Preliminary Steps in Proportional Reasoning: Linking and Iterating Units

Seçil YEMEN KARPUZCU, Kütahya Dumlupınar University, ORCID ID: 0000-0002-2150-000X
Rukiye AYAN CİVAK, İzmir Demokrasi University, ORCID ID: 0000-0002-1278-0257
Mine IŞIKSAL BOSTAN, Middle East Technical University, ORCID ID: 0000-0001-7619-1390

Abstract

In the context of proportional reasoning, this study aims to examine the representations that seventh-grade students use to form composite units for quantities that form ratios, to link the composite units they have formed, and to iterate these linked composite units. Therefore, this study explains the extent to which students use the representations, and how they move from informal representations to formal representations while linking composite units and iterating linked composite units. This study is part of a three-year research project in which the design-based research model was used to develop students' proportional reasoning. The purposefully sampled participants in this study are seventh-grade students with their middle school mathematics teacher working in a public school in the Ankara province of Türkiye. The data of this study are the written answers given to an achievement test containing extended short answer questions and a semi-structured interview with the individual students after the test. The test was applied at the end of the designed teaching implementation. The findings showed that the students primarily used pictorial representations to solve problems related to linking composite units and iterating linked composite units. In addition, the students used tabular and numerical representations. Moreover, while using these representations, the students could use two integrated representation types (e.g., pictorial-numerical). In addition, when the students presented solutions to a question in different ways, they used two different representations.

Keywords: proportional reasoning, representations, middle school students, case study

Inonu University Journal of the Faculty of Education
Vol 24, No 2, 2023
pp. 1271-1300
DOI
10.17679/inuefd.1226508

Article Type
Research Article

Received
29.12.2022

Accepted
03.09.2023

Suggested Citation

Yemen-Karpuzcu, S., Ayan-Civak, R., Işıksal-Bostan, M. (2023). Preliminary steps in proportional reasoning: linking and iterating units, *Inonu University Journal of the Faculty of Education*, *24*(2), 1271-1300. DOI: 10.17679/inuefd.1226508

This research is an extended version of the paper presented at the International Conference on Science, Mathematics, Entrepreneurship, and Technology Education in 2019.

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

The roots of proportional reasoning come from linking composite units and iterating composite units rather than repeated addition. Forming composite units by matching the quantities on a one-to-one or one-to-many bases, linking these composite units, and iterating these linked composite units can be considered an essential and fundamental mental process required for proportional reasoning (Nunes et al., 2010). In addition, Duval (1999) stated that the basic requirements are comparing similar representations of the same type and converting from one type to another in a representation to parse valid values in a mathematical understanding.

Behr et al.'s (1983) multiple representations framework as an interactive model for using representational systems has guided this study. More specifically, students can think of different representational patterns in different parts of a problem while solving that problem. Therefore, solution processes in different types of problem-solving experiences often involve transitions between various representations (Lesh & Doerr, 2003). Lesh and Doerr (2003) stated that creating meaning about conceptual systems is distributed in various representational environments. The current study focuses on representations that are used by students in the first step skills of proportional reasoning, the transitions in and between them, and their transformations to each other.

Purpose

This study aims to explore students' use of representations for linking composite units and iterating linked composite units. In this regard, we examined the extent that students used multiple representations and how they moved from informal representations to more formal ones while linking and iterating. The findings of this study regarding the use of individual representation can be considered in terms of classroom learning outcomes of a currently implemented set of instructional activities (i.e., Ayan-Civak et al., 2022).

Method

The research questions are "What are the representations students use when linking composite units and iterating linked composite units?" and "to what extent do students use these representations in pictorial and verbal problems?". As a case study (Yin, 2009), the case is the seventh graders and their representations of big ideas for early proportional reasoning. The participants are 31 students (15 girls, 16 boys) in a seventh-grade class in a public school. The data collection tool is a post-test containing 22 open-ended and short-answer questions. The test consists of 13 picture-involved and nine verbal problems. Four types of embedded analysis units based on the multiple representations framework have been introduced. We analysed data under four representations themes: pictorial, numerical (specifically symbolic representations), pictorial-numerical, and tabular (Table 2). Thus, we made a descriptive presentation through conceptually ordered displays (Miles & Huberman, 1994). After the primary-level descriptive codes were determined, the answers of all students were analysed descriptively through codes and sub-codes under four themes using the secondary-level code lists.

Findings

From the data analysis, the representations were presented under four headings: Pictorial, Numeric, Pictorial-Numeric, and Tabular. The pictorial included pictorial grouping and pictorial matching categories. In pictorial grouping, students grouped or circled the pictures of the quantities given in the problem. Pictures of two quantities given in the problem or the grouped pictures were matched in pictorial matching. The Numeric included: one of four operations, operational grouping and iteration, build-up, and writing directly numerical value. The Pictorial-numeric included: pictorial-numerical operation and pictorial-counting. The Tabular included typical table and table-like representation categories.

Under Pictorial grouping, the most frequently used grouping was 'grouping/rounding pictures of one quantity only by a given ratio', which is also used in word problems. As the other Pictorial representation, pictorial matching emerged under 'mapping the groupings of pictures of two quantities according to the ratio/new ratio' and 'mapping the numerical value of another quantity to each group by grouping the pictures of a quantity according to the ratio/new ratio and considering this ratio and mental operations. The Numeric type 'one of four operations' was used in pictorial and word problems. The other numeric types were mainly used in word problems. Under Pictorial-Numeric, both pictorial-numerical operation and pictorial-counting types were used in pictorial problems. Students integrated pictorial grouping and operations (addition/multiplication) and grouping and a counting rhyme.

Discussion & Conclusion

Considering the representations used here and the transition between representations, the idea that the basis of proportional reasoning is the understanding of linking composite units and iterating of linked-composite units and multiplicative thinking is supported by the results of this study (Battista & Borrow, 1995; Nunes et al., 2010; Steffe, 1994). Therefore, we concluded that students used informal tools more in questions about the first steps of proportional reasoning. We also concluded that after an instruction in which meaningful representations are considered, students could develop solutions for proportional reasoning problems by using representations without the need for a memorized algorithm. In addition to studies examining the change in students' proportional understanding (e.g., Ayan Civak et al., 2023), an in-depth examination of all their representations after a teaching implementation may guide research on proportional thinking and classroom mathematical practices.

Orantısal Akıl Yürütmeye İlk Adım: Birimleri Bağlama ve Yinelemedeki Temsiller

Seçil YEMEN KARPUZCU, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, ORCID ID: 0000-0002-2150-000X
Rukiye AYAN CİVAK, İzmir Demokrasi Üniversitesi ORCID ID: 0000-0002-1278-0257
Mine IŞIKSAL BOSTAN, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, ORCID ID: 0000-0001-7619-1390

