Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi https://dergipark.org.tr/sdufeffd
Süleyman Demirel University Faculty of Arts and Sciences Journal of Science e-ISSN: 1306-7575
Research Article, 2023, 18(2): 28-40, DOI: 10.29233/sdufeffd.1218389

Berezin Yarıçapı İçin Diğer Eşitsizlikler

Hamdullah Başaran[1,*], Mehmet Gürdal[2]

[1]Department of Mathematics, Faculty of Science and Arts, Suleyman Demirel University, 32260, Isparta, TÜRKİYE
https://orcid.org/0000-0002-9864-9515
** yazışılan yazar: 07hamdullahbasaran@gmail.com*
[2]Department of Mathematics, Faculty of Science and Arts, Suleyman Demirel University, 32260, Isparta, TÜRKİYE
https://orcid.org/-0003-0869-1869

(Alınış / Received: 13.12.2022, Kabul / Accepted: 15.02.2023, Yayımlanma / Published: 22.06.2023)

Öz: İşlevsel Hilbert uzayları, istatistik, yaklaşım teorisi, grup temsili teorisi, vb. dahil olmak üzere birçok alanda ortaya çıkar. İşlevsel Hilbert uzay sayesinde tanımlanan Berezin dönüşümü ise, düzgün fonksiyonları analitik fonksiyonların Hilbert uzayları üzerindeki operatörlerle ilişkilerini inceler. Berezin yarıçapını ve Berezin normunu karakterize etmek için bazı çalışmalarda birçok eşitsizlik ve bunların özellikleri vardır. Bu çalışmada fonksiyonel bir Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan sınırlı lineer operatörlerin Berezin normu ve Berezin sayısı için yeni eşitsizlikler sunulmuştur. Bu makalenin benzersizliği veya yeniliği, iki operatör için yeni Berezin sayıları tahminlerinden oluşmaktadır. Bu tahminler, diğer benzer makaleler tarafından elde edilen Berezin sayılarının üst sınırlarını iyileştirmiştir. Daha sonra El-Haddad and Kittaneh ([10]) tarafından verilen eşitsizlik genelleştirilmiş ve iyileştirilmiştir. Bu çalışmada fikir ve sunulan metodolojiler, bu alanda gelecekteki araştırmalar için bir başlangıç noktası olarak hizmet edebilir.

Anahtar kelimeler: Berezin dönüşümü, Berezin kümesi, Berezin sayısı, Konveks fonksiyon, Süperkuadratik fonksiyon.

Further Inequalties For The Berezin Radius

Abstract: Functional Hilbert spaces are encountered in a variety of fields, including statistics, approximation theory, group representation theory, and so on. Smooth functions are associated with operators on Hilbert spaces of analytic functions through the Berezin transform defined by functional Hilbert space. We present new inequalities for the Berezin norm and Berezin number of limited linear operators defined on a functional Hilbert space in this study. We discovered various inequalities and their features in some papers to characterize the Berezin number and the Berezin norm. This article's originality or novelty consists of fresh Berezin number estimations for two operators. These estimates improve on the upper bounds of the Berezin numbers found in previous studies. The inequality given by El-Haddad and Kittaneh ([10]) is then improved and generalized after that. The concepts and approaches offered in this paper may serve as a starting point for future research in this field.

Key words: Berezin transform, Berezin set, Berezin number, Convex function, Superquadratic function.

1. Giriş

Operatör teorisi ile ilgili literatürde, bir operatörün Berezin normu ve Berezin sayısı mühendislik, kuantum hesaplama, kuantum mekaniği, sayısal analiz, diferansiyel denklemler vb. alanlardaki birçok uygulaması için incelenmiştir. Berezin sayısını ve Berezin normunu karakterize etmek için, önce bir Hilbert uzayında sınırlı lineer operatörlerin bazı kavramlarını ve özelliklerini sunuyoruz.

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ cebiri bir $\mathcal{H}$ karmaşık Hilbert uzay üzerinde $\langle .,. \rangle$ iç çarpım ile tüm sınırlı lineer operatörlerin C^*-cebiri olsun. Eğer her $x \in \mathcal{H}$ için $\langle Px, x \rangle \geq 0$ ise $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operatörüne pozitif denir ve $P \geq 0$ biçiminde yazılır. Eğer kendine eş P ve R operatörü için her $x \in \mathcal{H}$ için $\langle Px, x \rangle \geq \langle Rx, x \rangle$ ise $P \geq R$ olur. Aynı zamanda bazı m ve M skalerleri ve her $x \in \mathcal{H}$ için $m\langle x, x \rangle \leq \langle Px, x \rangle \leq M\langle x, x \rangle$ ise $m \leq P \leq M$ biçiminde yazabiliriz. Burada P nın mutlak değeri $|P| = (P^*P)^{\frac{1}{2}}$ ile gösterilir.

