

Teacher's Opinions On the Perceptions of Equality- Equivalence of Secondary School Students*

Merve İŞÇİ¹

Mustafa OBAY²

Abstract

The aim of this research is to investigate in the light of the data obtained in the semi-structured interview form applied to teachers; to examine the perceptions of 7th grade students about basic algebraic concepts such as equivalence-equality and the relationship and difference between these concepts, as well as teachers' perceptions of equivalence and equality concepts. The sample of the research consisted of 24 mathematics teachers teaching 7th grade classes in the central district of Siirt province in the 2020-2021 academic spring semester. In this study, which was carried out with phenomenological design from qualitative methods, data were collected with a semi-structured interview form. The semi-structured interview form was created by rearranging the questions written by the researcher through the opinion of the field experts and within the expert recommendations. Interviews with teachers were conducted via zoom program or face-to-face and the interviews were recorded. The collected data were analyzed using the content analysis method. As a result of the analyzes, it was reached from the opinions of the teachers that the 7th grade students had predominantly conceptual information deficiencies and misconceptions in their definitions of equivalence and equality, and that the students were not completely alien to the concept of equivalence as a whole, although there were also definitions close to the truth. Similarly, it has been seen that there is incomplete or erroneous information in the definitions of teachers for the concept of equivalence. These results show that teachers' understanding of equivalence affects students' understanding of equivalence. It has been found that a large part of the teachers maintain a relational understanding of equality, but there are also teachers who look at equality operationally. Finally, it was determined that students could not distinguish between the concepts of equality and equivalence, so they used them interchangeably, and the transactional understanding of equality continued even in the 7th grade.

Keywords: Algebra, Equality, Equivalence, Algebraic Reasoning, Proportional Reasoning

* This study is derived from the Master's Thesis prepared by the first author under the supervision of the corresponding author

¹ Teacher, Kekliktepe Secondary School, Siirt, m.i.21_56@hotmail.com ORCID No: [0000-0002-5854-0582](https://orcid.org/0000-0002-5854-0582)

² Corresponding author, Asst. Prof. Dr. Siirt University, Faculty of Education, Department of Mathematics Education, Siirt, mustafa.obay@gmail.com, ORCID No: [0000-0002-2537-9438](https://orcid.org/0000-0002-2537-9438)



Siirt Eğitim Dergisi

Araştırma Makalesi

Başvuru Tarihi: 17.11.2022

Kabul Tarihi: 26.12.2022

Ortaokul Öğrencilerinin Eşitlik-Denklik Algılarına Yönelik Öğretmen Görüşleri*

Merve İŞÇİ¹Mustafa OBAY²

Özet

Bu araştırmanın amacı öğretmenlere uygulanan yarı yapılandırılmış görüşme formunda elde edilen veriler ışığında; 7. Sınıf öğrencilerinin denklik-eşitlik gibi temel cebirsel kavramlara ve bu kavramlar arasındaki ilişki ve farka ilişkin algılarını, bunların yanı sıra öğretmenlerin denklik ve eşitlik kavramlarına yönelik algılarını incelemektir. Araştırmanın örneklemini 2020-2021 eğitim-öğretim bahar yarıyılı döneminde Siirt ili merkez ilçesinde 7. Sınıf derslerini okutan 24 matematik öğretmeni oluşturmuştur. Nitel yöntemlerden fenomenolojik desenle yürütülen bu çalışmada veriler, yarı yapılandırılmış görüşme formu ile toplanmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşme formu araştırmacının yazdığı soruların alan uzmanları görüşünden geçerek, uzman önerileri dâhilinde tekrar düzenlenmesiyle oluşturulmuştur. Öğretmenlerle yapılan görüşmeler zoom programı veya yüz yüze gerçekleştirilmiş ve görüşmeler kayıt altına alınmıştır. Toplanan veriler içerik analizi yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir. Yapılan analizler sonucunda öğretmenlerin görüşlerinden, 7. Sınıf öğrencilerinin denklik ve eşitlikle ilgili tanımlamalarında ağırlıklı olarak kavramsal bilgi eksiklerinin ve kavram yanlışlarının olduğu, bununla birlikte doğruya yakın tanımlamaların da mevcut olduğu öğrencilerin bir bütün olarak denklik kavramına tamamen yabancı olmadıklarına ulaşılmıştır. Benzer olarak öğretmenlerin denklik kavramına yönelik tanımlarında eksik ya da hatalı bilgilerin olduğu görülmüştür. Bu sonuçlar öğretmenlerin denklik anlayışlarının öğrencilerin denklik anlayışını etkilediğini göstermektedir. Öğretmenlerin büyük bir kısmının eşitliğe dair ilişkisel anlayış sürdürdükleri bununla birlikte eşitliğe işlemsel bakan öğretmenlerin de mevcut olduğu tespit edilmiştir. Son olarak öğrencilerin eşitlik ve denklik kavramlarını ayırt edemedikleri bu yüzden birbiri yerine kullandıkları ayrıca eşitliğe dair işlemsel anlayışın 7. Sınıfta bile devam ettiği saptanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Cebir, Eşitlik, Denklik, Cebirsel Muhakeme, Orantısal Akıl Yürütme

* Bu çalışma sorumlu yazarın danışmanlığında yürütülen birinci yazarın yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

¹ Öğretmen, Kekliktepe Ortaokulu/Siirt, m.i.21_56@hotmail.com ORCID No: [0000-0002-5854-0582](https://orcid.org/0000-0002-5854-0582)

² Sorumlu Yazar, Dr. Öğr. Üyesi, Siirt Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Siirt, mustafa.obay@gmail.com, ORCID No: [0000-0002-2537-9438](https://orcid.org/0000-0002-2537-9438)

Giriş

Ortaokul matematik dersi öğretim programındaki öğrenme alanları incelendiğinde, soyut konular içeren ve anlaşılması güç olan öğrenme alanlarından birinin cebir olduğu görülmektedir. Cebir, birçok kişi tarafından okul matematiğinde, matematikte daha fazla çalışmanın yanı sıra gelecekteki eğitim ve istihdam olanakları için, kritik bir alan olarak kabul edilmektedir (Ladson-Billings, 1998). Türk Eğitim Sistemi öğretim programları içerik düzenlemesinde sarmal yaklaşımın benimsenmesi üzerine, cebirin hemen hemen her eğitim kademesinde gittikçe derinleşerek yer alması ortaokulda başlayan cebir öğrenme alanının önemini ortaya koymaktadır. Buna karşın ne yazık ki, çoğu öğrenci cebir öğrenmede zorluk çekmektedir (Kieran, 1992).

Cebir'in birçok işlevi vardır. Bu işlevlerin bir kısmını sıralayacak olursak: Cebir matematiksel dildir, cebir düşünme ve problem çözme aracıdır, cebir bir derstir (Dede ve Argün, 2003). Cebir alanındaki bilgi ve becerilerin artması ve buna fırsat tanınması cebirsel düşünme becerilerinin de gelişimini sağlar, çünkü cebir öğrenme alanında alınan eğitim cebirsel düşünmenin gelişimini doğrudan etkiler (Yenilmez ve Teke, 2008). Cebirsel düşünmenin temeli, cebirsel muhakemeye dayanmaktadır. Cebirsel düşünme ve muhakemeyi teşvik etme ve geliştirmenin önemi birçok çalışmada özellikle vurgulanmaktadır (Kaput, 1995; NCTM, 2000). Walkoe ve Levin (2020), çocukların cebirsel düşünmeyi geliştirme potansiyeline sahip muazzam bir deneyim ve farkındalık bankasına sahip olduklarını öne sürmüştür.

Cebirsel muhakeme, cebirsel ifadelerin mantığını anlama, değişim oranını belirleme, değişim miktarını belirleme, cebirsel ifadelerin denkliğini anlama ve bunlar gibi bir takım temel fikirlerin anlaşılmasını içerir. Cebirsel ifadelerin denkliğini anlamının bir yolu da denklik kavramını kavrama ve tanıma ile ilişkilidir. Matematiksel denklik cebirde temel bir kavramdır bu yüzden bu kavramla hemen hemen her kademedeki karşılaşmaktadır (Carpenter, Franke ve Levi, 2003). Cebir anlayışı için her düzeyde bulunan matematiksel kavramların eşitlik ve denklik olmasına karşın birçok çalışma öğrencilerin matematiksel denklik problemleri ile önemli zorluklara sahip olduğunu göstermektedir (Rittle-Johnson, Siegler ve Alibali, 2001). Eşitlik, niceliklerin aynı değere sahip olduğunu veya ifadelerin aynı matematiksel nesneyi temsil ettiğini veya bir nesnenin tanımlandığını iddia eden iki nicelik veya daha genel olarak iki matematiksel ifade arasındaki bir ilişkidir (Kieran ve Martínez-Hernández, 2022). Denklik kavramı, eşit miktardaki çoklukları belirtme ya da aynı değere sahip olan kesirleri ifade etmede kullanılan bir kavramdır (Skemp, 1986). Matematiksel bir terminolojiyle tanımlayacak olursak, denkliğin eşitlikler sistemi olduğunu söyleyebiliriz.