Öz

Bu çalışmanın amacı orantısal akıl yürütme bağlamında, yedinci sınıf öğrencilerinin oran oluşturan çokluklara yönelik birleşik birimler oluşturmak, oluşturdukları birleşik birimleri birbirine bağlamak ve bu bağlı birleşik birimleri yinelemek için kullandıkları temsilleri incelemektir. Bu kapsamda, bu çalışmada birleşik birimleri bağlarken ve bağlı birleşik birimleri yinelerken, öğrencilerin temsilleri ne ölçüde kullandıkları ve informel temsillerden formel temsillere nasıl geçtikleri açıklanmıştır. Bu çalışma öğrencilerin orantısal akıl yürütmelerini desteklemek için varsayıma dayalı bir öğrenme rotasının geliştirildiği ve tasarı tabanlı araştırma modelinin kullanıldığı üç yıllık bir araştırma projesinin bir parçasıdır. Bu çalışmada amaçlı örneklem ile Ankara'da bir devlet okulunda çalışan bir ortaokul matematik öğretmeni ve onun yedinci sınıf öğrencileri katılımcılar olarak belirlenmiştir. Bu çalışmanın verileri, tasarlanan bir öğretim uygulaması sonunda elde edilmiştir. Veriler, uygulama sonrasında öğrencilere uygulanan açık uçlu sorular içeren teste verilen yazılı cevaplar ve öğrencilerle test sonrası yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerdir. Bu test bir ders saati süresince uygulanmıştır. Bulgular, bu öğrencilerin birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme ile ilgili problemleri çözmek için çoğunlukla resimsel temsilleri kullandıklarını ortaya koymuştur. Ayrıca, bulgular öğrencilerin tablo ve sayısal temsilleri de kullandıklarını göstermiştir. Dahası, öğrenciler orantısal akıl yürütmede bu temsilleri kullanırken, iki temsil türünü bütünleşik olarak (ör. resimsel-sayısal) birlikte kullanabilmektedir. Bunlara ek olarak, bir soruya farklı yollardan çözümler sunduklarında öğrencilerin iki ayrı temsili de kullandıkları belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: orantısal akıl yürütme, temsiller, ortaokul öğrencileri, durum çalışması

İnönü Üniversitesi
Eğitim Fakültesi Dergisi
Cilt 24, Sayı 2, 2023
ss. 1271-1300
DOI
10.17679/inuefd.1226508

Makale Türü
Araştırma Makalesi

Gönderim Tarihi
29.12.2022

Kabul Tarihi
03.09.2023

Önerilen Atıf

Yemen-Karpuzcu, S., Ayan-Civak, R., Işıksal-Bostan, M. (2023). Orantısal akıl yürütmeye ilk adım: birimleri bağlama ve yinelemedeki temsiller. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(2), 1271-1300. DOI: 10.17679/inuefd.1226508

Bu araştırma Uluslararası Fen, Matematik, Girişimcilik ve Teknoloji Eğitimi Kongresi'nde 2019 yılında sunulan bildirinin genişletilmiş halidir.

Orantısal Akıl Yürütmeye İlk Adım: Birimleri Bağlama ve Yinelemedeki Temsiller

Orantısal akıl yürütme, özellikle ilkokul ve ortaokul matematik öğretim programlarında bulunan birçok matematiksel kavramın merkezinde yer almaktadır. Bununla birlikte, tüm seviyelerdeki öğrencilerin orantısal akıl yürütme problemlerine cevap vermede ve oran-orantı kavramlarını anlamlandırmada zorlandıkları birçok çalışmada rapor edilmiştir (Atabaş ve Öner, 2017; Ben-Chaim vd., 1998; Kahraman vd., 2019; Kaput ve West, 1994; Karplus vd., 1983; Misailidou ve Williams, 2003; Mersin, 2018; Resnick ve Singer, 1993; van Dooren vd., 2010). Örneğin, Ben-Chaim ve diğerleri (1998) yedinci sınıf öğrencilerinin orantısal akıl yürütme problemlerinde yalnızca sayılara odaklandıklarını, bu sayılarla anlamsız işlemler yaptıklarını ve oranı oluşturan çokluklardan yalnızca birine odaklandıklarını belirtmiştir. Diğer bir çalışmada ise 10-13 yaş aralığındaki öğrencilerin orantısal akıl yürütme problemlerinin cevabına ulaşmak için rastgele işlemler (yarısını bulma, iki katını alma vb.) yaptıkları bulunmuştur (Misailidou ve Williams, 2003). Daha güncel bir çalışmada, beş, altı ve yedinci sınıf öğrencilerinin orantısal akıl yürütme ile ilgili problemlerde niceliklere dikkat etmeden nitel ve tahmine dayalı stratejiler kullandıkları belirtilmiştir (Mersin, 2018).

Tüm bu sorunların ötesinde, uzun yıllar boyunca yapılan araştırmalarda orantısal akıl yürütme ile ilgili olarak karşımıza çıkan en büyük zorluk orantısal ilişkiler için çarpımsal düşünme yerine toplamsal düşünmenin uygulanmasıdır (Atabaş ve Öner, 2017; Ben-Chaim vd., 1998; Duatepe vd., 2005; Fernández vd., 2012; Harel vd., 1994; Kahraman vd., 2019; Kaplan vd., 2011; Kaput ve West, 1994; Karplus vd., 1983; Mersin, 2018; Misailidou ve Williams, 2003; Noelting, 1980a, 1980b; Özgün-Koca ve Altay, 2009; Piaget ve Beth, 1966; Piaget ve Inhelder, 1975; Resnick ve Singer, 1993; Tourniaire ve Pulos, 1985, Tourniaire, 1986; van Dooren vd., 2010). Bu (yanlış) toplamsal düşünme biçimi, oranı oluşturan çokluklar arasında çarpımsal ya da göreli (relative) ilişkiler kurmak yerine, bu çokluklar arasındaki farka odaklanma ile ilgilidir. Örneğin, Tourniaire (1986) çalışmasında aşağıdaki problem için birçok öğrencinin yanlış toplamsal düşünme biçimi uyguladığını bulmuştur:

"Portakal suyu ve su içeren iki farklı karışım vardır. Bu karışımlardan biri iki bardak portakal suyu ve dört bardak sudan hazırlanmıştır. Diğer karışımda ise altı bardak portakal suyu vardır. Bu karışımın diğer karışımla aynı tada sahip olması için bu karışıma kaç bardak su eklenmelidir?" (s. 404).

Bu soru için yanlış toplamsal düşünme biçimi uygulayan öğrenciler bu soruya "sekiz bardak su eklenmelidir, çünkü bu karışımdaki su miktarı da portakal suyu miktarından iki bardak fazla olmalıdır" cevabını vermiştir. Öğrencilerin yanlış toplamsal düşünmelerine genişletme (enlargement) gibi diğer bağlamlar içeren problemlerde de yaygınlıkla rastlanmaktadır (ör., Kaput ve West, 1994). Aslında, yanlış toplamsal düşünme tüm orantısal akıl yürütme problemlerinde görülen en yaygın problem olarak karşımıza çıkmaktadır (Mersin, 2018; Misailidou ve Williams, 2003); bu durum özellikle birbirinin katı olmayan sayıları içeren problemlerde çok sıklıkla gözlenmektedir (van Dooren vd., 2010).

Orantı aynı ilişkiyi taşıyan iki oranın eşit olduğunu belirten bir ifade olarak tanımlanabilir (Supply vd., 2023). Geleneksel olarak orantısal akıl yürütme, üç değerin verildiği ve dördüncü değerin sorulduğu problemlerin içler-dışlar çarpımı gibi işlemsel algoritmalar ile çözülmesi olarak anlaşılmaktadır (Lesh vd., 1988). Oysaki, orantısal akıl yürütme, temelde, göreli olarak nicelikler üzerine akıl yürütme ve niceliklerin eşgüdümlü olarak birlikte değişimini ve oranların değişmezliğini anlama becerilerinin bütünüdür (Lamon, 2007). Nitekim orantısal akıl yürütme yapısal ilişkiler üzerine akıl yürütmeyi gerektiren “karmaşık bir olgudur” (Lamon, 1995, s. 167). Öyle ki, bu akıl yürütme sırasında iki oranın denkliğinde var olan yapısal ilişkiler üzerine (aynı ölçme uzayı içerisindeki yinelemeye yönelik ilişkiler ve farklı ölçme uzaylarında bulunan çokluklar arasındaki fonksiyonel ilişkiler) karşılaştırmaların olduğu iddialar ortaya konulur. Diğer bir yandan, geleneksel olarak orantısal akıl yürütmenin temelinde tekrarlı toplama olduğu görüşü yaygındır (örneğin, Fischbein vd., 1985). Aslında, orantısal akıl yürütmenin kökleri, tekrarlı toplamadan ziyade, birimleri bağlamaya ve bağlı birleşik birimleri yinelemeye dayanmaktadır (Battista ve Borrow, 1994; Steffe, 1994).