Bir $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ fonksiyonel Hilbert uzayı nokta değerlendirmeleri sürekli, yani her bir $\lambda \in \Omega$ için $f \to f(\lambda)$ dönüşümü $\mathcal{H}$ üzerinde bir sürekli lineer fonksiyonel özelliğine sahip Ω kümesi üzerinde karmaşık değerli fonksiyonların bir Hilbert uzayıdır. Bu ise Riesz teoremine göre her bir $\lambda \in \Omega$ ve $f \in \mathcal{H}$ için $f(\lambda) = \langle f, \widehat{K}_\lambda \rangle$ olacak şekilde bir tek $\widehat{K}_\lambda \in \mathcal{H}$ elemanının mevcut olduğunu garantiler. $\{\widehat{K}_\lambda : \lambda \in \Omega\}$ ailesi $\mathcal{H}$'nin çekirdeğinin üreteni adını alır. Eğer $\{e_n\}$ bazı $\mathcal{H}$ fonksiyonel Hilbert uzay için bir ortogonal baz ise o zaman $\mathcal{H}$'nin çekirdek üreteni $\widehat{K}_\lambda = \sum_n \overline{e_n(\lambda)}\, e_n(z)$ ile verilir. $\lambda \in \Omega$ için $K_\lambda = \frac{\widehat{K}_\lambda}{\|\widehat{K}_\lambda\|}$ ifadesi $\mathcal{H}$'nin normalleştirilmiş çekirdeği üreteni olsun. $\mathcal{H}$ üzerinde P sınırlı lineer bir operatörü için $\widetilde{P}(\lambda) \coloneqq \langle PK_\lambda, K_\lambda \rangle$ ile Ω kümesi üzerinde tanımlı $\widetilde{P}$ fonksiyonu P nin Berezin sembolüdür ([3]). P operatörünün Berezin küme ve Berezin sayısı sırasıyla

$$\mathbf{Ber}(\mathrm{P}) = \{\widetilde{P}(\lambda) : \lambda \in \Omega\}\ ve\ \mathbf{ber}(\mathrm{P}) = \left\{\left|\widetilde{P}(\lambda)\right| : \lambda \in \Omega\right\} \quad (1)$$

ile tanımlanır (bkz. [22]). $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$'nın numerik yarıçapı

$$w(P) \coloneqq sup\{|\langle Px, x \rangle| : x \in \mathcal{H}(\Omega)\ ve\ \|x\| = 1\} \quad (2)$$

ile tanımlıdır. Her $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ için $\boldsymbol{ber}(P) \leq w(P) \leq \|T\|$ olduğu bilinen bir gerçektir. Hilbert uzay operatörlerinin sayısal yarıçap eşitsizliklerine ilişkin son katkılar [9]'da ve oradaki referanslarda bulunabilir. Hilbert uzaylarındaki bazı operatörlerin özellikleri [18, 21]'te bulunabilir.

Ayrıca Berezin sembolü kavramı Hardy ve Bergman uzayları üzerinde Toeplitz ve Hankel operatörleri için detaylı incelenmiştir. O analizin çeşitli sorularında geniş uygulamalara sahiptir. Berezin sembolü hakkında diğer bilgiler için [4, 5, 6, 7, 8, 14, 15, 16, 17, 23, 24, 28] çalışmalarına ve referanslarına bakılabilir.

Bu makalenin benzersizliği veya yeniliği, çekirdek Hilbert uzayını yeniden üretmeye etki eden farklı sınırlı lineer operatör türlerinin Berezin sayısı ve Berezin normunun yeni tahminlerinden oluşur. Bu tahminler, diğer benzer makaleler tarafından elde edilen Berezin sayılarının üst sınırlarını iyileştirir.

Bu makale şu şekilde düzenlenmiştir: Bölüm 2'de, ana sonuçlarımızı oluşturmak için gerekli olan bazı önermeler toplanmıştır. Bölüm 3'te, operatörlerin çeşitli Berezin sayısı ve norm eşitsizliklerini içeren ana sonuçlarımızı sunuyoruz. Özellikle iki operatörün toplamı için yeni bir tahmin sağlanmıştır. Daha sonra El-Haddad and Kittaneh ([10]) tarafından verilen

$$\|P+R\|^2 \leq \||P|^2+|R|^2\| + \||P^*|^2+|R^*|^2\| \quad (3)$$

eşitsizliği genelleştirilmiş ve iyileştirilmiştir. Özel durumda $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $r \geq 2$ ve f süperkuadratik fonksiyonu için

$$f\big(ber(P)\big) \leq \left\| f(|P|) - inf_{\lambda\in\Omega} f\left(\left||P| - \boldsymbol{ber}(P)\right|^{\frac{1}{2}} K_\lambda\right) \right\|_{ber}^2 \quad (4)$$

eşitsizliği ispatlanmıştır. Bu amaçlar için [26] çalışmasından bazı metotlar uygulanmıştır.

2. Materyal and Metot

Bu bölümde, bu makaledeki amacımıza ulaşmak için kullanılacak olan bazı iyi bilinen faydalı Yardımcı teoremler ve gerekli notasyonlar toplanmıştır.

Pozitif tersinebilir P operatörü, pozitif R operatörü ve $0 < \upsilon < 1$ için ağırlıklı operatör aritmetik ortalama ∇_ν ve geometrik ortalama $\sharp_\upsilon$ aşağıdaki

$$P\nabla_\nu R = (1-\upsilon)P + \upsilon R \text{ ve } P \sharp_\upsilon R = P^{\frac{1}{2}}\left(P^{-\frac{1}{2}}RP^{-\frac{1}{2}}\right)^{\upsilon} P^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

ile tanımlanır. Eğer $\upsilon = \frac{1}{2}$ ise aritmetik ve geometrik ortalama sırasıyla ∇ ve $\sharp$ ile tanımlanır.

