. (10)-(11) denklem sistemlerine (13)-(14) denklemleri eklenerek,

$$MY = B$$

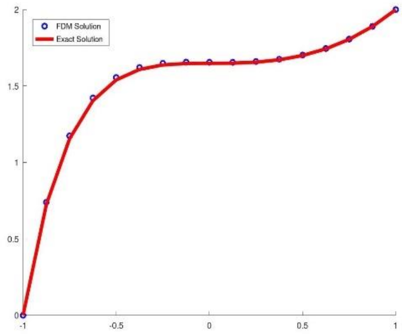
formunda bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer cebirsel denklem sisteminin çözümü Octave kullanılarak elde edildi.

6. Bulgular ve Tartışma

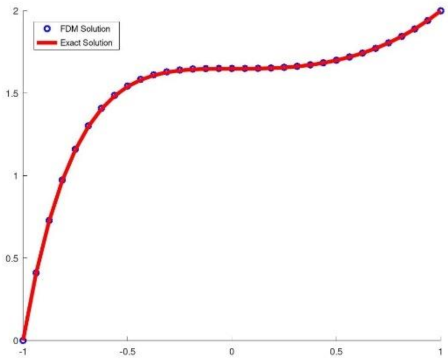
Bu kesimde ilk olarak (10)-(11) tek aralıklı SDP'nin sonlu fark çözümü tam çözümle grafiksel olarak karşılaştırılmıştır (bakınız, Şekil 1,2,3 ve 4), daha sonra ise (10)-(12) sınır değer iletim probleminin sonlu fark çözümü aynı problemin tam çözümü ile grafiksel olarak karşılaştırılmıştır (bakınız, Şekil 5, 6, 7 ve 8).



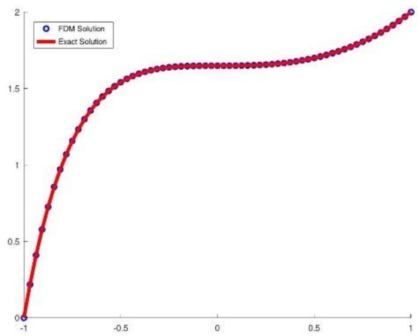
Şekil.1 Problem (10)-(11)’in N=8 için SFY çözümü ve gerçek çözümü
Figure.1 FDM-solution and exact solution of problem (10)-(11) for N=8



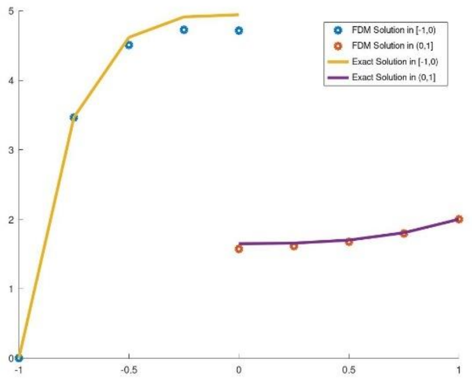
Şekil.2 Problem (10)-(11)’in N=16 için SFYçözümü ve gerçek çözümü
Figure.2 FDM-solution and exact solution of problem (10)-(11) for N=16



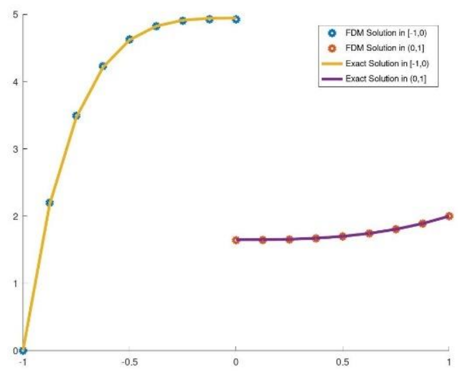
Şekil.3 Problem (10)-(11)’in N=32 için SFY çözümü ve gerçek çözümü
Figure.3 FDM-solution and exact solution of problem (10)-(11) for N=32



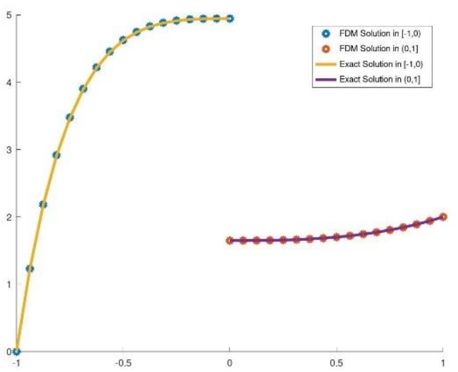
Şekil.4 Problem (10)-(11)’in N=64 için SFY çözümü ve gerçek çözümü
Figure.4 FDM-solution and exact solution of problem (10)-(11) for N=64



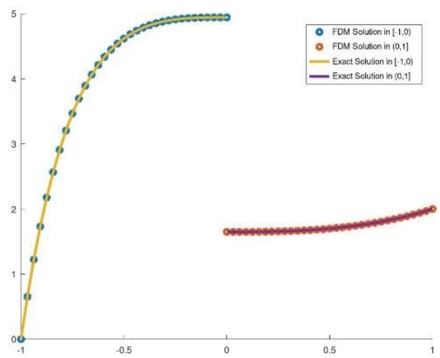
Şekil.5 Problem (10)-(12)'in N=8 için SFY çözümü ve gerçek çözümü
Figure.5 FDM-solution and exact solution of problem (10)-(12) for N=8