Orantısal akıl yürütmenin ilk adım becerilerinin temeli olarak ifade edilen bağlı birleşik birimleri yineleme becerisi, birbirine bağlı farklı çoklukları yinelenebilir birer birim olarak ele alma ve bu birbirine bağlı yinelenebilir birimleri elemanlarının yapısını değiştirmeden tekrarlama olarak tanımlanmaktadır (Battista ve Borrow, 1995). Nitekim bu beceri matematik, fen ve günlük hayattaki birçok konunun anlamlandırılmasında kritik öneme sahiptir (Battista ve Borrow, 1995; Park ve Nunes, 2001; Steffe, 1994). Örneğin, Steffe (1994) çalışmasında öğrencilerin orantısal ilişkileri anlamlandırması için bağlı birleşik birimleri yineleme (iterating linked composites) becerisinin önemine değinmektedir. Bu beceriye örnek olarak, bir öğrenciye 9 sıra ve her bir sırada 3 küpün olduğu dikdörtgensel yapıda kaç tane küp olduğu sorulduğunda öğrencinin parmaklarıyla 3, 6, 9, 12, 15, … şeklinde üçer üçer sayması; o öğrencinin 3 küpü yinelenebilir bir birim (iterating unit) olarak alması ve bu birimi 9 kez tekrarlaması verilebilir. Battista ve Borrow (1995) öğrencilerin birleşik birimleri yineleme becerisini kazandıktan sonra bu becerilerini oran durumlarına genişletebileceklerini ileri sürmüştür. Battista ve Borrow öğrencilerin oran ve orantı problemlerini çözebilmeleri için bu yineleyici (iterative) süreci anlamlandırmaları, çarpma ile bölme kavramlarıyla ilgili daha önceki bilgileri ile de ilişkilendirmeleri gerektiğini belirtmiştir. Diğer yandan, çarpımsal düşünmenin temelinin tekrarlı toplama olduğunu öne süren araştırmacılar olsa da (ör., Fishbein vd., 1985), Park ve Nunes (2001) çarpımsal düşünmenin temelinin birebir (ya da bire-çok) eşleme olduğunu ve tekrarlı toplamanın işlemsel bir beceri olarak yalnızca çarpımsal ilişki içeren problemleri çözmek için kullanıldığını savunmuşlardır. Buna göre, çoklukları bire-bir ya da bire-çok eşleştirerek birleşik birimler oluşturma, bu birleşik birimleri birbirine bağlama ve bu bağlı birleşik birimleri yineleme, orantısal akıl yürütme için gerekli olan önemli ve temel bir zihinsel süreç olarak kabul edilebilir (Nunes vd., 2010).

Bu çalışmanın amacı ise yedinci sınıf öğrencilerinin erken orantısal akıl yürütme sürecinde kullandıkları temsilleri araştırmaktır. Dolayısıyla, bu çalışma kapsamında, öğrencilerin erken orantısal akıl yürütme becerileri olarak ele alınan birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme süreçlerine yönelik problemlerde kullandıkları temsillere yer verilmiştir. Bu kapsamda, birleşik birimleri bağlarken ve bağlı birleşik birimleri yinelerken, öğrencilerin temsilleri ne ölçüde kullandıkları ve informel ve formel temsiller içinde ve arasında nasıl geçiş yaptıkları incelenmiştir. Öğrencilerin temsilleri ve temsiller-arası geçişleri gelişimsel olarak düşünüldüğünde informelden formele doğru olacak şekilde ele alınmaktadır (Webb vd., 2008). Webb ve diğerlerinin (2008) çalışması doğrultusunda Ayan-Civak ve diğerleri (2023) orantısal düşünmeye ilişkin çalışmasında, informel temsilleri somut resimler içeren bağlam-temelli resimler, formel-öncesi temsilleri matematiğe dair yapılar ve bu yapılar ile daha üst düzey bir akıl yürütme içeren temsiller, formel temsilleri ise akıcılık ve etkililik için kullanılan sembolik notasyonları ve yaygın algoritmaları içeren temsiller olarak açıklamaktadır.

Temsil (gösterim), herhangi bir şeyi temsil eden veya onun için orada bulunan işaret, işaretler bütünü, karakterler, ikonlar ya da nesneler olarak açıklanmaktadır (Goldin, 2003). Matematiksel nesnelerin temsilleri, matematiksel nesnelere erişim yolu olarak düşünülmekle birlikte, Duval (1999) bu temsillerin kullanılabilir olmasının somut durumlarla ve fiziksel nesnelerle mümkün olabileceğini belirtmiştir. Dolayısıyla, Duval (1999) matematik öğrenmede ortaya çıkan şu gereklilikleri öne sürmüştür: bir matematiksel anlamanın içinde geçerli değerleri ayrıştırmak için aynı tipte (yani, aynı temsil kaydında) benzer temsillerin karşılaştırılması ve bir temsilde bir tipten (temsil kaydından) diğerine çevirme. Benzer şekilde, Behr ve diğerleri (1992), oran ve orantı üzerine yaptıkları çalışmalarının (ör., Post ve diğerleri (1986)) da sonuçlarını gözeterek, temsil tipleri arasında veya içinde geçişler yapabilme becerisini bir öğrenme fırsatı olarak varsaymaktadır. Bu varsayımlarla beraber, temsiller arasında ve içinde geçişler olarak ifade edilebilen temsilsel akıcılığın bir kavram sistemini anlamanın ne demek olduğu ile ilişki olan birçok önemli becerinin altında yattığı söylenebilir (Lesh ve Doerr, 2003). Bu kavramsal sistemlerin anlamları ise çeşitli temsilsel (ör., resimler, tablolar, semboller) ortamlara dağılabilmektedir.

Bu çalışmada, Behr ve diğerlerinin (1983) temsilsel sistemleri kullanmak için bir interaktif model ismiyle ortaya koyduğu kavramsal çerçeve yol gösterici olmuştur. Öyle ki, bu çerçeve rasyonel sayı kavramının öğretim yapısına uyan somut materyallerin kullanımı sırasındaki manipülatif etkinlikleri belirlemek amacıyla yürüttükleri araştırmanın (Behr vd., 1983) çekirdeği olmuştur. Bu anlamda öğrenciler çeşitli rasyonel sayı görevlerini yaparken onların kullandıkları bilişsel yapılar analiz edilerek şu önemli sonuca varmışlardır; öğrenciler bir problemin çözümü boyunca tek bir temsil kalıbı içinde çalışmazlar (Behr vd., 1983; Lesh vd., 1987a; Lesh vd. 1987b). Daha detaylı bir şekilde söylemek gerekirse öğrenciler, farklı temsil kalıplarını bir problemin farklı kısımlarında o problemi çözerken düşünebilirler. Dolayısıyla, farklı tiplerdeki problem çözme deneyimlerinde çözüm süreçleri, çoğunlukla çeşitli temsiller arasında geçişler içermektedir (Lesh ve Doerr, 2003). Bu kapsamda, yukarıdaki çalışmaların devamında, Lesh ve Doerr (2003), kavramsal sistemlere dair anlam oluşturmanın çeşitli temsil ortamlarına dağıldığını belirtmiştir. Bu ortamlar temelde, yazılı semboller, diyagramlar/resimler, konuşma dili, somut modeller, gerçekçi durumlar/deneyime dayalı metaforlar olmakla birlikte; tablolar, denklemler ve grafikleri de içermektedir (Lesh ve Doerr, 2003). Mevcut çalışma kapsamında ise, orantısal akıl yürütmenin ilk adım becerilerinde öğrencilerin kullandığı resimsel, sembolik (sayısal) ve tablo temsillerine, bunların içindeki ve bunlar arasındaki geçişlere, bunların birbirlerine dönüşümlerine odaklanılmıştır.