Huban vd. ([20]) herhangi $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, için

$$\boldsymbol{ber}(P) \leq \frac{1}{2}\||P|+|P^*|\| \leq \frac{1}{2}\left(\|P\| + \|P^2\|^{\frac{1}{2}}\right) \quad (6)$$

ve

$$\boldsymbol{ber}^r(P) \leq \frac{1}{2}\left\||P|^{2r\upsilon} + |P^*|^{2(1-\upsilon)r}\right\|, r \geq 1, 0 < \upsilon < 1 \quad (7)$$

eşitsizliklerini ispatlamıştır. Daha sonra Huban vd. (bkz. [19]) çalışmasında

$$\boldsymbol{ber}^r(P^*R) \leq \frac{1}{2}\||P|^{2r} + |R|^{2r}\|, r \geq 1 \quad (8)$$

eşitsizliğini vermiştir. Diğer taraftan Taghavi vd. ([27]) ise

$$\boldsymbol{ber}^r(P^*XR) \leq \frac{1}{2}\left\|\left(P^*|X|^{2(1-\upsilon)}P\right)^r + (R^*|X|^{2\upsilon}R)^r\right\|, r \geq 1, \qquad 0 < \upsilon < 1 \tag{9}$$

sonucunu elde etmiştir.

Şimdi ihtiyaç duyulan bazı yararlı Yardımcı teoremler verilebilir.

Yardımcı Teorem 1 ([9]). $x, y, z \in \mathcal{H}$ olsun. Bu durumda

$$|\langle z, x\rangle|^2 + |\langle z, y\rangle|^2 \leq \|z\|^2 max(\|x\|^2\|y\|^2) + |\langle x, y\rangle| \tag{10}$$

sağlanır.

Yardımcı Teorem 2 ([21]). $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ve $x, y \in \mathcal{H}$ herhangi vektörler olsunlar. Eğer, f g, $f(t)\ g(t) = t$, $(t \geq 0)$, bağıntısını sağlayan $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyonlarsa, bu durumda

$$|\langle Px, y\rangle| \leq \|f(|P|)x\|\|f(|P^*|)y\| \tag{11}$$

eşitsizliği elde edilir.

Yardımcı Teorem 3 ([25]). Eğer f, P kendine eş operatörün spektrumunu içeren J gerçel aralığında konveks fonksiyonsa, o zaman herhangi bir $x, y \in \mathcal{H}$ için,

$$f(\langle Px, x\rangle) = \langle f(P)x, x\rangle \tag{12}$$

olur ve f konkavsa ters eşitsizlik elde edilir.

Yardımcı Teorem 4 ([2]).f, $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan azalmayan konveks fonksiyon ve $P, R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ pozitif operatör olsunlar. O zaman herhangi bir $0 < \upsilon < 1$ için,

$$\left\|f\left((1-\upsilon)P + \upsilon R\right)\right\| \leq \|(1-\upsilon)f(P) + \upsilon f(R)\| \tag{13}$$

sağlanır.

Yardımcı Teorem 5 ([12,13]). $a, b > 0$ ve $min\{a, b\} \leq m \leq M \leq max\{a, b\}$ bağıntısını sağlayan m, M pozitif gerçel sayılar olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\frac{M+m}{2\sqrt{Mm}}\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \tag{14}$$

olur.

$f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $s \geq 0$ için, her $t \geq 0$ için

$$f(|t-s|) + C_s(t-s) + f(s) \leq f(t) \tag{15}$$

olacak şekilde $C_s \in \mathbb{R}$ sabiti varsa f fonksiyonuna süperkuadratik fonksiyon denildiği hatırlanabilir.

Yardımcı Teorem 6 ([1]). f süperkuadratik ve negatif olmayan fonksiyon olsun. O zaman f fonksiyonu konveks ve artan fonksiyondur. Ayrıca, eğer C_s sabiti (15) eşitsizliğinde olduğu gibi ise, o zaman $C_s \geq 0$ dır.

3. Bulgular

Bu makaledeki ilk sonucumuz şu şekildedir:

Teorem 1. $P, R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$olsun. O zaman

$$\boldsymbol{ber}^2(P+R) \leq \frac{1}{2}[\||P^*|^2 + |R^*|^2\|_{ber} + ber(|P^*|^2 - |R^*|^2)] + ber(RP^*) + 2\boldsymbol{ber}(P)\boldsymbol{ber}(R) \tag{16}$$

elde edilir.

İspat. K_λ normalleştirilmiş çekirdeğin üreteni olsun. (10) numaralı eşitsizlikte $x = P^*K_\lambda$, $y = R^*K_\lambda$ve $z = K_\mu$ alınarak

$$\left|\langle K_\mu, P^*K_\lambda\rangle\right|^2 + \left|\langle K_\mu, R^*K_\lambda\rangle\right|^2 \leq \left\|K_\mu\right\|^2 max(\|P^*K_\lambda\|^2\|R^*K_\lambda\|^2) + |\langle P^*K_\lambda, R^*K_\lambda\rangle|$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\lambda, \mu \in \Omega$ dır. Bu eşitsizlik $max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a-b|)$ $(a, b \in \mathbb{R})$ sayesinde

$$\left|\langle PK_\mu, K_\lambda\rangle\right|^2 + \left|\langle RK_\mu, K_\lambda\rangle\right|^2 \leq \frac{1}{2}[\langle (PP^* + RR^*)K_\lambda, K_\lambda\rangle + |\langle (PP^* - RR^*)K_\lambda, K_\lambda\rangle|] + |\langle RP^*K_\lambda, K_\lambda\rangle|$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, üçgen eşitsizliğinden

$$\left|\langle (P+R)K_\mu, K_\lambda\rangle\right|^2 \leq \left|\langle PK_\mu, K_\lambda\rangle\right|^2 + \left|\langle RK_\mu, K_\lambda\rangle\right|^2 + 2\left|\langle PK_\mu, K_\lambda\rangle\right|\left|\langle RK_\mu, K_\lambda\rangle\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}[\langle (PP^* + RR^*)K_\lambda, K_\lambda\rangle + |\langle (PP^* - RR^*)K_\lambda, K_\lambda\rangle|] + |\langle RP^*K_\lambda, K_\lambda\rangle| + 2|\langle PK_\mu , K_\lambda\rangle||\langle RK_\mu , K_\lambda\rangle|$$

eşitsizliği elde edilir. Üstte elde edilen eşitsizlikte $\lambda = \mu$ ile $\lambda, \mu \in \Omega$ supremum alınarak

$$\boldsymbol{ber}^2(P + R) \leq \frac{1}{2}[\||P^*|^2 + |R^*|^2\|_{ber} + \boldsymbol{ber}(|P^*|^2 - |R^*|^2)] + \boldsymbol{ber}(RP^*) + 2\boldsymbol{ber}(P)\boldsymbol{ber}(R)$$

eşitsizliği bulunur.