Ortaokul matematik müfredatı incelendiğinde, denklik kavramının birçok konunun (denk kesir, rasyonel sayılar, oran-orantı, yüzdeler, özdeşlikler, tamsayılar, doğrusal denklemler vb.) temelinde ve inşasında yer aldığı görülebilir. Ortaokul düzeyinde denklik kavramıyla ilk karşılaşmanın 5. Sınıf düzeyinde "Kesirler" konusuyla olduğunu ve kesirler konusunun öğrencilerin ilkökulda karşılaştıkları diğer konulara kıyasla zor ve soyut olduğunu söylemek mümkündür. Bu zorluğun temel sebebi, kesirlerin gerçek hayat problemlerine uygulandığında farklı anlamlar içermesindedir (Behr, Harel, Post ve Lesh, 1992). Bu anlamlar "parça-bütün anlamı, işlemci anlamı, ölçme anlamı, bölüm (bölme) anlamı, ve oran anlamı" olmak üzere beş tanedir (Charalambos ve Pitta-Pantazi, 2007). Kesirlerin farklı anlamları kendi aralarında ilişkili olduğundan ve sonraki yıllarda öğrencilerin karşılarına çıkacak birçok konunun bel kemiğini oluşturduğundan önemlidir. Kesirlerin oran anlamı denklikle ilgili konuların öğretiminde kullanılmaktadır (Ertuna, 2013).

Ortaokul müfredatına bakıldığında, denklikle ilgili konulardan birinin oran-orantı olduğu görülmektedir. Matematiğin temelini oluşturan oran-orantı kavramları; matematiksel düşünmeyi geliştiren ve birçok matematiksel problemde yer alan orantısal akıl yürütme kavramını ortaya çıkarmaktadır (Deveci, 2021). Çünkü öğrenciler orantısal akıl yürütme becerilerini kullanarak hem ileri matematiksel düşünme, hem de cebirsel muhakeme alt yapısını oluşturabilirler (Lesh, Post ve Behr, 1988; Langrall ve Swafford, 2000). Buradan orantısal akıl yürütme becerisinin ileri matematiksel düşünme ve cebirsel muhakemenin açığa çıkması için temel oluşturduğu ve kavramsal öğrenmede rol oynadığı söylenebilir.

Bu çalışmanın öğrencilerin eşitlik ve denklik kavramlarını nasıl algıladıkları hakkında bilgi sahibi olmanın, orantısal ve cebirsel muhakeme becerileri ile problem çözme becerilerinin seviyesini yorumlama konusuna ışık tutacağı düşünülmektedir. Yine öğretmenlerin eşitlik ve denklik gibi kavramlara yönelik algılarını bilmenin, öğrencilerin bu kavramlara yönelik bilgilerini yorumlama ve temellendirebilme açısından kolaylık sağlayacağı düşünülmektedir. Bu çalışmanın ortaokul cebir müfredatının içerik ve pedagojik kısmının kavramsallaştırılmasına yeni bir katkı sağlayacağını, öğrencilerin ortaokuldan daha üst kademelere geçtiklerinde cebirin ana kavramlarından biri olan denkligi anlamalarına ve algılamalarına katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Buna bağlı olarak bu çalışmanın öğrencilerin orantısal ve cebirsel muhakeme, bunların yanı sıra problem çözme becerilerinin gelişimine katkı sunması beklenmektedir.

Çalışmada, öğretmenlere uygulanan yarı yapılandırılmış görüşme formunda elde edilen veriler ışığında; 7. Sınıf öğrencilerinin denklik-eşitlik gibi temel cebirsel kavramlara ve bu kavramlar arasındaki ilişki ve farka ilişkin algılarını, bunların yanı sıra öğretmenlerin denklik ve eşitlik kavramlarına yönelik algılarını incelemek amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda araştırma problemi ‘‘Ortaokul 7. Sınıf öğrencilerinin eşitlik ve denklik algılarına ilişkin öğretmen görüşleri nelerdir?’’ olarak belirlenmiştir. Problem bağlamında alt problemler aşağıda sıralanmıştır.

- Öğretmenlere göre 7.sınıf öğrencileri eşitlik-denklik kavramlarını ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi ve farkı nasıl ifade ediyorlar?
- Öğretmenler eşitlik-denklik kavramlarını nasıl tanımlıyorlar?
- 7. sınıf öğrencileri eşitlik ve denklik kavramlarını nasıl algılamaktadır?

Yöntem

Bu araştırma 7. sınıf öğrencilerinin denklik algılarına yönelik öğretmen görüşlerini incelemek amacıyla, nitel yöntem desenlerinden fenomenolojik desen kullanılarak yürütülmüştür. Creswell (2017)'e göre fenomenolojik desen, kaynağını psikoloji ve felsefeden alan, ve bir fenomene yönelik bireylerin deneyimlerini betimleyen araştırma desendir. Fenomenolojide temel amaç fenomenlerle ilgili bireysel deneyimleri evrensel nitelikte açıklamaya indirgemektir (Creswell, 2017). Bu desen fenomenlerin deneyimlerinin özünü mülakatlar yoluyla betimleme imkânı vermesi açısından araştırmanın amacına ulaşılmasında etkili olacağından tercih edilmiştir.

Çalışma Grubu

Bu araştırmanın çalışma grubunu, 2020-2021 eğitim-öğretim bahar yarıyılı döneminde Siirt ili Merkez ilçesinde görev yapan 24 ortaokul matematik öğretmeni oluşturmuştur. Öğrencilerin denklik algılarının incelenebilmesi amacıyla, 7. Sınıf matematik derslerini okutan öğretmenlerle görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşülen öğretmenlerin en az 3 yıl deneyime sahip olmalarına ve araştırmanın katılımcıları gönüllülük esasına dikkat edilerek amaçlı örnekleme yöntemiyle belirlenmiştir.

Veri Toplama Araçları

Araştırma için gerekli verileri toplamak amacıyla araştırmacı matematik öğretmenlerine uygulanacak olan yarı yapılandırılmış görüşme formunu kullanmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmede araştırmacı katılımcılarla belirli konuları keşfetmeye çalışmakta ve çalışılan problem ile ilgili belirli özel durumlar keşfettiğinde daha ayrıntılı sorular yönelterek, durumları daha derinlemesine irdelemektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu çalışmanın nitel verilerine ulaşmak amacı ile öğretmenlerle yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Araştırmacı görüşme sorularının taslağını araştırma amacını göz önünde bulundurarak oluşturmuştur. Taslak halindeki görüşme formu için 2 matematik öğretmeni ve 4 alan uzmanının görüşü alınarak, formun kapsam geçerliliği sağlanmış böylece görüşme formu uygulamaya hazır duruma getirilmiştir.

Verilerin Toplanması

Çalışma 2020-2021 eğitim öğretim yılı bahar döneminde yapılmıştır. Araştırma 7. Sınıf Matematik/Matematik Uygulamaları dersine giren gönüllü öğretmenlerle yürütülmüştür. Görüşmeler 2021 Nisan-Haziran aylarında yapılmıştır. Görüşmelerde öğretmenlerin kendilerini ifade etmeleri için yeterli zaman tanınmıştır. Görüşmelerden bazıları yüz yüze, bazıları pandemiden ötürü zoom programı üzerinden yapılmıştır. Araştırmada görüşme esnasında, öğretmenlerin izniyle verilerde eksiklik veya yanlışlık olmaması için ses kayıt cihazı kullanılmıştır.

Verilerin Analizi

Bu çalışmada 7. Sınıf Matematik/Matematik Uygulamaları dersine giren matematik öğretmenlerinden toplanan verilerin analizi, nitel içerik analiziyle yapılmıştır. Nitel içerik analizi, toplanan verilerin daha ayrıntılı incelenmesini ve bu verileri açıklayan kavram, kategori ve temalara ulaşılmasını içerir (Baltacı, 2019). İlk olarak görüşmelere ait ses kayıtları transkript edilerek ham veriler elde edilmiş, bunlarla birlikte görüşme esnasındaki gözleme dayalı alan notları ve öğretmen örnekleri bilgisayara aktarılmıştır. Daha sonra her bir öğretmene ait ham verilerden oluşan transkriptler, tek tek okunup incelenmiştir. Verilerin tamamını okuyup incelemek, bilgiyi ve bilginin anlamını derinlemesine düşünmek için fırsat sağlar (Creswell, 2017). Sonrasında sorulara her bir öğretmenin verdiği cevaplar incelenmiş ve bu cevaplara uygun kodlar oluşturulmuş.

Kodlar verileri temsil etme, ileride örüntü saptama, kategorize etme veriye yorumlanmış anlam katmak için araştırmacı tarafından üretilen yapılardır (Saldana, 2019). Veriler analiz edilirken verilere kodlar atanmış, kodlama süresince kodların tanımlanmasında ve anlamında bir sapma olmaması için verilerle kodlar ve kodların tanımları hakkında alınan kısa notlar sürekli karşılaştırılmıştır. Kodlardan hareketle kategoriler oluşturulmuştur. Son olarak oluşturulan kategorilerin tekrarlanma sıklığı değerlendirilerek tablo haline getirilmiş ve belirlenen kategoriler için araştırmacı tarafından nitel araştırmada uzman kişilerin görüşleri alınarak tekrar incelenmiş ve kategoriler arasında ortaya çıkan olası anlaşmazlıklar araştırmacı tarafından giderilerek kodlama ve kategoriler üzerinde bir uzlaşma sağlanmıştır (Lincoln ve Guba, 1985; Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Bulgular

Bu bölümde 7. Sınıf dersini okutan ilköğretim matematik öğretmenleri ile yapılan görüşmeler sonucu ulaşılan bulgular yorumlarıyla birlikte verilmiştir. Öğretmenlerle yapılan görüşmelerden elde edilen bulgular araştırma amacı doğrultusunda kodlanıp kategorize edilmiş ve tablolar halinde ele alınmıştır. Öğretmen cevaplarının hepsini bu bölümde sunmak mümkün olmadığı için bir kısmı kodların daha iyi anlaşılması açısından bu bölümde alıntılanmıştır. Ayrıca öğretmenlerin görüşme sorularına verdikleri cevaplar alıntılanırken etik kurallar gözetilmiş ve öğretmenlerin cevapları Ö1, Ö2,Ö3,...Ö24 şeklinde kod isim kullanılarak sunulmuştur.