Bununla beraber, orantısal akıl yürütme ile ilgili çalışmalara bakıldığında, bu çalışmalarda çoğunlukla öğrencilerin orantısal akıl yürütme problemlerindeki başarılarına, kullandıkları stratejilere ve sahip oldukları kavram yanılgılarına odaklanıldığı görülmüştür. Örneğin, Akkuş ve Duatepe-Paksu (2006) çalışmalarında, orantısal akıl yürütme içeren stratejileri incelemek için yurt dışı ve ulusal alandaki çalışmalarda kullanılan 15 adet açık uçlu sorudan oluşan bir test ve bu testin dereceli puanlama anahtarını geliştirmişlerdir. Daha sonraki yıllarda, Çelik ve Yetkin-Özdemir (2011) bu testi yedinci ve sekizinci sınıf öğrencilerine uygulamış ve onların orantısal akıl yürütme becerileri ile oran ve orantı ile ilgili problem kurma becerilerini incelemişlerdir. Araştırmacılar, yüksek düzeyde orantısal akıl yürütme becerilerine sahip az sayıda öğrenci olduğunu ortaya koymuştur (yani, çok düşük (%26,8), düşük (%33,2), orta (%30,3) ve yüksek (%9,7) sınıfları). Diğer bir yandan, orantısal akıl yürütme becerisi ile oran orantı ile ilgili problem kurma becerileri arasında anlamlı bir istatistiksel ilişki belirtilmiştir (Çelik ve Yetkin-Özdemir, 2011). Altı ve sekizinci sınıf düzeyleri aralığındaki öğrencilerin katılımcı olduğu bir diğer çalışmada, Duatepe ve diğerleri (2005) öğrencilerin verilmeyeni bulma problemleri için en sık içler-dışlar çarpımı algoritmasını (%49,7), ikinci olarak birim oran stratejisini (%19,4), üçüncü olarak ise toplamsal ilişki stratejisini (%11,1) kullandıklarını belirtmişlerdir. Dolayısıyla, Duatepe vd. (2005) öğrencilerin farklı türdeki sorular için farklı stratejiler kullandıklarını, bu sebepten dolayı ders kitaplarının ve konunun öğretiminin farklı türdeki çözüm stratejilerinin kullanılmasını mümkün kılacak problemler içermesi gerektiğini vurgulamışlardır. Güncel bir çalışmada Martínez-Juste ve diğerleri (2023) yedinci sınıf Türk öğrencilerin ve sekizinci sınıf İspanyol öğrencilerin orantısal akıl yürütme için önemli becerilerini incelemişler ve iki ülke öğrencilerinin orantısal akıl yürütmeye dair profillerini ortaya koymuşlardır. Çalışmanın sonuçlarına göre her iki gruptaki öğrencilerin becerileri ve muhtemel kavram yanılgıları ortaya konmuştur. Çalışmanın çarpıcı sonuçlarından biri Türk öğrencilerin oran kavramını anlamlandırmada İspanyol öğrencilerden daha başarılı oldukları, İspanyol öğrencilerin ise orantısal olmayan durumları anlamlandırma ve ilgili problemleri çözmede Türk öğrencilerden daha başarılı oldukları yönündedir. Bunun yanı sıra her iki gruptaki öğrencilerin orantısal olmayan durumlar için orantısal stratejiler kullanma ve orantısal durumlar için toplamsal düşünme biçimi uygulama gibi kavram yanılgılarının olduğu belirtilmiştir. Yine diğer bir güncel çalışmada, Proulx (2023) 11 ve 13 yaşlarındaki iki öğrencinin orantısal akıl yürütme problemlerindeki stratejilerini incelemiştir. Çalışmanın sonuçları bu öğrencilerin göreceli orantısal akıl yürütme (relative proportional reasoning) stratejisine yönelik çalışmalarını ortaya koymuştur. Bu strateji toplamsal ve çarpımsal akıl yürütme arasında hem toplamsal düşünmenin hem de çarpımsal düşünmenin bileşenlerini içeren bir strateji olarak öne çıkmaktadır. Bu stratejiye örnek olarak kenar uzunlukları arasındaki fark sabit olan farklı dikdörtgenler arasından kenar uzunlukları büyük (ör. 27-30) olan dikdörtgenin, kenar uzunlukları küçük (ör. 1-4) olan dikdörtgene göre daha çok kareye benzediğine yönelik çıkarımlar verilebilir (Proulx, 2023).

Yukarıda görüldüğü gibi uluslararası ve ulusal literatürde oran ve orantı konusu ile ilgili çalışmalar genellikle öğrencilerin orantısal problemlerde kullandıkları stratejileri ve kavram yanılgılarını belirlemek, konuya yönelik bilgilerini ölçmek için test geliştirmek ve bu test yardımı ile öğrencilerin oran ve orantı konusu ile ilgili bilgilerini belirlemek amaçlarıyla yapılmıştır. Bu çalışmada ise "Öğrenciler orantısal akıl yürütmenin başlangıcında nasıl temsiller kullanmaktadır?" problemi üzerinde durulmuştur. Bu kapsamda, "yedinci sınıf öğrencilerine oran ve orantı konusunu anlamlı, kapsamlı ve sıralı bir şekilde öğretebilmek için hazırlanan ve uygulanan bir öğretimsel etkinlik dizisi sonrasında uygulanan son-testte, öğrenciler birleşik birimleri bağlarken ve bağlı birleşik birimleri yinelerken kullandıkları temsiller nelerdir ve öğrenciler resimsel ve sözel içerikli problemlerde bu temsilleri ne ölçüde kullanmaktadır?" araştırma sorularına cevap aranmıştır. Böylece, orantısal akıl yürütmeye yönelik geliştirilen bahsi geçen öğretimsel etkinlik dizisi sonrasında, orantısal akıl yürütmenin ilk adımlarına yönelik sorulara verilen cevaplarda öğrencilerin kullandıkları temsiller ortaya konmuştur. Bu doğrultuda, öğrencilerin erken orantısal akıl yürütme sürecinde (yani, oran oluşturan çokluklara yönelik birleşik birimler oluşturmada, oluşturdukları birleşik birimleri birbirine bağlamada ve bu bağlı birleşik birimleri yinelemede) kullandıkları temsillerin ortaya konmasıyla, orantısal akıl yürütmenin erken aşamalarında anlamlı öğrenmede öğrencilerin temsiller arası ve içerisinde geçiş sürecinde temsil kullanımına yönelik sonuçlara varılmıştır.