Uyarı 1. Her P ve R iki normal operatör olmak üzere Teorem 1'den

$$\boldsymbol{ber}^2(P + R) \leq \frac{1}{2}[\||P|^2 + |R|^2\|_{ber} + \boldsymbol{ber}(|P|^2 - |R|^2)] + \boldsymbol{ber}(RP^*) + 2\boldsymbol{ber}(P)\boldsymbol{ber}(R)$$

eşitsizliği elde edilir.

Eğer Teorem 1'in ispatında $\lambda \neq \mu$ alınırsa o zaman aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 1. $P, R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ olsun. O zaman

$$\|P + R\|_{ber}^2 \leq \frac{1}{2}[\||P^*|^2 + |R^*|^2\|_{ber} + \boldsymbol{ber}(|P|^2 - |R|^2)] + \boldsymbol{ber}(RP^*) + 2\|P\|_{ber}\|R\|_{ber}$$

olur.

(11), (12) ve (14) eşitsizliklerinden aşağıdaki daha genel sonuç elde edilir.

Önerme 1. $P, R, S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ve f ve g her $t \in [0, \infty)$ için $f(t)g(t) = t$ bağıntısını sağlayan ve sürekli olan $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan fonksiyonlar olsunlar. Eğer h üzerinde negatif olmayan artan konveks fonksiyonsa, o zaman herhangi bir $0 < \upsilon < 1$ için,

$$h\left(\boldsymbol{ber}^2(P^*SR)\right) \leq \left\|(1-\upsilon)h\left((R^*f(|S|)R)^{\frac{1}{(1-\upsilon)}}\right) + \upsilon h\left((P^*g(|S^*|)P)^{\frac{1}{\upsilon}}\right)\right\|_{ber} \quad (17)$$

ve

$$\boldsymbol{ber}^{2r}(P^*SR) \leq \frac{1}{2}\|(R^*f(|S|)R)^{2r} + (P^*f(|S|)P)^{2r}\|_{ber} \quad (18)$$

eşitsizlikleri elde edilir.
İspat. $\lambda \in \Omega$ bir sabit olsun. O zaman ağırlıklı AM-GM eşitsizliğini ve (11) eşitsizliğini kullanılarak

$$|\langle P^*SRK_\lambda, K_\lambda\rangle|^2 = |\langle SRK_\lambda, PK_\lambda\rangle|^2 \leq \langle R^*f^2(|S|)RK_\lambda, K_\lambda\rangle\langle P^*g^2(|S^*|)PK_\lambda, K_\lambda\rangle$$
$$\leq \langle\left((R^*f^2(|S|)R)^{\frac{1}{(1-\upsilon)}}\right)^{(1-\upsilon)} K_\lambda, K_\lambda\rangle \langle\left((P^*g(|S^*|)P)^{\frac{1}{\upsilon}}\right)^{\upsilon} K_\lambda, K_\lambda\rangle$$

$$\leq \langle (R^* f^2(|S|)R)^{\frac{1}{(1-v)}} K_\lambda, K_\lambda \rangle^{(1-v)} \langle (P^* g(|S^*|)P)^{\frac{1}{v}} K_\lambda, K_\lambda \rangle^{v}$$
$(f(t) = t^r \ (0 < v < 1)$ konkav fonksiyonu için)
$$\leq (1-v) \langle (R^* f^2(|S|)R)^{\frac{1}{(1-v)}} K_\lambda, K_\lambda \rangle + v \langle (P^* g(|S^*|)P)^{\frac{1}{v}} K_\lambda, K_\lambda \rangle$$

elde edilir. Bu elde edilen eşitsizlikte $\lambda \in \Omega$ için supremum alınırsa

$$\boldsymbol{ber}^2(P^*SR) \leq \left\| (1-v)(R^* f(|S|)R)^{\frac{1}{(1-v)}} + v(P^* g(|S^*|)P)^{\frac{1}{v}} \right\|_{ber}$$

olur. h varsayımından dolayı,

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{ber}^2(P^*SR)) &\leq h\left(\left\| (1-v)(R^* f(|S|)R)^{\frac{1}{(1-v)}} + v(P^* g(|S^*|)P)^{\frac{1}{v}} \right\|_{ber} \right) \\ &= \left\| h\left((1-v)(R^* f(|S|)R)^{\frac{1}{(1-v)}} + v(P^* g(|S^*|)P)^{\frac{1}{v}} \right) \right\|_{ber} \\ &\leq \left\| (1-v)h\left((R^* f(|S|)R)^{\frac{1}{(1-v)}} \right) + vh\left((P^* g(|S^*|)P)^{\frac{1}{v}} \right) \right\|_{ber} \end{aligned}$$

yazılır. (18) eşitsizliğinde $h(t) = t^r$ (r≥ 1) ve $v = \frac{1}{2}$ alınırsa (17) den direk olarak bulunur.