Birinci Alt Probleme İlişkin Elde Edilen Bulgular

“Öğretmenlere göre 7. sınıf öğrencileri eşitlik-denklik kavramlarını ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi ve farkı nasıl ifade ediyorlar?” biçiminde verilen birinci alt problemin veri analizi sonucunda ulaşılan bulgular ve bu bulgulara ait yorumlar aşağıda verilmiştir.

Tablo 1. Öğretmenlerin Algılarında Öğrencilerin Denklik Tanımları

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
A. Denklik farklı bütünlerden aynı oranda alınmasıdır.	Farklı bütün Miktarcı eşitlik Sadeleştirme genişletme Aynı oran	Ö15, Ö1,Ö2,Ö4

B. Denk olmak, eşit olmaktır.	Kavram karmaşası Kavramları ayırt edememe Kavramsal bilgi eksikliği Eşitlik	Ö9,Ö11,Ö12,Ö13,Ö15, Ö17,Ö19
C. Denklik çoklukların belirli özelliklerinin aynı olmasıdır.	Denklik sınıfı Niteliksel ayrımlık Farklı çokluk	Ö10,Ö18
D. Öğrenciler denkliği anlamıyor ve tanımlayamıyorlar.	Kavramı tanımama Kavramı anlamakta zorluk Kavramsal ve işlemsel bilgi eksikliği	Ö7,Ö8,Ö4,Ö14

Tablo 1’de öğretmenlerin algılarında öğrencilerin denklik kavramı tanımlamaları kategorize edilmiştir. Öğretmen görüşlerine göre öğrencilerin ağırlıklı olarak, denkliği eşitlik olarak anladıkları görülmüştür. Bu öğretmenlerin ifadelerinin analizinde kavramsal bilgi eksikliği, kavramları ayırt edememe, kavramsal karmaşa, kodları oluşturulmuştur. Kavram karmaşası koduna yönelik öğretmen ifadelerinden bazıları aşağıdaki gibidir:

“Öğrenci genelde eşitlik olarak değerlendiriyor denkliği ayrı bir boyut olarak düşünmüyor denklikle eşitlikle arasında bir fark görmüyor.”(Ö9)

“Denk olmayı eşitlik kavramıyla eşdeğer tutuyor, denk olmadan eşit olmayı anlıyor öğrencilerim.”(Ö11)

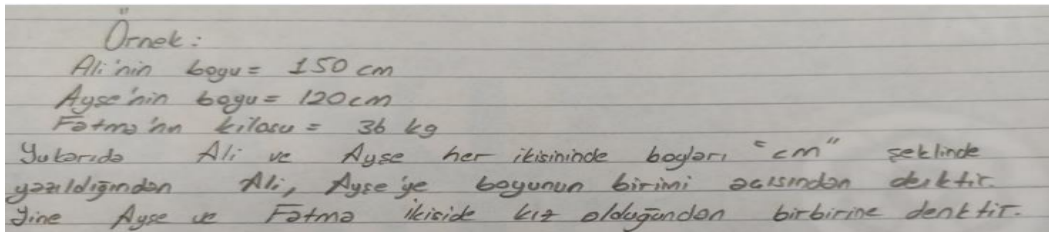
Tablo 1’e bakıldığında birçok öğretmen öğrencilerinin denkliği anlamadıklarını ve denkliği tanımlayamayacaklarını düşündüklerini belirtmişlerdir. Bu öğretmenlerin ifadelerinin analizi sonucu kavramı tanımama, kavramı anlamakta zorluk, kavramsal ve işlemsel bilgi eksikliği kodları oluşturulmuştur. Bu öğretmenler öğrencilerinin denklik kavramını anlayamadıklarını ve bunun da bu konuyla ilgili ya da ilişkili sorularda ve konularda bir eksik olarak önlerine çıktığını belirtmişlerdir. Aşağıda sırasıyla kavramsal bilgi eksikliği ve kavramı anlamama koduna yönelik öğretmen ifadelerinden birer kesit verilmiştir.

“Genel olarak öğrenciler kesirlerin denkliği konusunu anlayamıyor. Bir kesre denk bir kesir oluşturmaları istendiğinde kaçla çarpalım ya da kaç bölelim şeklinde sorular soruyorlar”(Ö14)

“Öğrenciler denk olma ifadesini yeterince anlamıyorlar çünkü denklik üzerinde durmadığımız bir kavram ve sembolünü de kullanmıyoruz.”(Ö4)

Tablo 1’e bakıldığında Ö10 ve Ö18 olarak kodlanan öğretmenlerin ifadeleri “Denklik çoklukların belirli özelliklerinin aynı olmasıdır” kategorisinde ele alınmıştır. Bu öğretmenler öğrencilerin denkliği özelliklere göre sınıflama olarak ele aldığı ifade ettiklerinden denklik sınıfı kodu oluşturulmuştur. Bu öğretmenlerin ifadelerinden, öğrencilerin denklik kavramını denklik sınıfını çağrıştıracak ifadelerle tanımlayabilecekleri görülebilir. Bununla ilgili Ö18 kodlu öğretmenin ifadesi ve Ö10 kodlu öğretmenin örneği aşağıdaki gibidir.

“Denkliği tam anlayanlar şu şekilde iki bütünü belirlenen eş parçalara ayrılabilceği mesela bir pastayı 5 eş parçaya ayırabiliyorsak bir grup öğrenciyi de 5 eş parçaya ayırabiliriz.”(Ö18)

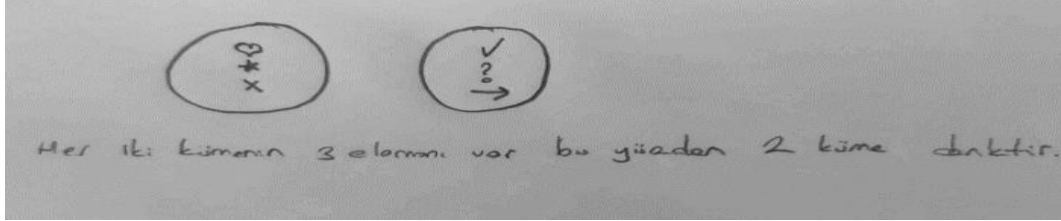


Şekil 1. Ö10 no’lu katılımcının tablo 1’de belirtilen denklik algılarına ilişkin verdiği örnek.

Tablo 1 incelendiğinde bir kısım öğretmenin ifadelerinden öğrencilerinin denklik kavramını farklı bütünlere aynı oranda almak şeklinde anladıkları görülmüştür. Bu öğretmenlerin ifadelerinden miktarca

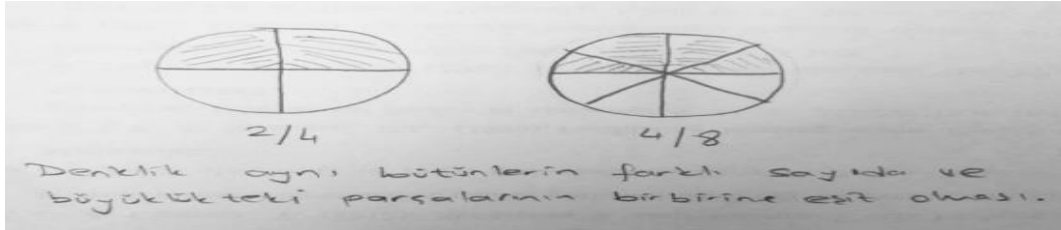
eşitlik, aynı oran, farklı bütün kodları oluşturulmuştur. Öğrencilerin bu anlayışlarının denk küme veya denk kesir kavramları çerçevesinde şekillenmiş olabileceği görülmektedir. Miktarca eşitlik ve farklı bütün kodlarına ilişkin öğretmen ifadeleri ve örnekleri aşağıdaki gibidir:

“Denklik bir bakıma miktar olarak aynı ama şekil olarak farklı parçalardır.” (Ö15)



Şekil 2. Ö15 no’lu katılımcının denkliğe ilişkin vermiş olduğu örnek.

“Kesirlerin denkleğini bütünlerin farklı sayıda ve büyüklükteki parçalarının birbirine eşit olması şeklinde anlıyorlar.” (Ö1)



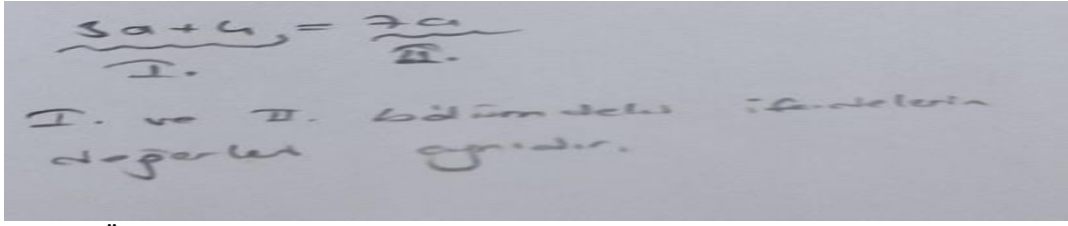
Şekil 3. Ö2 no’lu katılımcının Tablo 1’de ifade edilen “Denklik farklı bütünlerden aynı oranda alınmasıdır.” kategorisine ilişkin verdiği örnek.