Yöntem

Mevcut çalışmanın amacı, orantısal akıl yürütmenin temeli olan anahtar öğrenmelerde öğrencilerin kullandıkları temsillerin incelenmesi olduğu için, bu nitel çalışma bir durum saptama çalışmasıdır. Öyle ki bu çalışmada nitel yöntem içinde durum çalışması deseni kullanılmıştır (Yin, 2009). Dolayısıyla, bu çalışmanın durumu, ortaokul yedinci sınıf öğrencilerinin orantısal akıl yürütmelerinin ilk adımına yönelik anahtar öğrenmelerdeki temsilleridir. Bu çalışmanın bağlamı, bir tasarı tabanlı araştırma sürecinde ve ulusal ortaokul matematik dersi öğretim programı doğrultusunda geliştirilen ve uygulanan, oran ve orantı konusuna yönelik bir öğretimsel etkinlik dizisidir. Bu dizi, birleşik birimleri bağlama ve yineleme, çarpımsal düşünme, oran ve orantının sembolik olarak yapılandırılması, oranların kıyaslanması ve nitel muhakeme anahtar öğrenmelerini içeren bir varsayıma dayalı öğrenme rotası doğrultusunda hazırlanmıştır (Ayan-Civak vd., 2022). Bu çalışmada bu öğrenme rotasının, şu anahtar öğrenmelerine yönelik gösterimler ortaya konmuştur: birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme, çarpımsal düşünme (birim oran), çarpımsal düşünme (informel oran dili), oran ve orantının sembolik olarak yapılandırılması ve oranları kıyaslama (Ayan-Civak vd., 2022). Ayrıca, gerçekçi matematik eğitimi doğrultusunda şekillenen bu çalışmada, anahtar öğrenmelere erişmede, öğrencilerin etkinlikler sırasında geliştirdikleri informel araçlardan (örneğin, nesneleri gruplamak için yuvarlak içine alma) formel araçlara (örneğin, tablolar) geçişin desteklenmesi sağlanmıştır (Ayan-Civak vd., 2022). Bununla birlikte, öğrencilerin orantısal yürütme becerilerinin gelişimi kapsamında yukarıda bahsi geçen matematiksel fikirler bağlamın gerçekçi olduğu ve yönlendirilmiş yeniden keşfetme ve öğretici olgu ilkelerinin yön verdiği bir ortamda sunulmuştur (Ayan-Civak vd., 2022).

Kısaca belirtmek gerekirse, bu çalışmanın dahil olduğu araştırma projesi, oran ve orantı konusunun nasıl öğretilebileceğinin belirlenmesi üzerine kurulduğu için sınıf içi tasarı araştırması (classroom design research) (Gravemeijer ve Cobb, 2006) kullanmıştır. Bu proje, üç yıllık bir sürede bir matematik öğretmeniyle iş birliği içinde takım çalışması yürütülmüş olup, prototip, birinci ve ikinci döngü olmak üzere üç döngüden oluşmaktadır. Mevcut çalışmanın verileri ise, projenin son döngüsü olan ikinci döngünün uygulanması sırasında yapılan öğrenci testi kapsamında toplanmıştır (Ayan-Civak vd., 2022).

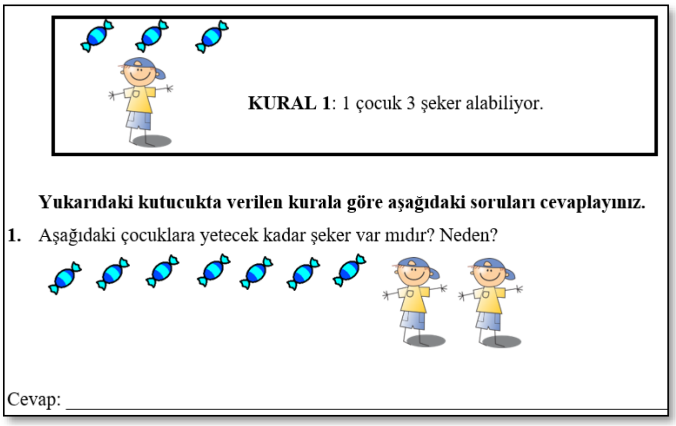
Katılımcılar

Bu çalışmada, Ankara'nın alt sosyo-ekonomik düzeyde bir semtinde bulunan bir devlet okulunda çalışan bir ortaokul matematik öğretmeni ve onun yedinci sınıf öğrencileri katılımcı olarak belirlenmiştir. Amaçlı olarak örneklenen bu öğretmenin seçilmesinde aranan ölçütler şunlardır: Öğretmenin yenilikçi ve iş birliğine açık olması, anlamlı öğrenmeye önem vermesi ve oran ve orantı konusunun öğretiminde deneyimli olması. Veriler, bu öğretmenin 31 (15 kız, 16 erk ek) yedinci sınıf öğrencisinden toplanmıştır.

Veri Toplama Araçları

Bu çalışmanın odağını oluşturan veri toplama aracı, öğretim deneyinden sonra uygulanan bir testtir. Bu test, açık uçlu ve kısa cevaplı sorular içeren bir son-testtir. Bu test yoluyla veri toplamanın ana amacı, orantısal akıl yürütmede öğrencilerin araç kullanımlarına ve informel ve sezgisel akıl yürütme yollarına ilişkin öğretimi oluşturmak ve bu kullanımlarını ve akıl yürütme yollarını anlamaktır (Kaput ve West, 1994; Lamon, 1994). Diğer bir deyişle, bu test yoluyla, öğrencilerin testteki başarılarına yönelik sonuçlar arasında fark olup olmadığını görmek ve öğrenci başarısını ölçmekten ziyade, öğrencilerin akıl yürütmelerindeki değişimleri ve araç ve sembolleri kullanımlarını görmek için sınıf içi uygulamadan sonra öğrenci öğrenmeleri hakkında fikir edinmek amaçlanmıştır. Bu test araştırmacılar tarafından yazar Ayan-Civak'ın doktora tezi çalışmalarına dayalı olarak orantısal düşünmeye ilişkin öğrenme rotaları gözetilerek hazırlanmıştır. Bu testin geçerliliği için alan uzmanlarından uzman görüşleri alınmış, test önceki döngülerde uygulanmış, bu döngü için pilot uygulaması yapılmış ve bunlardan gelen dönütler doğrultusunda sorular yazarlar tarafından düzenlenmiştir. Son döngü için yapılan pilot uygulamada test bir başka okuldaki bir yedinci şubesine uygulanmıştır. Bu pilot uygulamanın sonuçlarına bağlı olarak, bir bağlama bağlı olarak hazırlanan ardışık sorularda (ör., 1:3 oranına dayalı görevler) benzer öğrenci akıl yürütmelerinin görüldüğü denk sorulardan azaltma yapılmıştır, bağlamlar ve soru içeriklerinde değişiklik yapılmamıştır.

Bu çalışma kapsamında, çalışmanın asıl verileri olan bu teste verilen yazılı cevaplar incelenmiştir. Bu test, ana bölümler ve her bölümde ilişkili alt sorular olmak üzere, toplamda 35 sorudan oluşmaktadır. Öğrencilerin testi cevaplaması 40-50 dakika sürmüştür. Testte birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme adımlarına yönelik 22 soru bulunmaktadır. Bu çalışmada, bu 22 soru üzerinden analiz yapılmıştır. Bu soruların bağlamı çocuk sayısı-şeker sayısı ilişkisi üzerine kuruludur. Bu kapsamda üç farklı orana yönelik birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme soruları bulunmaktadır. Aşağıda testten bir örnek soru verilmektedir. Burada kural '1 çocuk 3 şeker alabiliyor' olarak verilir ve 1 çocuk ve 3 şeker yan yana resmedilir. Verilen kurala göre aşağıdaki soruları cevaplayınız, yönergesi ile soru metnine geçilir. Soruda şeker ve çocuk nicelikler resmedilerek, çocuklara yetecek kadar şeker var mıdır ve neden şeklinde soru sorulur.



Tablo 1'de, test sorularındaki görevlerin temsil yapısı (resim içerikli veya sözel) ve matematiksel yapısına (1'e 3; 2'ye 4; 3'e 5 oranları) bağlı olarak soru sayısı dağılımı verilmiştir.