Teorem 2. $P, R, S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ve f ve g her $t \in [0, \infty)$ için $f(t)g(t) = t$ bağıntısını sağlayan ve sürekli olan $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan fonksiyon olsunlar. Eğer h $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan artan konveks fonksiyon, $0 < R^* f^2(|S|)R \leq m < M \leq P^* g^2(|S^*|)P$ veya $0 < P^* g^2(|S^*|)P \leq m < M \leq R^* f^2(|S|)R$ ise, bu durumda

$$h(\boldsymbol{ber}(P^*SR)) \leq \frac{\sqrt{Mm}}{M+m} \| h(R^* f^2(|S|)R) + h(P^* g^2(|S^*|)P) \|_{ber} \tag{19}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. K_λ normalleştirilmiş çekirdeğin üreteni olsun. (11) eşitsizliğinden

$$|\langle P^*SRK_\lambda, K_\lambda \rangle| \leq \sqrt{\langle R^* f^2(|S|)RK_\lambda, K_\lambda \rangle \langle P^* g^2(|S^*|)PK_\lambda, K_\lambda \rangle} \tag{20}$$

elde edilir. (14) eşitsizliği

$$\begin{aligned} &\sqrt{\langle R^* f^2(|S|)RK_\lambda, K_\lambda \rangle \langle P^* g^2(|S^*|)PK_\lambda, K_\lambda \rangle} \\ &\leq \frac{\sqrt{Mm}}{M+m} (\langle R^* f^2(|S|)RK_\lambda, K_\lambda \rangle + \langle P^* g^2(|S^*|)PK_\lambda, K_\lambda \rangle) \\ &= \frac{\sqrt{Mm}}{M+m} \langle (R^* f^2(|S|)R + P^* g^2(|S^*|)P)K_\lambda, K_\lambda \rangle \end{aligned} \tag{21}$$

eşitsizliği sağlanır. (20) ve (21) eşitsizlikleri beraber düşünülürse,

$$|\langle P^*SRK_\lambda, K_\lambda \rangle| \leq \frac{\sqrt{Mm}}{M+m} \langle (R^* f^2(|S|)R + P^* g^2(|S^*|)P)K_\lambda, K_\lambda \rangle$$

eşitsizliği bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikte $\lambda \in \Omega$ supremum alınırsa,

$$\boldsymbol{ber}(P^*SR) \le \frac{\sqrt{Mm}}{M+m}\|R^*f^2(|S|)R + P^*g^2(|S^*|)P\|_{ber}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, h negatif olmayan artan konveks fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} h\big(\boldsymbol{ber}(P^*SR)\big) &\le h\left(\frac{\sqrt{Mm}}{M+m}\|R^*f^2(|S|)R + P^*g^2(|S^*|)P\|_{ber}\right) \\ &\le \frac{2\sqrt{Mm}}{M+m}\left(\frac{h(\|R^*f^2(|S|)R + P^*g^2(|S^*|)P\|_{ber})}{2}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{Mm}}{M+m}\left\|h\left(\frac{R^*f^2(|S|)R + P^*g^2(|S^*|)P}{2}\right)\right\|_{ber} \\ &\le \frac{\sqrt{Mm}}{M+m}\|h(R^*f^2(|S|)R) + h(P^*g^2(|S^*|)P)\|_{ber} \end{aligned} \tag{22}$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Burada eğer f negatif olmayan konveks fonksiyon ve $\alpha \le 1$ ise, o zaman $f(\alpha t) \le \alpha f(t)$ (yani, $\frac{2\sqrt{Mm}}{M+m} \le 1$) olduğundan dolayı (22) eşitsizliği bulunur.

Uyarı 2. Aşağıda (19) eşitsizliğinin bazı belirli ilgi çeken eşitsizliklerini ifade ediyoruz.

(i) Eğer $r \ge 1$ ve $0 \le \upsilon \le 1$ ve $0 < R^*|S|^{2(1-\upsilon)}R \le m < M \le P^*|S^*|^{2\upsilon}P$ veya $0 < P^*|S^*|^{2\upsilon}P \le m < M \le R^*|S|^{2(1-\upsilon)}R$ olursa o zaman

$$\boldsymbol{ber}^r(P^*SR) \le \frac{\sqrt{Mm}}{M+m}\left\|\left(R^*|S|^{2(1-\upsilon)}R\right)^r + (P^*|S^*|^{2\upsilon}P)^r\right\|_{ber}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik, (9) eşitsizliğinin refine edilmiş halidir.

(ii) Eğer $r \ge 1$ ve $0 \le \upsilon \le 1$ ve her ne zaman $0 < |S|^{2(1-\upsilon)} \le m < M \le |S^*|^{2\upsilon}$ veya $0 < |S^*|^{2\upsilon} \le m < M \le |S|^{2(1-\upsilon)}$ ise o zaman

$$\boldsymbol{ber}^r(P^*SR) \le \frac{\sqrt{Mm}}{M+m}\left\||S|^{2r(1-\upsilon)} + |S^*|^{2r\upsilon}\right\|_{ber}$$

dir. Yukarıda verilen eşitsizlik, (6) eşitsizliğinin refine edilmiş halidir.

(iii) Eğer $r \ge 1$ ve her zaman $0 < |R|^2 \le m < M \le |P|^2$ veya $0 < |P|^2 \le m < M \le |R|^2$ ise o zaman

$$\boldsymbol{ber}^r(P^*SR) \le \frac{\sqrt{Mm}}{M+m}\||R|^{2r} + |P|^{2r}\|_{ber}$$

dir. Yukarı verilen eşitsizlik, (8) eşitsizliğinin refine edilmiş halidir.