Tablo 2. Öğretmenlerin Algılarında Öğrencilerin Eşitlik Tanımları

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
A. Eşitlik işlem komutudur.	Yer değiştirme sembolü	Ö1,Ö4,Ö6,Ö8,Ö13,Ö14 ,Ö20,Ö22,Ö24,Ö2
	İşlem sonucu simgesi	
	Çözüm bulma	
	İşlem yapma	
	İşlemsel tanım	
B. Eşitlik terazinin kefelerinin dengesidir.	İlişkisel tanım	Ö10,Ö11,Ö19
	Denge	
	Terazi	
	Aynı miktar	
C. Eşitlik, sağ ve sol tarafın denkleğidir.	Farklı görüntü	Ö7,Ö16,Ö18
	Miktarca aynılık	
	İfadelerin denk olması	
	Sayısal aynılık	
D. Eşitlik iki tarafın birebir aynılığıdır.	Özdeş olma	Ö9,Ö23,Ö24
	Birebir aynılık	
	İki tarafta da aynı görüntü	

Tablo 2’de öğretmenlerin algılarında öğrencilerin eşitlik kavramı tanımlamaları kategorize edilmiştir. Burada B kategorisine ait kodların, C kategorisine ait kodlarla ilişkili oldukları “eşit ifadelerin” birbirlerine “denk” oldukları göz önüne alındığında bu kodların birbirini açıkladıkları görülmektedir. Tablo 2’de ilişkisel tanım kodu eşitliğin her iki tarafının birbiriyle ilişkili olduğunu eşitliğin bir tarafındaki değişimin öteki tarafı etkilediğini savunan ifadeler için kullanılmıştır. “İlişkisel tanım” adlı koda öğretmenlerin ifadelerinden örnekler aşağıda verilmiştir:

“Eşitlik denince iki tarafın birbiriyle eş değer olmasını anlıyorlar.” (Ö18)



Şekil 4. Ö10 no'lu katılımcının Tablo 2'de belirtilen duruma uygun olarak düşündüğü örnek.

Yine Tablo 2'ye bakıldığında öğretmenlerin ifadelerinden 7. Sınıftaki bazı öğrencilerin eşitliği 'çözüm bulma', 'verilen işlemleri yapma', 'yer değiştirme sembolü' olarak algıladıklarına rastlanılmıştır. Eşitliği bu şekilde algılayan öğrencilerin, öğretmenlerinin ifadelerinden birer kesit aşağıda verilmiştir.

"Şöyle eşittir işaretinin bir tarafında kesinlikle bir sayı olması gerektiğini düşünüyorlar daha açık konuşacak olursam eşittir'i bir işlemin sonucunu yazmak olarak görüyorlar." (Ö8)

"Öğrenci eşitlik sorularında sürekli karşıya göndererek denklemi çözmeye çalışıyor eşitliği yer değiştirme sembolü olarak da görüyor." (Ö4)

Tablo 2'ye bakıldığında öğretmenlerin ifadelerinden, öğrencilerin eşitliği iki tarafın birebir aynılığı olarak algıladıkları görülmüştür. Bu öğretmenlerin ifadelerinden birebir aynılık, iki tarafta aynı görüntü kodları oluşturulmuştur. Aşağıda iki tarafta aynı görüntü koduna yönelik öğretmen ifadelerinden bir kesit verilmiştir:

"Öğrencilerim eşitlikte terazi örneğiyle ele alacak olursam her iki kefede de şekliyle rengiyle kütleleriyle tamamen aynı elmalardan 1'er tane bırakılmak üzere terazinin dengede kalması olarak anlıyorlar." (Ö23)

Tablo 3. Öğretmenlerin Algılarında Öğrencilerin Denklik ve Eşitlik Kavramları Arasındaki İlişki veya Farka Yönelik Düşünceleri

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
A. Denklik, eşitlikten farksızdır.	Öğretmen ve öğrencide kavram karmaşası Kavramları ayırt edememe Kavramsal bilgi eksikliği	Ö2,Ö3,Ö5,Ö8,Ö12, Ö14,Ö19,Ö21,Ö24,Ö17
B. Eşitlik, denklikten daha geneldir.	Kullanım sıklığına odaklanma Kavram yanlışlığı Kavramsal bilgi eksikliği	Ö9,Ö11,Ö15
C. Denklik, eşitlikten daha geneldir.	Eşitlikler sistemi Yeterli kavramsal bilgi Denklik sınıfı Oransal eşitlik	Ö10,Ö16,Ö20,Ö23
D. Denklik ve eşitlik arasındaki ilişki oransallıktır.	Kavram benzerliği Yeterli Kavramsal bilgi Kavramsal bilgi eksikliği	Ö7,Ö1
E. Denklik, eşitlikten daha somuttur.	Soyut kavram Somut Kavram Kavramlar arası ilişki	Ö13

Tablo 3'te öğretmenlerin algılarında öğrencilerin, denklik ve eşitlik kavramları arasındaki ilişki veya farkı nasıl açıkladıklarına yönelik öğretmen görüşleri kategorize edilmiştir. Burada çoğu öğretmen denklik ve eşitliğin aynı şey olduğunu ve öğrencilerin de bu kavramları aynı kabul etme eğiliminde olduklarına belirtmişlerdir. Eşitlik ve denklik arsında bir fark görmemek kavramsal bilgide eksikler olduğundan kaynaklanabilir. Yine bu kavramları öğretmenlerin ve öğrencilerin ifadelerine göre öğrencilerin ayırt edememesi, öğretmenlerdeki kavram karmaşasının öğrencilere de yansıdığını gösterir. Aşağıda kavramları ayırt edememe koduna yönelik öğretmen ifadeleri verilmiştir.

“Eşitlik ve denklik arasında öğrencilerim pek bir fark göremiyor sonuçta ikisi de aynı şeyler mantık olarak ikisi de denge ayrıca zaten denkliği biz onlara eşittir işaretiyle gösteriyoruz onlarda denkliği eşitlik şeklinde anlıyorlar.”(Ö5)

Tablo 3 incelendiğinde öğretmenlerin algılarında öğrencilerin eşitlik ve denklik arasındaki ilişkiyi açıklarken eşitliğin denklikten daha genel olduğunu ifade ettikleri görülmüştür. Denklik kavramının eşitlikten daha genel olduğu ve eşitliği de kapsadığı göz önüne alınca, öğrencilerin denklik ve eşitlik kavramları arasındaki ilişkiyi açıklarken kavram yanlışları olduğu görülebilir. Ayrıca öğretmenler bu kavramlar arası ilişkiyi öğrenciye de bildikleri şekilde aktardıklarını ifadelerinde belirtmişlerdir. Bu ifadelerden öğrencilerde eşitlik ve denklik kavramları hakkında kavram yanlışlarının öğretmenden kaynaklandığı açıktır. Aşağıda ‘kavram yanlışlığı’ koduna yönelik öğretmen ifadelerine yer verilmiştir.

“Ben denk kesirleri anlatırken: ‘Çocuklar denk olan her şey eşittir ama eşit olan her şey denk değildir eşitlik daha kapsayıcı daha geneldir denk kesirlerde araya eşittir işareti koymamızın sebebi de budur.’ diyorum”(Ö9)

Yine Tablo 3 incelendiğinde birkaç öğretmenin ifadelerinde öğrencilerin eşitliği denklikten daha genel kabul etme eğiliminde oldukları ve bu düşüncelerini kullanım ve konularda rastlama sıklığıyla gerekçelendirdikleri görülmüştür. Bu öğretmenlerin ifadelerinden ‘kullanım sıklığına odaklanma’ kodu ortaya çıkmıştır aşağıda bu koda yönelik öğretmen ifadeleri verilmiştir.

“Eşitliği, denklikten daha genel bir kavram olarak düşünüyorlar. Çünkü denkliği sadece kesirlerde görüyorlar ama eşitlik birçok konuda karşılıklarına çıkıyor.”(Ö15)

Yine Tablo 3’e bakıldığında bir kısım öğretmen, öğrencilerin denkliği eşitlikten daha genel olarak kabul ettiklerini belirtmişlerdir. Bu öğretmenlerin ifadelerinden öğrencilerin eşitlik ve denklik arasındaki farkı doğru bir biçimde ifade ettikleri ve bu kavramlara yönelik yeterli kavramsal bilgiye sahip oldukları söylenebilir. Bu öğretmenlerin ifadelerinden eşitlikler sistemi kodu oluşturulmuştur. Öte yandan bazı öğretmenler bir kesre denk birden fazla kesir yazılabileceğinden bahsetmiş ve bu ifadeler sonucu denklik sınıfı kodu oluşturulmuştur. Aşağıda sırasıyla ‘eşitlikler sistemi’ ve ‘denklik sınıfı’ kodlarına yönelik öğretmen ifadelerine yer verilmiştir.