Tablo 1

Testin Soru Sayısı Dağılımı

	Resim içerikli problemler	Sözel problemler
1:3 oranına dayalı görevler	5	3
2:4 oranına dayalı görevler	5	3

3:5 oranına dayalı görevler	3	3
Toplam	13	9

Resim içerikli problemler iki türdedir. Birinci türde her iki niceliğe ait resimler vardır ve bağlam kapsamında niceliklerin uygun olup olmadığı sorulmaktadır. Örneğin, 6 şeker resmi ve 2 çocuk resmi verilir ve "bu çocuklara yetecek kadar şeker var mıdır ve neden?" diye sorulur. İkinci türde ise, iki nicelikten birine ait resimler vardır ve bağlam kapsamında bu niceliğe karşılık gelen diğer nicelik miktarı sorulmaktadır. Örneğin, 4 şeker resmi verilir ve "bu şekerler kaç çocuğa paylaştırılabilir?" diye sorulur. Sözel problemler ise resim içermez ve resim içerikli problemlerdeki gibi iki türdedir. Birinde iki niceliğin sayı değeri verilip yeterli şeker olup olmama durumu sorulurken, diğerinde iki nicelikten birine ait sayı değeri verilir ve bağlam kapsamında bu niceliğe karşılık gelen diğer nicelik miktarı sorulmaktadır.

Ayrıca bu veri toplama aracı üzerinden öğrencilerle yarı-yapılandırılmış görüşme biçiminde gerçekleşen etkinlik tabanlı görüşmeler (Goldin, 1997) yapılmıştır. Bu ikincil veri toplama sürecine ilk iki yazar aktif olarak katılmıştır. Araştırmacılar yarı-yapılandırılmış görüşmelerde öğrencilere sorulabilecek soruları öncesinde birlikte tasarlamış ve her ikisi de öğrencilerle görüşmelere katılmıştır. Bu görüşmelerde, öğrencilere soruları cevaplarken nasıl düşündüklerini anlamaya ve çeşitli temsilleri nasıl kullandıklarını anlamaya yönelik sorular sorulmuştur. Bu sebeple, matematik öğretmeninin yönlendirmesiyle, sosyal iletişim becerileri güçlü ve görüşmeye gönüllü olacak düşük, orta ve yüksek düzeyde performans sergileyen öğrencilerden beşi belirlenerek onlarla derinlemesine görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmeler video ile kaydedilmiştir. Dolayısıyla, çalışmada veri çeşitlemesi yoluyla (yani, belge ve görüşme verileri) çalışmanın geçerliğine yönelik veri toplanmıştır (Patton, 1990). Bu kapsamda video kaydı yapılan görüşmelerin transkriptleri yapılmış ve bunlar analiz sürecinde ikincil veri olarak kullanılmıştır.

Verilerin Analizi

Bu çalışmanın odağındaki veriler öğrencilerin uygulanan öğretimden sonra verilen son-testteki yazılı ifadelerinden oluşan cevaplarıdır. Nitel veri analizinin kullanıldığı bir araştırma sürecinde, "bir durumu oluşturan sınırları belli bir bağlam içinde bir olgu hakkında betimsel sonuçlar çıkarılabilir ve saptanabilir" (Miles ve Huberman, 1994, s. 90). Miles ve Huberman'ın (1994) nitel veri analizi modelinin kullanıldığı bu çalışmada, veriler, öğrencilerin birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yinelemede temsilleri kullanma yollarının belirlenmesi açısından betimsel sonuçlar ortaya koyacak şekilde analiz edilmiştir. Bu kapsamda yukarıda açıklanan bağlamda, çalışmanın odağındaki veriler olan öğrencilerin yazılı ifadelerinden oluşan cevapları yorumlanarak sahip oldukları orantısal akıl yürütmeleri kapsamında kullandıkları temsiller incelenmiştir. Diğer bir deyişle, orantısal akıl yürütme doğrultusunda öğrencilerin hangi temsilleri (Behr vd., 1983; Lesh ve Doerr, 2003; Lesh vd., 1987a; Lesh vd., 1987b) kullandıkları incelenmiştir.

Resimsel temsil, fiziksel modellerin iki boyutlu temsilleri olarak açıklanmaktadır. Resimsel temsilleri kullanan öğrenciler, problem içinde (yani, resim içerikli problemlerde) verilen resimleri kullanabilir ya da problem içinde verilmeden (yani, sözel içerikli problemlerde) kendileri çizilebilir. Sembolik temsil detaylı açıklama olmaksızın denklemler, değişkenler ve notasyonlar (işaretler) içeren ifadeler olarak açıklamıştır. Bu çalışmanın problemlerinde kullanılan notasyonlar, sayılar ve dört işleme dair işaretler olduğundan ve değişken gibi sembolik ifadeler barındırmadığından, çalışma kapsamında bu temsil sayısal temsil başlığı altında verilmiştir. Tablo temsili bir durum içerisinde ya da bir duruma bağlı nicelikler arasındaki ilişkiyi ortaya koyan temsillerdir (Lesh ve Doerr, 2003, Lesh vd., 1987b). Nitekim, veri analizinin başlangıcında bahsi geçen çalışmalar doğrultusunda, bu üç temsil altında beklenen kodlar çıkartılmıştır. Bununla beraber, veri analizi sırasında resimsel ve sayısal temsilin bütünleşmiş bir şekilde sıkça kullanıldığı bir temsil yaklaşımı görülmüştür. Bir anlamda, resimsel-sayısal temsil, problem çözme sürecinde bu iki temsilin iç içe geçtiği yeni bir temsil biçimi olarak ortaya çıkmıştır. Bu sebeple, bu yaklaşım resimsel temsilden ve sayısal temsilden ayrı olarak resimsel-sayısal temsil birimi altında kodlanmıştır.

Bu durumda, çoklu temsiller çerçevesine dayanan dört tür gömülü analiz birimleri ortaya konmuştur. Bu kapsamda veriler dört tema altında toplanmıştır. Bunlar, resimsel temsiller, sayısal temsiller (sembolik temsillerin özelinde), tablo temsilleri ve resimsel-sayısal temsillerdir. Aşağıda Tablo 2'de analiz tablolarından bir kesit verilmiştir. Örneğin, bir soruda öğrenci cevabında resimleri grupluyorsa, bu cevap resimsel gösterim altında 'şeker resimlerini üçerli gruplama' (pictorial grouping) olarak kodlanmıştır.

Tablo 2

Veri analizi örneği

	Kural kullanım şekli	Resimsel temsil	Sayısal temsil	Resimsel-Sayısal temsil	Tablo temsili
Soru 1	1 çocuk 3 seker	Şeker resimlerini üçer gruplama	-	Her bir çocuğun altına şekerlerin sayısını temsil edecek 3 rakamını yazma ve tekrarlı toplama yapma*	Tabloda çocuk-şeker sütunlarında sayısal değerleri bulma

Not: * Bir öğrencide iki temsil iç içe/bütünleşik görülebilir.

Birincil düzey betimsel kodlar yukarıdaki süreçle belirlendikten sonra, tüm öğrencilerin cevapları Tablo 3'teki gibi ikincil düzey kod listeleri kullanılarak dört tema altında kodlar ve alt kodlar yoluyla betimsel olarak analiz edilmiştir. (Bakınız, Tablo 3). Kod listesinin tamamı ekte verilmiştir (Bakınız, Ek 1). Bununla beraber, öğrencilerin cevaplarında kullandıkları temsillerin frekansı (sıklığı) belirlenmiştir. Bazı öğrenciler soruyu birden fazla yolla çözdüğü ve bir soruda birden fazla temsil tipi kullanıldığı için frekans değerlerinin soru sayısından fazla olduğu görülmüştür. Örneğin, öğrenci birinci yol yazıp bir çözüm belirtmiş, ardından ikinci yol yazıp ikinci bir çözüm belirtmiştir. Bu öğrencilerin farklı çözümlerinde farklı gösterimler kullandıkları görülmüştür. Bu sebeple sıklık değerlerinde bazı gösterimlerde fazla değerler görülmüştür. Özelikle resimsel gösterimin daha sık kullanıldığı görülmüştür. Örneğin, sözel problemlerde bazı öğrencilerin kullandıkları iki çözüm yolundan birinin resimsel gösterim yoluyla diğerinin sayısal gösterimler yoluyla olduğu belirlenmiştir.