Teorem 3. $P, R, S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ve f ve g her $t \in [0,\infty)$ için $f(t)g(t) = t$ bağıntısını sağlayan ve sürekli olan $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan fonksiyon olsunlar. Eğer h $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan artan konveks fonksiyon ve verilen m' ve M' için, $0 < m' \le R^*f^2(|S|)R \le P^*g^2(|S^*|)P < M'$ veya $0 < m' \le P^*g^2(|S^*|)P \le R^*f^2(|S|)R < M'$ ise, bu durumda

$$h\left(\boldsymbol{ber}(P^*SR)\right) \leq \frac{1}{2\xi}\|h(R^*f^2(|S|)R) + h(P^*g^2(|S^*|)P)\|_{ber}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $h' = \frac{M'}{m'}$ ile $\xi = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{h'}\right)^2\right)}$ dir.

İspat. [11] çalışmasındaki Sonuç 3.15'den, $0 < m' \leq R^*f^2(|S|)R \leq P^*g^2(|S^*|)P < M'$ veya $0 < m' \leq P^*g^2(|S^*|)P \leq R^*f^2(|S|)R < M'$ elde edilen $m', M' > 0$ ile $P, R > 0$ için

$$exp_r\left(\frac{\upsilon(1-\upsilon)}{2}\left(1-\frac{1}{h'}\right)^2\right) P \ \sharp_\upsilon \ R \leq P\nabla_\nu R$$

olur. Burada $exp_r(x) = (1+rx)^{\frac{1}{r}}$ olur. Eğer $1 + rx > 0$ ise, ve aksi halde tanımlanamaz. $exp_r(x)$ değeri $r \in [-1,0]$ aralığında azalan olduğundan, $r = -1$ olduğu zaman yukarıdaki eşitsizlikte alt sınır bulunur. Sonunda $0 < m' \leq min\{a,b\} \leq max\{a,b\} \leq M'$ olacak şekilde $m', M' > 0$ ve $a, b > 0$ için

$$\phi\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

skaler eşitsizliğini elde ederiz. Teorem 2 de olduğu gibi benzer argümanlar ile bu eşitsizliğe uygulayarak, istenen sonuç bulunur.

Biz ayrıca Uyarı 2 ile benzer uyarıları elde ederiz. Burada Yardımcı Teorem 4, Önerme 1 ve Teorem 2 de önemli rol oynamaktadır.

Şimdi Yardımcı Teorem 4'ün iyileştirilmesi verilebilir.

Önerme 2. Yardımcı Teorem 4 deki varsayımları sağlansın. Bu durumda

$$\left\|f\left((1-\upsilon)P + \upsilon R\right)\right\|_{ber} \leq \|(1-\upsilon)f(P) + \upsilon f(R)\|_{ber} - r\xi(f) \tag{23}$$

olur. Burada $r = min\{(\upsilon, 1-\upsilon)\}$ ve

$$\xi(f) = inf_{\lambda\in\Omega}\left\{f\left(\tilde{P}(\lambda)\right) + f\left(\tilde{R}(\lambda)\right) - 2f\left(\widetilde{\frac{P+R}{2}}(\lambda)\right)\right\} \tag{24}$$

dir.

İspat. $0 \leq \upsilon \leq \frac{1}{2}$ olduğunu varsayalım, $\lambda \in \Omega$ bir sabit olsun. O zaman

$$\begin{aligned} &f\left(\langle\left((1-\upsilon)P + \upsilon R\right)K_\lambda, K_\lambda\rangle\right) + r\xi(f) \\ &\quad \leq f\left((1-\upsilon)\langle PK_\lambda, K_\lambda\rangle + \upsilon\langle RK_\lambda, K_\lambda\rangle\right) + r\xi(f) \\ &\quad \leq f\left((1-2\upsilon)\langle PK_\lambda, K_\lambda\rangle + 2\upsilon\,\langle\frac{P+R}{2}K_\lambda, K_\lambda\rangle\right) + r\xi(f) \\ &\quad \leq (1-2\upsilon)\, f(\langle PK_\lambda, K_\lambda\rangle) + 2\upsilon f\left(\langle\frac{P+R}{2}K_\lambda, K_\lambda\rangle\right) + r\xi(f) \\ &\qquad + r\left(f(\langle PK_\lambda, K_\lambda\rangle + \langle RK_\lambda, K_\lambda\rangle) - 2f\left(\langle\frac{P+R}{2}K_\lambda, K_\lambda\rangle\right)\right) \end{aligned} \tag{25}$$

$$
\begin{aligned}
&(f \text{ fonksiyonunun konveksliğinden})\\
&\le (1-v)\, f(\langle PK_\lambda, K_\lambda\rangle) + vf(\langle RK_\lambda, K_\lambda\rangle)\\
&\le (1-v)\, \langle f(P)K_\lambda, K_\lambda\rangle + v\langle f(R)K_\lambda, K_\lambda\rangle\\
&\le \langle \big((1-v)\, f(P) + vf(R)\big)K_\lambda, K_\lambda\rangle
\end{aligned}
$$

olur. (24) eşitsizliğinden (25) eşitsizliği elde edilir. Eğer $\frac{1}{2} \le v \le 1$ için benzer argümanlar uygulanırsa,

$$f\big(\langle\big((1-v)P + vR\big)K_\lambda, K_\lambda\rangle\big) \le \langle\big((1-v)\, f(P) + vf(R)\big)K_\lambda, K_\lambda\rangle - r\xi(f)$$

eşitsizliği yazılabilir. Eğer $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ pozitif operatör ise, o zaman $\|P\|_{ber} = sup_{\lambda\in\Omega}\langle PK_\lambda, K_\lambda\rangle$ olduğu bilinir. f'nin artanlığını ve sürekliliğini kullanarak,