“Denk kesirlerde eşittir işaretini birden fazla kez yazabiliyorken, eşitlikte eşittir işaretini bir kez yazıyor buradan denkliğin daha kapsamlı olduğunu fark ediyor öğrencilerim.”(Ö23)

“Denklik ve eşitlik ilişkisi en bariz şekilde kesirlerin denkliği konusunda ortaya çıkıyor. Bu kavramları anlatırken öğrenciler şunu görüyor bir kesre eşit sadece 1 kesir yazılabilirken bir kesre denk binlerce kesir yazılabilir buradan hareketle eşitliğin daha özel denkliğin ise daha genel olduğunu anlıyor.”(Ö16)

Tablo 3’e bakıldığında bir kısım öğretmen, öğrencilerinin denklik ve eşitlik kavramları arasındaki ilişkiyi ve farkı oransallıktan yola çıkarak açıklayabildiklerini ifade ettikleri görülmüştür. Bu öğretmenlerin ifadelerinden yola çıkarak oransal eşitlik kodu oluşturulmuştur ve öğrencilerin eşitlik ve denklik arasındaki ilişkiyi tam olmasa da doğru bir şekilde açıklayabildikleri söylenebilir. Aşağıda ‘oransal eşitlik’ koduna yönelik öğretmen ifadelerine yer verilmiştir.

“Denkliği eşitlikten ayıran şey iki tarafın birbiriyle oransal eşitliğe sahip olmasıdır öğrencilerime de böyle öğrettim onlarda bu şekilde biliyor.”(Ö7)

Tablo 3 son kez incelendiğinde A, B, E kategorilerinin eşitlik ve denklik arasındaki ilişki ve fark hakkında, eksik veya yanlış ifadelerden ötürü ortaya çıktığı ve bu yönüyle bu üç kategorinin birbiriyle ilişkili olduğu söylenebilir. Öte yandan C ile D kategorileri denklik ve eşitlik kavramları arasındaki ilişkiyi yeterli ve doğru bir biçimde açıklayan ifadelerden oluştuğu ve bu yüzden bu kategorilerin birbiriyle ilişkili olduğu görülebilir. Son olarak ifadeleri E kategorisine örnek olacak Ö13 kodlu öğretmen denkliğin eşitlikten daha somut olduğunu belirtmiştir. Buradan öğretilen kavramsal bilgi eksikliği olduğunu ve bu eksikliği farkında olmadan öğrencilere de aktardığı sonucuna varılabilmektedir. Ö13 kodlu öğretmenin ifadelerinden bir kesit aşağıdaki gibidir:

“Öğrencilerime şöyle bir örnek vererek denkliğin eşitliğe göre daha somut olduğunu açıklıyorum. Mesela anlaştığımız insanlara dengimiz deriz burada denk bir durum söz konusudur ama bu durumu eşitlikle ifade edemeyiz eşitliği sayıları kullanarak ifade ederiz sayılar soyuttur o zaman eşitlikte soyuttur. Öğrencilerimde bu örnekle eşitliğin denklikten daha sayısal daha soyut olduğunu görüyorlar.”(Ö13)

İkinci Alt Probleme İlişkin Elde Edilen Bulgular

“Öğretmenler eşitlik-denklik kavramlarını nasıl tanımlıyorlar?” biçiminde verilen ikinci alt problemin veri analizi sonucunda ulaşılan bulgular ve bu bulgulara ait yorumlar aşağıda verilmiştir.

Tablo 4. Öğretmenler Açısından Denklik Tanımları

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
A. Denk olmak, eşit olmaktır.	Öğretmende kavram karmaşası Kavramları ayırt edememe Kavramsal bilgi eksikliği	Ö2,Ö9,Ö17
B. Denklik ifadelerin oransal eşitliğidir.	Oransal eşitlik İfadelerin en sade hallerinin eşitliği	Ö5,Ö7,Ö11
C. Denklik eşitlikler sistemidir.	Denklik sınıfı En az iki eşitlik	Ö20,Ö23
D. Denklik ortak özelliklere göre sınıflamadır.	Farklı bütün Gruplama Benzer özellikler Denk küme tanımı	Ö10,Ö18
E. Denklik farklı bütünlerden aynı oranda almaktır.	Farklı bütün Miktarca eşitlik Aynı oran	Ö1,Ö8,Ö22,Ö21, Ö3,Ö4,Ö14,Ö16

Tablo 4’te öğretmenler açısından denklik kavramı tanımlamaları kategorize edilmiştir. Burada oransal eşitlik kodu aynı oran ve miktarca eşitliği de açıklamaya yettiği için B kategorisinin E kategorisiyle ilişkili olduğu açıktır. Ayrıca oransal eşitlik kodu orantı tanımına çıkmakta, burada bu algıya sahip öğretmenlerin orantı ve denklığı örtük bir biçimde ilişkilendirebildiğine ulaşılabilmektedir. Aşağıda sırasıyla oransal eşitlik ve miktarca eşitlik kodlarına öğretmenlerin ifadelerinden örnekler verilmiştir.

“Denklik iki tarafın birbiriyle oransal eşitliğe sahip olmasıdır. Vermek istediğim doğru denklik anlayışı denk ifadelerin birbiriyle oranlı bir şekilde eşit olmasıdır.”(Ö7)

“Öğrencilerime vermek istediğim doğru denklik anlayışı kesirler üzerinde miktar olarak aynı şeyi gösterdiğimizi ama elemanların elemanlar derken birimlerin(1 tane yarım 2 tane çeyrek parça) farklı olduğudur.”(Ö3)

Yine Tablo 4’e bakıldığında denk küme tanımı kodunun benzer özellik ve gruplama kodlarıyla ilişkili olduğu bu sebeple D ve E kategorilerinin birbirleriyle ilişkili olduğu görülmektedir. Yine öğretmenlerin denklik kavramını tanımlarken denk kümelerden ve denklik sınıfından faydalandığı ve bu sebeple ‘denk küme tanımı’ ve ‘gruplama’ kodlarının oluşturulduğu görülmektedir. Aşağıda sırasıyla ‘gruplama’ ve ‘denk küme tanımı’ ve kodlarına yönelik öğretmen ifadelerinden birer kesit verilmiştir.

“Denk olmayı da şu şekilde 2 sepette eşit miktarda elma ve yumurta olsun. Sepetlerin birinde yumurta diğerinde elma olsun ve bu sepetlerdeki elma ve yumurtalar 5’er 5’er gruplandırılın burada grup sayıları bakımından yumurtalar elmalara denktirler.”(Ö18)

“Denklik birebir benzer olmasa da aynı işlevi görür, bize aynı şeyi gösterir ve aynı şeyi algılamamızı sağlar.” İfadelerinden sonra yine 2 küme çizip aynı eleman sayılı fakat elemanları farklı bu kümelerin denk olduğunu gösterip somutlaştırıyorum.”(Ö1)

Son olarak Tablo 4’te C kategorisine bakıldığında bir kısım öğretmenin denklik kavramına yönelik bilgilerinin yeterli olduğu ayrıca bu öğretmenlerin eşitlik ve denklik kavramları arasındaki ilişkiyi açıklayabildikleri görülmektedir. Bu öğretmenler denklik kavramını tanımlamak için birden fazla eşitliğin

varlığından bahsettikleri için ‘en az iki eşitlik’ kodu ortaya çıkmıştır. Bu kodu temsil eden ifadelerden bir kesit aşağıda verilmiştir.

“Eğer birden fazla eşitlik durumu varsa bunlar denktir, denklikte birçok eşitlik olması gerekir.”(Ö23)

Şekil 5. Ö23 no’lu katılımcının denklığı eşitlikler sistemi olarak ifade etmesine verdiği örnek.

Öte yandan Tablo 4’te “Denk olmak, eşit olmaktır.” kategorisi bazı öğretmenlerin denklik ve eşitlik kavramları hakkında kavramsal karmaşa yaşadıklarını ortaya çıkarmaktadır. Aşağıda kavram karmaşası koduna yönelik öğretmen ifadelerine yer verilmiştir:

“Denklik; bana göre iki şeyin şekil boyut renk kütle yani her bakımdan birbiriyle aynı olmasıdır. Örnek verecek olursam aynı kahve fincanı takımından çıkan her bir fincan birbiriyle denktir.”(Ö9)

Tablo 5. Öğretmenler Açısından Eşitlik Tanımları

Kategoriler	Kodlar	Öğretmenler
A. Eşitlik sağ ve sol tarafın denkligidir.	Miktarca aynılık İfadelerin denkligi Denklik tanımı	Ö1,Ö6,Ö7,Ö9,Ö13,Ö22
B. Eşitlik terazinin kefelерinin dengesidir.	İlişkisel tanım Denge Terazi	Ö3,Ö5,Ö8,Ö19,Ö24
C. Eşitlik niceliklerin birimlerinin aynı olmasıdır.	Birimlere göre sınıflama Birimlerin aynı olması Niteliksel aynılık	Ö18
D. Eşitlik iki tarafın birebir aynılığıdır.	Özdeş olma Birebir aynılık Miktar ve birimce aynılık Sonuç yazma simgesi	Ö4,Ö10,Ö11,Ö14,Ö16
E. Eşitlik işlem komutudur.	İşlem yapma İşlemsel tanım Öğretmende kavramsal bilgi eksikliği	Ö2

Tablo 5’te öğretmenler açısından eşitlik kavramı tanımlamaları kategorize edilmiştir. Bakıldığında Tablo 2 de verilen kategorilerin bir kısmı Tablo 5’te de görülmektedir. Burada Tablo 2’den farklı olarak C kategorisi (Eşitlik niceliklerin birimlerinin aynı olmasıdır) bulunmaktadır. Tablo 5’te verilen ‘birimlere göre sınıflama’, ‘birimlerin aynı olması’ kodları öğretmenlerin eşitlikle ilgili tanımlamalarından ortaya çıkmıştır. Birimlerin eş olması tek başına, iki şeyin eşit olup olmadığına dair karar vermeye yetmezken, iki şeyin birimce denk olduğuna karar vermeye yeter. Bu durumda bu öğretmenlerin eşitlik kavramını eksik tanımladıkları söylenebilir. Aşağıda birimlerin aynı olması ve birimlere göre sınıflama kodlarına öğretmen ifadelerinden örnekler verilmiştir.