Ayrıca, veri analizinde öğrenciler ile yapılan görüşmelerin transkriptleri ve video kayıtları da kullanılmıştır. Böylece, belge toplama yoluyla elde edilen bilginin sürekliliği görüşme verileriyle doğrulanarak karşılaştırılmıştır. Bu anlamda, çalışmanın görüşme verileri, doküman verilerini desteklemek ve varsa doküman verilerinden farkını ortaya koymak için kullanılmıştır. Çalışmaya katılımcı olan öğrencilere dair görüşme verilerinden gelen cevaplar verilirken, katılımcı isimleri "Ö1", "Öğrenci 1" olacak şekilde kısaltılmıştır.

Tablo 3

Kodlamalar, örnekleri ve göstergeler

Temsil		Temsilin alt tipi örneği	Göstergelere dair açıklamalar
Resimsel temsil	Resimsel Gruplama	Bir niceliğin resimlerini sadece verilen orana göre gruplama/yuvarlak içine alma	Resimleri gruplarken, bir veya iki niceliği gruplama; verilen oranı kullanma, yeni oranı kullanma veya hem verilen oranı hem de yeni oranı birlikte kullanma durumlarını içerir.
	Resimsel Eşleme	İki niceliğin resimlerini orana/yeni orana göre gruplamalarını eşleme	Resimleri eşlerken, bir veya iki niceliği gruplama; verilen oranı, yeni oranı veya hem verilen oranı hem de yeni oranı birlikte kullanma durumlarını içerir.
Sayısal temsil	Dört işlemden bir işlem	Çarpma	Toplama, çarpma veya bölme işlemleri üzerinden birimleri bulmaya yönelik işlemler içerir.
	İşlemsel gruplama ve yineleme	Çocuk grup sayısı üzerinden çarpma	Gruplama ve birleşik birimleri yinelemek için yapılan işlemsel temsilleri içerir.
	Artırma (build-up)	Bir önceki sorudan artırma	Orantısal akıl yürütmeye yönelik bir önceki sorulardan gelen veriyi kullanarak onun üzerine eklemeyi/ondan çıkarmayı içerir.
	Doğrudan sayısal değeri yazma		Doğrudan cevabın yazıldığı durumları içerir.
Tablo temsili	Klasik tablo	Tabloda bölme	Klasik tablo temsili üzerinde, niceliklerin belirtildiği, çarpma veya bölme işlemlerini içerir.
	Tablo-benzeri		Klasik temsil kullanmamakla birlikte tablo temsiline benzer bir sembolik temsil içerisinde işlem yapmayı içerir.
Resimsel-sayısal temsil	Resimsel-Sayısal İşlem	Bir nicelik (çocuk) resimlerini yeni kurala göre gruplayıp, yanına kurala göre sayı yazma ve çarpma	Resimleri (resim gruplarını) sayısal değerlerle bağlayarak ve işlem yaparak sonuca ulaşmayı içerir.
	Resimsel-Sayma	Bir nicelik (şeker/çocuk) resimlerini kurala/yeni kurala göre gruplayıp, kurala göre grupları sayma	Resimleri (resim gruplarını) sayısal değerlere birer birer ya da kurala göre ritmik sayarak sonuca ulaşmayı içerir.

Verilerin analizinde güvenirlik kapsamında veri çeşitlemesi yapılmıştır. Test verilerinin gözden geçirilmesi, görüşmeler sırasında ve sonrasında araştırmacıların aldıkları notlar ve Behr vd. (1992), Lesh ve Doerr (2003) ve Lesh vd. (1987a, 1987b) çalışmalarındaki çoklu temsiller çerçevesi doğrultusunda, iki araştırmacı yukarıda Tablo 2'de verilen veri analizi tablosunu (birincil düzey betimsel kodlar) hazırlamıştır. Araştırmacılar bir öğrencinin test verisini birlikte çözümlediklerinde fikir birliğinde oldukları belirlenmiştir. Ardından, iki araştırmacı üç öğrenci verisini birincil düzey betimsel kodlarla bağımsız analiz etmiştir. Araştırmacılarının veri analizi tabloları karşılaştırılarak kodlamaların eşleştiği, ayrıca tutarlı ve tekrar edilebilir olduğu tespit edilmiştir. Bu adımın ardından bir araştırmacı kalan 28 test verisini analiz etmiştir. Ayrıca veri çeşitlemesi kapsamında, görüşme video kayıtları ve transkriptleri birincil düzeyde kodlandığında kodlamaların tutarlı olduğu görüşme verilerinden gelen kodlamalarla test verilerinden gelen kodlamaların uyuştuğu görülmüştür. Bu araştırma için Orta Doğu Teknik Üniversitesi İnsan Araştırmaları Etik kurulundan 28620816/549 sayılı ve 07.11.2017 tarihli etik izin alınmıştır.

Bulgular

Bu çalışmada, "yedinci sınıf öğrencilerinin birleşik birimleri bağlarken ve bağlı birleşik birimleri yinelerken kullandıkları temsiller nelerdir?" ve "öğrenciler resimsel ve sözel içerikli problemlerde bu temsilleri ne ölçüde kullanmaktadır?" araştırma sorularına cevap aranmıştır. Bu doğrultuda, kullanılan temsiller, dört başlık altında sunulmuştur: Resimsel Temsiller, Sayısal Temsiller, Resimsel-Sayısal Temsiller ve Tablo Temsileri. Bu başlıkların altında temsillerin ne ölçüde kullandıkları açıklanmıştır. Bulgular, öğrencilerin sorulara verdikleri cevaplardan doğrudan alıntılarla desteklenmiştir.

Resimsel Temsiller

Resimsel temsillerin kanıtları resimsel gruplama ve resimsel eşleme başlıkları altında toplanmıştır. Resimsel gruplamada, öğrencilerin problem durumu içerisinde verilen niceliklere dair resimleri (örneğin, şeker resimleri ve/veya çocuk resimleri), gruplaması veya yuvarlak içine alması söz konusudur. Böylece gruplama yoluyla birleşik birimler oluşturulmuştur. Resimsel eşlemede ise, problem durumu içerisinde verilen iki niceliğe dair resimlerin ya da gruplanmış resimlerin birbiri ile eşleştirilmesi söz konusudur. Resimsel gruplama ve resimsel eşlemeye dair ortaya çıkan temsil tipleri ve frekans analizleri Tablo 4 ve Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 4'te Resimsel gruplamanın ortaya çıktığı altı tip görülmektedir. Öğrenci cevaplarında en sık kullanılan temsiller resimsel gruplamada 'bir niceliğin resimlerini sadece verilen orana göre gruplama/yuvarlak içine alma' ve 'iki niceliğin resimlerini sadece verilen orana göre gruplama/yuvarlak içine alma' olmuştur.