$$
\begin{aligned}
\big\|f\big((1-v)P + vR\big)\big\|_{ber} &= f\big(sup_{\lambda\in\Omega}\langle\big((1-v)P + vR\big)K_\lambda, K_\lambda\rangle\big)\\
&= sup_{\lambda\in\Omega} f\big(\langle\big((1-v)P + vR\big)K_\lambda, K_\lambda\rangle\big)\\
&\le sup_{\lambda\in\Omega}\big(\langle\big((1-v)\, f(P) + vf(R)\big)K_\lambda, K_\lambda\rangle\big) - r\xi(f)\\
&= \|(1-v)f(P) + vf(R)\|_{ber} - r\xi(f).
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunur. Diğer taraftan, eğer $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ve f $[0,\infty)$ aralığında negatif olmayan artan fonksiyon ise, o zaman $f(\|S\|_{ber}) = \|f(S)\|_{ber}$ olur. Bu ise istenen sonucu verir.

Uyarı 3. Eldeki (23) eşitsizliği ile Önerme 1 ve Teorem 2 iyileştirilebilir. Örneğin, Önerme 1 in varsayımı altında,

$$h\big(\boldsymbol{ber}^2(P^*SR)\big) \le \left\|(1-v)(R^*f^2(|S|)R)^{\frac{1}{(1-v)}} + v(P^*g^2(|S^*|)P)^{\frac{1}{v}}\right\|_{ber} - r\beta(f)$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$
\begin{aligned}
\beta(f) = inf_{\lambda\in\Omega}\Bigg\{ & h\left(\widetilde{\big(R^*f^2(|S|)R\big)^{\frac{1}{(1-v)}}}\right)(\lambda) + h\widetilde{\big(P^*g^2(|S^*|)P\big)^{\frac{1}{v}}}(\lambda)\\
& - 2\mathrm{h}\left(\widetilde{\frac{(R^*f^2(|S|)R)^{\frac{1}{(1-v)}} + (P^*g^2(|S^*|)P)^{\frac{1}{v}}}{2}}\right)(\lambda)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

dir.

(15) eşitsizliği ve Yardımcı Teorem 6 kabul edilerek, $ber(P) \le \|P\|_{ber}$ refine edilebilir.

Teorem 4. $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ve f negatif olmayan süperkuadratik fonksiyon olsun. O zaman

$$f\big(\boldsymbol{ber}(P)\big) \le \left\|f(|P|) - inf_{\lambda\in\Omega} f\left(\left||P| - \boldsymbol{ber}(P)\right|^{\frac{1}{2}}K_\lambda\right)\right\|_{ber}^{2} \tag{26}$$

sağlanır.

İspat. K_λ normalleştirilmiş çekirdeğin üreteni olsun. (15) eşitsizliğinde $s = ber(P)$ koyarak,

$$f(|t - \boldsymbol{ber}(P)|) + C_{ber(P)}\big(t - \boldsymbol{ber}(P)\big) + f\big(\boldsymbol{ber}(P)\big) \leq f(t) \tag{27}$$

eşitsizliği elde edilir. (27) deki $|P|$ fonksiyonel temel kalkülüs işlemleri uygulayarak,

$$f\big(\big||P| - \boldsymbol{ber}(P)\big|\big) + C_{ber(P)}\big(|P| - \boldsymbol{ber}(P)\big) + f\big(\boldsymbol{ber}(P)\big) \leq f(|P|) \tag{28}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Sonuç olarak, herhangi bir $\lambda \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}\left\|f\big(\big||P| - \boldsymbol{ber}(P)\big|\big)^{\frac{1}{2}}K_\lambda\right\|^2 + C_{ber(P)}\big(\langle |P|K_\lambda, K_\lambda\rangle - \boldsymbol{ber}(P)\big) + f\big(\boldsymbol{ber}(P)\big) \\ \leq f(\langle |P|K_\lambda, K_\lambda\rangle)\end{aligned} \tag{29}$$

olur. Şimdi, (29) de $\lambda \in \Omega$ supremum alarak ve $ber(P) = \|P\| \geq ber(P)$ gerçeğini kullanarak ve üçgen eşitsizliğini uygulayarak istenen sonuç bulunur.

Teorem 4 ifadesinde $f(t) = t^r$ $(r \geq 2)$ süperkuadratik fonksiyonu alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2. $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ olsun. Herhangi $r \geq 2$ için

$$\boldsymbol{ber}^r(P) \leq \left\| |P|^r - inf_{\lambda\in\Omega}\big||P| - ber(P)\big|^{\frac{r}{2}}K_\lambda\right\|_{ber}^2$$

ve

$$\boldsymbol{ber}(P) \leq \sqrt{\left\||P|^2 - inf_{\lambda\in\Omega}\big||P| - ber(P)\big|K_\lambda\right\|_{ber}^2} \leq \|P\|_{ber}$$

elde edilir.

4. Sonuç ve Yorum

Bu çalışmada sunulan fikirler ve metodolojiler, bu alanda gelecekteki araştırmalar için bir başlangıç noktası olarak hizmet edebilir. Berezin sayısının olası bir genellemesini inceleyerek, operatörlerin norm eşitsizlikleri ile Berezin sayısı arasındaki diğer bağlantıları arayacağız. İki operatörün toplamı için Berezin sayısını kullanarak bazı üst sınırlar bulmak istiyoruz. Ayrıca, fonksiyonel Hilbert uzayı üzerinde pozitif bir operatör operatör tarafından indirgenen ek bir yarı iç çarpım yapısı dikkate alındığında, Berezin sayısı ve Berezin normu ile ilgili bazı sınırlar incelenmiştir. Gelecek çalışmalarımızda araştırmamızın "Fraktallar ve Kesirli Hesap" ile bağlantılara nasıl katkıda bulunabileceğini planlıyoruz.