“Bir öğrencinin boyunu başka bir şeyin boyuyla karşılaştırırken burada birimlerin ikisi de cm ise birim olarak eşitliğinden bahsedebiliriz.”(Ö18)

“Eşitlik birimlerden yola çıkarak örnek verecek olursam ağırlıkça eşitlik, uzunluk ölçü birimlerine göre eşitlik, vb.”(Ö18)

Tablo 5’te yer verilen A ve B kategorileri ve bu kategorilere ait kodlara bakıldığında öğretmenlerin eşitlik ve denklik arasındaki ilişkiyi açıklayabildikleri görülmektedir. Burada hem A hem de B kategorisinde yer alan öğretmenler, eşitlik kavramını doğrudan ya da dolaylı olarak sağ ve sol tarafın denkliği veya dengesi olarak açıklamışlardır. Bu öğretmenlerin ifadelerinden yola çıkarak ‘ifadelerin denkliği’ ve ‘denge’ kodları oluşturulmuştur. Aşağıda sırasıyla ifadelerin denkliği ve denge kodlarını temsil eden öğretmen ifadelerine yer verilmiştir.

“İki tarafında birbirine denk olması gerektiğini anlamasını isterim. İki taraftan da aynı kütledeki nesne çıkarıldığında eşitliğin bozulmayacağını anlamasını istiyorum. Birde diyelim ki $2x=14$ ifadesinde x ’i bulabilmek için sayıyı bilinmeyen başkatsayısına bölmek gerektiğini anlamalarını son olarak $3x=2y$ şeklindeki ifadelerde eşitliğin sağlanması için x ve y değişkenlerinin hangi sayılarla orantılı olduğunda eşitlik sağlanır bunu bilmelerini isterim.”(Ö9)

“Öğrencilerimin eşitliği eşit kollu terazide olduğu gibi iki kefenin denge durumu ya da bir cetveli ortasından tuttuğumda yatayda düz durması dengeli durması şeklinde anlamalarını isterim.”(Ö19)

Tablo 5’te D kategorisine bakıldığında öğretmenlerin eşitlik kavramını doğru bir şekilde tanımladıkları görülebilir. Bu kategorinin oluşmasını sağlayan öğretmenler iki nesneyi eşit kabul edebilmenin tek şartının her iki nesnenin tüm özellikleri bakımından aynı olması ile mümkün olacağını belirtmişlerdir. Buna bağlı olarak bu öğretmenlerin ifadeleri ‘birebir aynılık’, ‘özdeş olma’, ‘miktarca ve birimce aynılık’ kodları ile kodlanmıştır. Aşağıda ‘birebir aynılık’ ve ‘miktarca ve birimce aynılık’ kodlarını temsilen öğretmen ifadelerinden birer kesit verilmiştir.

“Öğrencilerimin sahip olmasını istediğim doğru eşitlik anlayışı eşitliği iki tane ifadenin hem niceliksel olarak birbiriyle aynı olması hem içerdiği elemanlar olarak aynı olması şeklinde anlamalarını isterim.”(Ö4)

“Eşitlik ele alınan nesnelerin sayı ve vasıf olarak aynı olmasıdır.”(Ö11)

Tablo 5’e bakıldığında Ö2 şeklinde kodlanan öğretmenin eşitliği işlem komutu olarak tanımladığı görülebilir. Bu durumda Ö2 kodlu öğretmenin eşitliğe dair kavramsal bilgi eksikliği olduğu ve eşitlikle ilgili işlemsel bir tanım yaptığı görülebilir. Tablo 2 de öğretmenlerin algılarında öğrencilerin eşitlik tanımları kategorize edilmiş olup Ö2 kodlu öğretmenin öğrencilerinin eşitlik anlayışına dair ifadeleri, eşitlik işlem komutudur kategorisinde yer almıştır. Bu benzerlik öğrencilerin, öğretmenlerinin eşitlik anlayışından etkilendiklerinden veya öğretmenin öğrencilerle ilgili görüşlerini belirtirken nesnel cevap verememesinden kaynaklanabilir. Aşağıda sırasıyla öğretmenin kendi eşitlik tanımı ve öğrencilerin eşitlik tanımına dair ifadelerine yer verilmiştir.

“Eşitliğin verilen işlemleri sırasıyla yapıp istenen ifadeyi bulmaya yarayan bir işaret olarak anlamları benim için doğru bir anlayıştır.”(Ö2)

“Öğrencilerim eşittir’ i çözüm bulmaya yarayan bir işaret olarak görüyor.”(Ö2)

Tablo 1 ve Tablo 4’e bakıldığında öğretmenlerin ve öğrencilerin algılarında öğrencilerin denklik tanımlarına yönelik kategorilerde benzerlikler ve farklılıklar olduğu görülmüştür. Hem Tablo 1 hem de Tablo 4’te “Denk olmak, eşit olmaktır.”, “Denklik ortak özelliklere göre sınıflamadır.”, “Denklik farklı bütünlerden aynı oranda almaktır.” kategorilerinin yer aldığı görülmektedir. Bu benzerliğin sebebi bir kısım öğretmenin öğrenciler hakkında yöneltilen sorulara nesnel cevap vermemesinden veya öğrencilerin denklik kavramını kendilerinin anlattıkları gibi algıladıklarını düşünerek cevap vermelerinden ya da öğrencilerin denkliği öğretmenlerinin anlattığı gibi anladıklarından kaynaklanabileceği düşünülmektedir. Bu düşünceyi desteklemek için Tablo 1 ve Tablo 4’te benzer kategorilerin karşısındaki öğretmen kodları incelenebilir. Örneğin ‘Denklik ortak özelliklere göre sınıflamadır.’ kategorisi Tablo 1 ve Tablo 4’te yer almakta olup ifadeleriyle bu kategorilerin ortaya çıkmasını sağlayan öğretmenler Ö10 ve Ö18 kodlu öğretmenlerdir. Aşağıda Ö10 kodlu öğretmenin kendi denklik tanımı ve öğrencilerinin denkliği nasıl tanımlayabileceklerine dair ifadelerine kanıt amaçlı yer verilmiştir.

“Mesela elimde 1 defter ve 1 silgi var. Bunlar çokluk bakımından denktir.(Ö10)”

“Öğrencilerim denk olmayı ele alınan çoklukların belirli özelliklerinin aynı olması örneğin farklı elemanlara sahip iki kümenin eşit sayıda elemana sahip olması şeklinde anlıyorlar.(Ö10)”

Öte yandan Tablo 1’ de görülüp Tablo 4’te görülmeyen kategori “Öğrenciler denkliği anlamıyor ve tanımlayamıyorlar” şeklindedir. Yine Tablo 4’ te görülüp, Tablo 1’ de görülmeyen kategoriler “Denklik eşitlikler sistemidir”, “Denklik ifadelerin oransal eşitliğidir.” şeklindedir. Bu farklılıkların sebepleri arasında öğretmenlerin denklik kavramı hakkında daha derin bilgiye sahip olmaları öğrencilerin bilgilerinin daha yüzeysel olması ve öğretmenlerin öğrenciler hakkındaki soruları cevaplarken kendi bilgileri ve öğrencilerin fikirlerini ayırt etmeleri sayılabilir. Ö7 kodlu öğretmenin öğrencilerinin denkliği nasıl tanımladıkları ve kendilerine göre doğru denklik tanımının ne olduğunu açığa çıkaran bir soruya vermiş olduğu cevap aşağıdaki gibidir.

“Maalesef öğrencilerim denk olma ifadesinden pek bir şey anlamıyor. Zaten öğrencilerim denkliği kesirlerde görüyor fakat denklikle ilgili yorumda bulunamıyorlar. Vermek istediğim doğru denklik anlayışı denk ifadelerin birbiriyle oranlı bir şekilde eşit olmasıdır.”(Ö7)

Tablo 5 ve Tablo 2’ye bakıldığında öğretmenlerin ve öğretmenlerin algılarında öğrencilerin eşitlik tanımlarına yönelik kategorilerde benzerlikler olduğu görülmüştür. Bu benzerliklerin sebebi bir kısım öğretmenin öğrenciler hakkında yöneltilen sorulara nesnel cevap vermemesinden veya öğrencilerin eşitlik kavramını kendilerinin anlattıkları gibi algıladıklarını düşünerek cevap vermelerinden kaynaklanabileceği gibi öğrencilerin eşitlik kavramını öğretmenlerinin anlattığı gibi anlamasından da kaynaklanabilir. Bu düşüncüyü desteklemek için Tablo 2 ve Tablo 5’ te yer alan benzer kategorilerden “Eşitlik sağ ve sol tarafın denkliğidir.” kategorisinin karşısında yer alan Ö7 kodlu öğretmenin ifadelerinden bir kesit verilmiştir.