Şekil.6 Problem (10)-(12)'in N=16 için SFY çözümü ve gerçek çözümü
Figure.6 FDM-solution and exact solution of problem (10)-(12) for N=16



Şekil.7 Problem (10)-(12)'in N=32 için SFY çözümü ve gerçek çözümü
Figure.7 FDM-solution and exact solution of problem (10)-(12) for N=32



Şekil.8 Problem (10)-(12)'in N=64 için SFY çözümü ve gerçek çözümü
Figure.8 FDM-solution and exact solution of problem (10)-(12) for N=64

7. Sonuç

Standart SFY'de N değeri ne kadar büyük seçilirse h adım aralığı o kadar sıfıra yaklaşacaktır. Elde edilen A katsayılar matrisi $(\mathrm{N}-1)\times(\mathrm{N}-1)$ boyutunda tridiagonal matristir. Böylece hesaplanan yaklaşık çözümler gerçek çözüme yakınsar.

Araştırdığımız geçiş şartları içeren sınır değer problemleri için SFY'de ise A katsayılar matrisi artık $(\mathrm{N}-1)\times(\mathrm{N}-1)$ boyutunda değil geçiş şartlarından elde edilecek iki adet denklemle beraber $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$ boyutunda olacaktır. Ayrıca A matrisi tridiagonal olmayacaktır.

Bu çalışmamızda SFY literatürde ilk defa iletim koşulları içeren iki aralıklı problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar Şekil 5,6,7,ve 8'de grafiksel olarak gösterilmiştir. Böylece SFY'nin iletim şartları içeren SDP'lerine de uygulanabilirliği esaslandırılmıştır.

8. Kaynaklar

Ascher, U. M., Mattheij R. M. M., and Russell R. D., 1994. Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations, Vol. 13, Siam.

Aydemir, K., 2022.Green's Function and Carleman's Formula for Transmission Problems. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 45, 3277–3291. https://doi.org/10.1007/s40840-022-01379-w

Aydemir, K., Mukhtarov, O. S. ,2021. Spectrum of periodic Sturm-Liouville problems involving additional transmission conditions. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2, 1-12.

Burden, R. L., Faires, J. D., 1997. Numerical Analysis, Brooks, Cole Pub. Co., Pacific Grove, California, 609.

Cavusoglu, S., Mukhtarov, O. S., 2022. A new treatment of the finite difference method for 2-interval Sturm-Liouville problems. Mathematics in Engineering, Science & Aerospace (MESA), 13(1).

Çavuşoğlu, S., Mukhtarov, O. S., 2021. A new finite difference method for computing approximate solutions of boundary value problems including transition conditions. Вестник Карагандинского университета. Серия: Математика, (2), 54-61.

Çavuşoğlu, S., Mukhtarov, O., 2022.Modified Finite Difference Method for solution of two-interval boundary value problems with transition conditions. Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 14(1), 98-106.

Kincaid, D., Kincaid, D. R., Cheney, E. W., 2009. Numerical analysis: mathematics of scientific computing (Vol. 2), American Mathematical Soc.

LeVeque, R. J. , 2007, Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems, Society for Industrial and Applied Mathematics,.

Mukhtarov, O. S., Yücel, M., Aydemir, K., 2020. Treatment a new approximation method and its justification for Sturm–Liouville problems. Complexity.

Mukhtarov, O. S., Cavusoglu, S., Pandey, P. K., 2021. Development of the Finite Difference Method to solve a new type Sturm-Liouville problems, Tbilisi Mathematical Journal, 14(3),141-154.

Mukhtarov, O. S., Aydemir, K., 2022. Spectral Analysis of α-Semi Periodic 2-Interval Sturm-Liouville Problems. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 21(3), 1-14.

Olğar, H., Muhtarov, F. S., Mukhtarov, O. S.,2018. Lower bound estimation for eigenvalues for many interval BVP's with eigenparameter dependent boundary conditions. In AIP Conference Proceedings (Vol. 1997, No. 1, p. 020037). AIP Publishing LLC

Olğar, H., Mukhtarov, O. S., Muhtarov, F. S., Aydemir, K. ,2022. The weak eigenfunctions of boundary- value problem with symmetric discontinuities. Journal of Applied Analysis.

Pandey, P.,2019. A Consistent and Accurate Numerical Method for Approximate Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems. International Journal of Mathematical Modelling & Computations, 9(2 (SPRING)), 149-154.

Şen, E., Štikonas, A., 2022. Computation of eigenvalues and eigenfunctions of a non-local boundary value problem with retarded argument. Complex Variables and Elliptic Equations, 67(7), 1662-1676.

Ugurlu, E., Tas, K., 2021. Dependence Of Eigenvalues Of Some Boundary Value Problems. Applied Mathematics E-Notes, 21, 81-88.

Yücel, M., Mukhtarov, O., 2019. Application of differential transform method and Adomian decomposition method for solving of one nonlinear boundary-value-transmission problem. In AIP Conference Proceedings (Vol. 2183, No. 1, p. 090011). AIP Publishing LLC.