Yazar Katkı Beyanı

H. Basaran: Araştırma, Doğrulama, İnceleme ve Düzenleme;

M. Gürdal: Araştırma, Orijinal Taslak Yazımı.

Çatışma Beyanı

Bu çalışmanın yazarları olarak herhangi bir çatışma beyanımız bulunmadığını bildiririz.

Destek ve Teşekkür Beyanı

Bu çalışma Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince Desteklenmiştir. Proje Numarası: FDK-2022-8878.

Kaynaklar

[1] S. Abramovich, G. Jameson, and G. Sinnamon, "Inequalities for averages of convex and superquadratic function", *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 5(4), 1-14, 2004.

[2] J. S. Aujla and F. Silva, "Weak majorization inequalities and convex functions", *Linear Algebra Appl.*, 369, 217-233, 2003.

[3] F. A. Berezin, "Covariant and contravariant symbols for operators", *Math. USSR-Izvestiya*, 6, 1117-1151, 1972.

[4] H. Başaran, M. Gürdal, A. N. Güncan, "Some operator inequalities associated with Kantorovich and Hö lder-McCarthy inequalities and their Applications", *Turkish J. Math.*, 43(1), 523-532, 2019.

[5] H. Başaran and M. Gürdal, "Berezin number inequalities via inequality", *Honam Math. J.*, 43(3), 523-537, 2021.

[6] H. Başaran and V. Gürdal, "Berezin radius and Cauchy-Schwarz inequality", *Montes Taurus J. Pure Appl. Math.*, 5(3), 16-22, 2023.

[7] H. Başaran, M. B. Huban and M. Gürdal, "Inequalities related to Berezin norm and Berezin number of operators", *Bull. Math. Anal. App.*, 14(2), 1-11, 2022.

[8] I. Chalendar, E. Fricain, M. Gürdal and M. Karaev, "Compactness and Berezin symbols", *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 78(1), 315-329, 2012.

[9] S. S. Dragomir, *Inequalities for the Numerical Radius of Linear Operators in Hilbert spaces*, Melbourne, Springer, 2013.

[10] M. El-Haddad and F. Kittaneh, "Numerical radius inequalities for Hilbert space operators II", *Studia Math.*, 182(2), 133-140, 2007.

[11] S. Furuichi, "Further improvements of Young inequality", *Rev. R. Acad. Ciene. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat.*, 113, 255-266, 2019.

[12] S. Furuichi and H. R. Moradi, "On further refinements for Young inequalities", *Open Math.*, 16, 1478-1482, 2018.

[13] S. Furuichi, H. R. Moradi and M. Sababheh, "New sharp inequalities for operator means", *Linear Multilinear Algebra*, 67(8), 1567-1578, 2019.

[14] M. T. Garayev, M. Gürdal and A. Okudan, "Hardy-Hilbert's inequality and a power inequality for Berezin numbers for operators", *Math. Inequal. Appl.*, 19, 883-891, 2016.

[15] M. T. Garayev, M. Gürdal and S. Saltan, "Hardy type inequaltiy for reproducing kernel Hilbert space operators and related problems", *Positivity*, 21, 1615-1623, 2017.

[16] M. Garayev, F. Bouzeffour, M. Gürdal and C. M. Yangöz, "Refinements of Kantorovich type, Schwarz and Berezin number inequalities", *Extracta Math.*, 35, 1-20, 2020.

[17] M. T. Garayev, H. Guedri, M. Gürdal and G. M. Alsahli, "On some problems for operators on the reproducing kernel Hilbert space", *Linear Multilinear Algebra*, 69(11), 2059-2077, 2021.

[18] K. E. Gustafson and D. K. M. Rao, *Numerical Range: The field of Values of Linear Operators and Matrices*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 1997.

[19] M. B. Huban, H. Başaran and M. Gürdal, "New upper bounds related to the Berezin number inequalities", *J. Inequal. Spec. Funct.*, 12(3), 1-12, 2021.

[20] M. B. Huban, H. Başaran and M. Gürdal, "Some new inequalities via Berezin numbers", *Turk. J. Math. Comput. Sci.*, 14(1), 129-137, 2022.

[21] F. Kittaneh, "Notes on some inequalities for Hilbert space operators", *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 24, 283-293, 1988.

[22] M. T. Karaev, "Berezin symbol and invertibility of operators on the functional Hilbert spaces", *J. Funct. Anal.*, 238, 181-192, 2006.

[23] M. T. Karaev and M. Gürdal, “On the Berezin symbols and Toeplitz operators”, *Extracta Math.*, 25(1), 83-102, 2010.

[24] M. Karaev, M. Gürdal and U. Yamancı, “Some results related with Berezin symbols and Toeplitz operators”, *Math. Inequal. Appl.*, 17(3), 1031-1045, 2014.

[25] B. Mond and J. Pečarić, “On Jensen's inequality for operator convex functions”, *Houston J. Math.*, 21, 739-753, 1995.

[26] S. Tafazoli, H. R. Moradi, S. Furuichi and P. Harikrishnan, “Further inequalities for the numerical radius of Hilbert space operators”, *J. Math. Inequal.*, 13(4), 955-967, 2019.

[27] A. Taghavi, T. A. Roushan and V. Darvish, “Some upper bound for the Berezin number of Hilbert space operators”, *Filomat*, 33(14), 4353-4360, 2019.

[28] U. Yamancı, R. Tunç and M. Gürdal, “Berezin number, Grüss-type inequalities and their applications”, *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc.*, 43(3), 2287-2296, 2020.