“Öğrenci eşitliğin her iki tarafının birbirine denk olduğunu anlıyor.”(Ö7)

“Bana göre doğru eşitlik anlayışı iki tarafında birbirine denk olması gerektiğidir.”(Ö7)

Öte yandan Tablo 2’de ‘Eşitlik işlem komutudur.’ kategorisinde yer alan Ö22 kodlu öğretmen, Tablo 5’te ‘Eşitlik sağ ve sol tarafın denkliğidir.’ kategorisinde yer almıştır. Bu farklılığın sebebi eşitliğe dair öğretmenlerin algılarındaki öğrenci tanımının, öğretmenin tanımından farklı olmasıdır. Buradan Ö22 kodlu öğretmenin, öğrencilerin bu konu hakkındaki fikirleri üzerine konuşurken kendi bilgisini katmamasından olabilir. Aşağıda Ö22 kodlu öğretmenin öğrencilerinin eşitliği nasıl tanımladıkları ve kendilerine göre doğru eşitlik tanımının ne olduğuna dair ifadelerine yer verilmiştir.

“Öğrencilerim $2x=10$ ifadesinde x ’i bulmak için bir işaret olarak görüyor eşitliği.”(Ö22)

“Doğru anlayış eşitliğin her iki tarafında aynı sayının bulunmasıdır.” (Ö22)

Tartışma ve Sonuç

Bu araştırma kapsam ve sınırlılığında, öğretmenlerin öğrencilerin ne düşündükleri hakkında görüşleri nesnel olmasa bile öğretmenlerin bu görüşleri doğrultusunda öğretime devam ettikleri veya edebilecekleri kabul edilmektedir. Bu durumda ifade edilen görüşlerin öğrencilerin matematik öğrenimini etkileyeceğinden dikkate alınması gerektiği ve bu açıdan önemli olduğu kabul edilebilir. Bu bakış açısıyla araştırmada birinci alt probleme ilişkin bulgular ele alındığında (“Öğretmenlere göre 7.sınıf öğrencileri eşitlik-denklik kavramlarını ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi ve farkı nasıl ifade ediyorlar?”), baskın olarak öğretmenlerin gözünden öğrencilerin denklik ve eşitliği birbirinden tam olarak ayırt edemedikleri bu sebeple eşitlik ve denkliği aynı kabul etme eğiliminde oldukları görülebilir. Bu sonuç Toygan, Gök ve Cancan (2019)’ın ulaştığı “ortaokul öğrencileri denk kesir kavramı ile ilgili genellikle yüzeysel bilgilere sahiptirler”, sonucuyla tutarlılık göstermektedir. Bununla beraber bu alt problemde kavramsal olarak doğru

tanımlamaya yakın yaklaşımların da olduğu görülebilir. ”Denklik farklı bütünlerden aynı oranda almaktır.” kategorisi kavramsal olarak öğrencilerin denkliğe ilişkin yaklaşık olarak bir sezgilerinin var olduğunu göstermektedir. Ancak bu durumun öğretmen gözlemleri açısından anlam kazandığı unutulmamalıdır. Yine birinci alt probleme ilişkin bulgular incelendiğinde öğretmenlerin ifadelerinde öğrencilerin baskın olarak eşitliği işlem komutu olarak algıladıkları, eşitliğe işlemsel olarak baktıkları sonucuna erişilebilir. Bu sonuç Karakaya (2021)’nın ulaştığı sekizinci sınıf öğrencilerinin matematiksel eşitlik bilgisine kavramsal düzeyde sahip olmadıkları ve denklem çözerken işlemsel bilgiyle hareket ettikleri sonucuyla tutarlıdır. İşlemsel anlayışın ortaokulda hâkim olmasının nedenleri arasında; öğrencilerin ilkokuldan kalma alışkanlıklarını devam ettirmesi, ilkokul ve ortaokul ders materyallerinin eşitliği işlemsel yorumu destekleyen bağlamlarda sunması, ortaokul müfredatında eşitliğe açıkça odaklanılmaması, öğretmenin alan bilgisinin yetersizliği ve öğrencilerin eşitlikle ilgili aynı tip sorulara ($3+5=?$) maruz kalması gibi faktörler sayılabilir. Bu faktörlerin öğrencilerin ortaokul sonlarına kadar “eşittir” işaretinin gelişmiş olmayan yorumlarını sürdürmelerine neden olduğu tahmin edilmektedir. Öte yandan eşitliği sağ ve sol tarafın denkliği olarak gören öğrencilerin de var olduğu ve eşitliğe yönelik ilişkiisel anlayışın, ortaokul 7. Sınıf öğrencilerinde görülebildiği söylenebilir. Bu sonuç, çocukların sembolik olmayan bir bağlamda denklik üzerine ilişkiisel bir şekilde akıl yürütebildikleri sonucuyla tutarlıdır (Cuellar, Boily, Lessard ve Mailhot, 2016). Bu bulgudan hareketle eşitliğe yönelik asgari düzeyde bilgiye sahip öğrencilerin varlığından söz edilebilir. Tüm bu bulgular ışığında öğretmenlerin görüşlerinden ortaokul 7. Sınıf öğrencilerinde eşitlik kavramına yönelik yanlış ya da sınırlı kavrayışın mevcut olduğu anlamı çıkarılabilir. Benzer sonuçların daha önceki araştırmalarda da bulunduğu göz önüne alındığında, birçok öğrencinin “eşittir” işaretine işlemsel açıdan sahip olduğu bunun yanı sıra “eşittir” işaretine ilişkin ilişkiisel anlayışın da varlığı bulgusu şaşırtıcı değildir (Kieran, 1981; McNeil, 2007; Rittle-Johnson ve Alibali, 2001; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg ve Stephens, 2005; Alibali, Knuth, Hattikudur, McNeil ve Stephens, 2007; Kusuma, Subanti ve Usodo, 2018; Simsek, Xenidou-Dervou, Jones ve Karadeniz, 2019).

Baki (2008)’ye göre kavram bilgisi sadece kavramı tanımak veya kavramın tanımını ve ismini bilmek değil, aynı zamanda kavramlar arasındaki ilişkiyi ve karşılıklı geçişleri görebilmektir. Eşitlik ve denklik kavramına ortaokul müfredatında direkt ya da dolaylı olarak yer verilmektedir. Öğrencilerin cebirdeki hazırlıkları ve nihai başarıları matematiksel denklik anlayışı ve eşittir işaretini anlama çabalarına bağlıdır (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg ve Stephens, 2005). Bu yüzden eşitlik ve denklik kavramları arasındaki ilişkinin farkında olmanın cebir öğrenimini olumlu yönde etkileyeceği beklenir. Bu araştırmanın bulguları göz önüne alındığında öğretmenlerin gözünde öğrencilerin denklik ve eşitlik kavramları arasındaki ilişkiyi/farkı yanlış ya da eksik açıkladıkları ve bu kavramları birbiriyle karıştırdıkları görülmektedir. Öğretmenlerin görüşlerinde öğrencilerin geneli denklik ve eşitlik arasında bir fark olmadığını veya eşitliğin denklikten daha genel olduğunu düşündükleri görülmektedir. Öğrencilerin eşitlikle denkliği aynı kabul

etmelerindeki sebepler arasında ortaokul müfredatında denkliği belirtmek için eşitlik işareti kullanılması denklik işaretinin ortaokulda kullanılmaması bir neden olabilir. Yine öğretmenlerin görüşlerinde öğrencilerin eşitliğin denklikten daha genel olduğunu ve denkliğin eşitlikten daha somut olduğunu düşünmek gibi kavram yanlışlarına sahip olabilecekleri görülebilir. Buradan öğrencilerin denklik ve eşitlik kavramları arasındaki ilişkiyi açıklayabilecek kadar kavramları yeterli düzeyde tanımadıkları söylenebilir. Altun (2008)'a göre, matematik konuları arasında güçlü bir sıralı yapı olduğundan herhangi bir kavram onun ön şartı durumundaki diğer kavramlar öğrenilmeden kazandırılmaz. Eşitlik kavramının özümsemeden, denklik kavramının öğretiminin yapılması, öğrencilerin eşitlik ve denklik kavramları arasındaki ilişkileri kuramamalarının en önemli nedeni olarak görülebilir. Bunlarla birlikte ortaokul 7. Sınıf düzeyinde denklik ve eşitlik arasındaki ilişkiyi ve farkı ayırt edebilen öğrencilerin var olduğu bulgusuna da öğretmenlerin görüşlerinden ulaşılmaktadır. Bu öğrencilerin denkliğin eşitlikten daha genel olduğu ve denklikle eşitlik arasında oransallığa dayalı bir ilişkinin olduğuna dair yeterli kavramsal bilgiye sahip oldukları görülmektedir.

Öğretmenlerin denklik ve eşitlik kavramları hakkındaki bilgilerinin, öğrencilerin bu kavramlara yönelik algılarını etkileyebildiğinden ve öğretmenlerin öğrenciler hakkında yöneltilen sorulara nesnel olarak cevap verip vermediklerini ortaya çıkarabileceğinden önemlidir. Ayrıca daha önceki çalışmalar öğretmenin uygun öğretimsel müdahalelerinin, öğrencilerin eşitlik anlayışını geliştirdiğini göstermektedir (Mcneil, Hornburg, Brletic-Shiple ve Matthews, 2019). Bu durumdan hareketle ikinci alt probleme (“Öğretmenler eşitlik-denklik kavramlarını nasıl tanımlıyorlar?”) ilişkin bulgulara bakıldığında, denklik kavramını öğrencilerde olduğu gibi eşitlikten ayırt edemedikleri veya denklik kavramını eksik-hatalı tanımladıkları söylenebilir. Öğretmenlerin denkliği tıpkı öğrenciler gibi eşitlik olarak tanımladıkları görülmektedir. Bu bulgudan hareketle öğretmenlerin denklikle ilgili bilgilerinin kısıtlı olduğu ve kavramsal karmaşa yaşadıkları ayrıca bu karmaşayı öğrencilere de aktardıkları söylenebilir. Temur Doğan (2011)'ün ulaştığı öğretmenlerle kesirler konusunda (sıralama, payda eşitleme, kesirlerde denklik, kesrin kesrini bulma) yapılan görüşmede öğretmenlere sorulan sorulara, kimi zaman yanlış kimi zaman eksik bilgi vermişlerdir sonucuyla tutarlıdır. Öte yandan denklik kavramına ilişkin, eşitlikler sistemi veya farklı bütünlerden aynı oranda almak gibi doğru tanımların da mevcut olduğu görülebilir. Öğretmenlerin eşitlik kavramını genel anlamda sağ ve sol tarafın denkliği veya terazinin kefelerinin dengesi olarak gördükleri söylenebilmektedir. Bunun yanı sıra bir kısım öğretmende eşitliğe dair işlem komutu veya niceliklerin birimlerinin aynı olması şeklinde eksik ya da hatalı tanımların da var olduğu çıkarımı yapılabilir. Bu doğrultuda öğretmenlerin genelinde eşitlik kavramına yönelik ilişkisel anlayışın var olduğu bunun yanı sıra eşitliğe işlemsel olarak bakan öğretmenlerin de var olduğu söylenebilir. Bu sonuçlardan öğretmenlerin temel matematiksel kavramları tanımlamalarında eksikliklerin var olduğu bu eksiklerin kavramları yeterince özümsememelerinden kaynaklandığı düşünülebilir. Kar, Çiltaş ve Işık (2011)'in ulaştığı öğretmenlerin

denklik sınıfı, bağıntı, fonksiyon gibi temel matematiksel kavramları tanımlarında eksikler mevcuttur sonucuyla tutarlıdır.

Bu araştırmanın bulguları ışığında gerek ortaokul matematik öğretmenlerinin ve gerekse de ortaokul öğrencilerinin eşitlik ve denklik kavramlarına istenilen düzeyde sahip olmadıkları, en azından yapılan bu araştırma kapsamında durumun böyle olduğu kabul edilebilir. Bu durumda özellikle denklik algıları yeterli bir düzeyde gelişmeyen öğrencilerin denklik kavramının düşünsel olarak kullanılacağı problemlerde istenilen başarıyı gösterememeleri olağan karşılanmalıdır. Bununla beraber matematiğin sistematik yapısı göz önüne alındığında öğrencilerin aynı kavramsal yapıyı ilgilendiren matematik konularında da olumsuz bir şekilde etkileneceği ve yetersiz öğrenme ile sonuçlanabilecek durumlarla karşılaşacağını tahmin etmek yanlış olmayacaktır. Tüm bu durumlar göz önüne alındığında özellikle öğretmen eğitiminde bu kavramların yeterli düzeylerde ele alınmasının gelecekte öğrencilerin eğitimini olumlu etkileyeceğini beklemek mümkündür.

Öneriler

Bu araştırma 7. Sınıf derslerine giren 24 öğretmenle gerçekleştirilmiş ve öğretmenlerin gözünde öğrencilerin denklik algısı sorgulanmıştır. Benzer kavramlara dair sorgulamaların doğrudan öğrencilerle yapılmasının literatüre katkı sağlayabileceği düşünülmektedir.

Lisans Bilgileri

Siirt Eğitim Dergisi'nde yayınlanan eserler Creative Commons Atıf-Gayri Ticari 4.0 Uluslararası Lisansı ile lisanslanmıştır.

Copyrights

The works published in Siirt Journal of Education are licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

Etik Beyannamesi

Bu çalışmada “Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi” kapsamında belirtilen kurallara uyulduğunu ve “Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler” başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbirini gerçekleştirmediğimizi beyan ederiz. Aynı zamanda yazarlar arasında çıkar çatışmasının olmadığını, tüm yazarların çalışmaya katkı sağladığını ve her türlü etik ihlalinde sorumluluğun makale yazarlarına ait olduğunu bildiririz.

Etik Kurul İzin Bilgileri

Etik kurul adı: Siirt Üniversitesi Etik Kurulu

Etik kurul karar tarihi: 25/12/2020

Etik kurul belgesi sayı numarası: 107 – Oturum Sayısı

Kaynakça

- Alibali, M. Knuth E., Hattikudur S., McNeil, N. & Stephens, A. (2007). A Longitudinal Examination of Middle School Students' Understanding of the Equal Sign and Equivalent Equations, *Mathematical Thinking And Learning*, 9(3), 221–247.
- Altun, M. (2008). *Liselerde matematik öğretimi* (1. Baskı). Bursa: Aktüel Yayıncılık.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* (4. Baskı). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.
- Baltacı, A. (2019). Nitel araştırma süreci: Nitel bir araştırma nasıl yapılır?. *Ahi Evran Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 5(2), 368-388.
- Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook On Research Of Teaching And Learning* (pp. 296–333). New York: McMillan.
- Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic & Algebra In Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions, *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293–316.
- Creswell, J. W., (2017). *Karma yöntem araştırmaları tasarımı ve yürütülmesi*. Ankara: Anı Yayıncılık.
- Cuellar, NSA., Boily, M., Lessard, G., & Mailhot, D. (2016). The relationship between equivalence and equality in a nonsymbolic context with regard to algebraic thinking in young children, *Mathematics Education in the Early Years*, 309-324,2016.
- Dede, Y., & Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir?, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 180-185.
- Deveci, A. (2021). *Sorgulayıcı öğrenme ve problem çözme yoluyla oran orantı konusundaki kavram yanlışlarının giderilmesi* [Yüksek lisans tezi]. Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya.
- Ertuna, L., (2013). *İlköğretim 4-7. sınıf öğrencilerinin denk kesirlerin sembolik ve grafiksel temsillerini ilişkilendirme becerilerinin incelenmesi* [Yüksek Lisans Tezi], Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bolu.
- Kaput, J. J. (1995). Long-term algebra reform: Democratizing access to big ideas. In C.B. Lacampagne, W. Blair, & J. Kaput (Ed.). *The Algebra Initiative Colloquium* (pp. 33-52). Washington, DC: U.S. Department of Education.
- Kar, T., Çiltaş, A., & Işık, A. (2011). Cebirdeki kavramlara yönelik öğrenme güçlükleri üzerine bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 19(3), 939-952.
- Karakaya, B. (2021). *8. sınıf öğrencilerinin denklemlerde eşitlik kavramına ilişkin sahip oldukları kanıt şemalarının matematiksel bilgi türleri açısından incelenmesi* [Yüksek lisans tezi]. Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317–326.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In: D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 390-419). New York: Macmillan.
- Kieran, C., & Martínez-Hernández, C. (2022). Coordinating invisible and visible sameness within equivalence transformations of numerical equalities by 10- to 12-year-olds in their movement from computational to structural approaches. *ZDM – Mathematics Education* (2022), 54:1215–1227.

- Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & Variable1. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(1), 68-76.
- Kusuma, N., Subanti, S. & Usodo, B. (2018). Students' misconception on equal sign, *Journal of Physics: Conference Series*, 1008(2018), 1-6.
- Lincoln, Y. S., & Guba, E.G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Sage: Newbury Park, CA.
- Ladson-Billings, G. (1998): It doesn't add up: African American students' mathematics achievement. In: C. E. Malloy & L. Brader-Araje (Eds.), *Challenges in the mathematics education of African American children: Proceedings of the Benjamin Banneker Association Leadership Conference* p. 7-14. Reston, VA: NCTM.
- Langrall, C. W., & Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars; Developing proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(4), 254-261.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning, In J. Hiebert and M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- McNeil, N. M., (2007). U-shaped development in math: 7-year-olds outperform 9-year-olds on equivalence problems, *Developmental Psychology*, 43(3), 687-69.
- McNeil, N. M., Hornburg, C. B., Brletic-Shipley, H. ve Matthews, J.M., (2019). Improving children's understanding mathematical equivalence via an intervention that goes beyond nontraditional arithmetic practise. *Journal of Educational Psychology*, 111(6),10-23.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NTCM.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process, *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346.
- Saldana, J., (2019). Nitel araştırmacılar için kodlama el kitabı (Çev. A.Tüfekci Akcan ve S. N. Şad), Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.
- Simsek, E., Xenidou-Dervou, I., Karadeniz, I., & Jones, I (2019). The conception of substitution of the equals sign plays a unique role in students' algebra performance, *Journal of Numerical Cognition*, 5(1), 24-37.
- Skemp, R. (1986). *The psychology of learning mathematics* (2nd ed.). London: Penguin Books.
- Temur Doğan, Ö. (2011). Dördüncü ve beşinci sınıf öğretmenlerinin kesir öğretimine ilişkin görüşleri: fenomenografik araştırma. *Dumlupınar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, (29).
- Toygan, T., Gök, M., & Cancan, M. (2019). Altıncı sınıf öğrencilerinin denk kesir kavramına ilişkin soyutlama düzeyleri, 3. Uluslararası Sosyal ve Beşeri Bilimler Kongresi Tam Metin Kitabı, syf.768-76.
- Yenilmez, K., & Teke, M. (2008). Yenilenen matematik programının öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerine etkisi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9(15), 229-246.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma* (5 Baskı). Ankara: Seçkin Yayınları.
- Walkoe, J., & Levin, M. (2020). Seeds of algebraic thinking: Towards a research agenda. *For the Learning of Mathematics*, 40(2), 27-31.