Resimsel gruplamaya ait bir niceliğin resimlerini sadece verilen orana göre gruplama/yuvarlak içine alma tipinde, öğrenci problem durumu içinde verilen kurala göre bir niceliğe ait resimleri gruplar, yani bir resim grubunun etrafında bir yuvarlak çizerek o resim grubunu yuvarlak içine alır. Örneğin, bir öğrenci (Ö4) ile görüşmede, öğrenci bu gruplama temsilini, iki çocuğa yedi şekerin yeterli olup olmadığının sorulduğu soruda, şu şekilde açıklamıştır "Şimdi bu kural var 1 çocuk 3 şeker alabiliyorsa burada 6 şeker var. 2 çocuk için 6 şeker gerekli bir şeker de artıyor." Bir niceliğin resimlerini sadece yeni (problemde verilen orana denk) orana göre gruplama/yuvarlak içine alma tipinde ise, öğrenci problem durumu içinde verilen kuraldan (örneğin, 2 çocuğa 4 şeker) yeni bir kural durumu (örneğin, 1 çocuğa 2 şeker) elde eder ve bu yeni kuraldan gelen yeni orana göre bir niceliğe ait resimleri gruplar. Bu tip cevaplarda, öğrencilerin bir grubu sayılabilir bir birim olarak ele aldığı yani birleşik birimler oluşturdukları görülmüştür.

Resimsel gruplamaya ait bir niceliğin resimlerini verilen orana ve yeni orana göre gruplama/yuvarlak içine alma tipinde, öğrenci problem durumu içinde verilen orandan yeni bir oran elde ettikten sonra bu iki oranı aynı anda kullanır. Örneğin, 2 çocuk 4 şeker alabilir durumu içinde verilen bir problemde, bu tipe dair bir öğrenci (Ö10) cevabı aşağıda verilmiştir.

Şekil 1. *Öğrenci cevabı (Ö10): Resimsel gruplamada bir niceliğin resimlerini verilen orana göre ve yeni orana göre gruplama örneği*

Şekil 1'de öğrencinin (Ö10) şeker resimlerini hem ilk kurala göre dörderli hem de bu kurala denk yeni kurala göre ikişerli gruphadığı görülmektedir. Artan bir şeker ise bir grup oluşturmadığından işaretlenmemiştir. Öğrenciler, böylece, informel olarak bir niceliğe ait resimleri gruplama yoluyla orana dair birimleri ortaya koymuştur.

Tablo 4

Resimsel temsillerin kullanımı: Resimsel Gruplama

Resimsel Temsiller	Frekans	
Resimsel Gruplama	Resim içerikli problemler (f)	Sözel problemler (f)
Bir niceliğin resimlerini sadece verilen orana göre gruplama/yuvarlak içine alma	93	11
Bir niceliğin resimlerini sadece yeni orana göre gruplama/yuvarlak içine alma	19	2
Bir niceliğin resimlerini verilen orana ve yeni orana göre gruplama/yuvarlak içine alma	5	1
İki niceliğin resimlerini sadece verilen orana göre gruplama/yuvarlak içine alma	31	2
İki niceliğin resimlerini sadece yeni orana göre gruplama/yuvarlak içine alma	5	0
İki niceliğin resimlerini verilen orana ve yeni orana göre gruplama	2	0

Resimsel gruplamada bir niceliğe dair yapılan gruplamalara (yani, sadece verilen orana göre, sadece yeni orana göre, orana ve yeni oran göre) benzer olarak, iki nicelik (yani, şeker ve çocuk) üzerinden de aynı tür gruplamalar yapılmıştır. Örneğin, iki niceliğin resimlerini sadece verilen orana göre gruplama/yuvarlak içine alma tipinde, öğrenci problem durumu içinde verilen kurala göre her bir niceliğe ait resimleri kendi içinde gruplar, yani resim gruplarının etrafını/üzerini çizerek birleşik birimleri oluşturur (Bakınız Şekil 2).

Şekil 2. *Öğrenci (Ö28) cevabı: Resimsel gruplamada iki niceliğin resimlerini verilen orana ve yeni orana göre gruplama örneği*

Şekil 2'de Ö28'in hem şeker resimlerini ve hem de çocuk resimlerini verilen kurala (2 çocuk 4 şeker alır) göre grupladığı görülmektedir. Yani, öğrenci dört şekeri bir birim ve iki çocuğu bir birim olarak kabul ederek birleşik birimler oluşturmuştur. Resimsel gruplamada, iki niceliğe dair diğer gruplamalarda da (yani, iki niceliğin resimlerini sadece yeni orana göre gruplama, iki niceliğin resimlerini verilen orana ve yeni orana göre gruplama), öğrencilerin her iki grubu sayılabilir bir birleşik birim olarak ele aldığı görülmüştür.

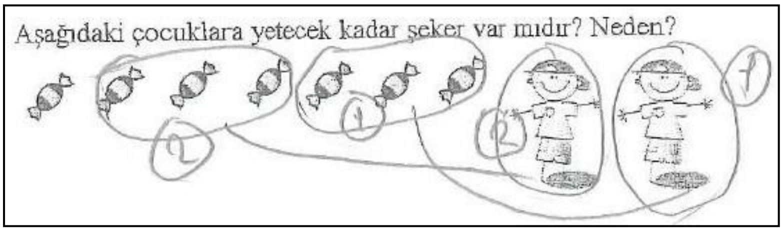
Tablo 5'te resimsel eşlemenin ortaya çıktığı iki tip görülmektedir. Burada nicelikleri kendi içinde gruplamanın ötesinde gruplanmış nicelikleri eşleme söz konusudur. Her iki resimsel eşleme temsil tipi de benzer sıklıkla kullanılmıştır.

Tablo 5

Resimsel temsillerin kullanımı: Resimsel eşleme

Resimsel Temsiller	Frekans	
Resimsel Eşleme	Resim içerikli problemler (f)	Sözel problemler (f)
İki niceliğin resimlerinin orana/yeni orana göre gruplamalarını eşleme	26	0
Bir niceliğin resimlerini orana/yeni orana göre gruplayıp, bu oranı gözeterek her gruba bir diğer niceliğin sayısal değerini eşleme ve zihinden işlem yapma (toplama/çarpma)	25	2

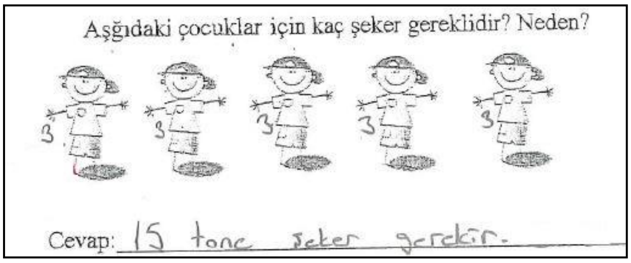
Resimsel eşlemeye ait, iki niceliğin resimlerinin orana/yeni orana göre gruplamalarını eşleme tipinde, öğrencilerin resimler yoluyla birleşik birimleri birbirine bağladığı görülmüştür. Burada, öğrenciler bir ok çizerek, bir niceliğe ait birimi diğer niceliğe ait birime bağlayabilir. Buna ilişkin bir öğrenci (Ö19) cevabı örneği Şekil 3'te verilmiştir.



Şekil 3. *Öğrenci cevabı (Ö19): Resimsel eşlemede iki niceliğin resimlerinin orana göre gruplamalarını eşleme*

Şekil 3'te, öğrenci bir çocuğa (yani, yuvarlak çizerek grupladığı çocuk sayısı birimine), üç şekeri (yani, yuvarlak çizerek grupladığı şeker sayısı birimini) ok yoluyla bağlamıştır (eşlemiştir) ve açıkta kalan şeker olduğu için yeterli şeker olmadığı sonucuna varmıştır.

Bir diğer resimsel eşleme tipi, bir niceliğin resimlerini orana/yeni orana göre gruplayıp, her gruba bu orana göre diğer niceliğin sayısal değerini eşleme ve zihinden işlem yapmadır (yani, toplama veya çarpma). Bir öğrenci cevabı örneği aşağıda verilmiştir (Bakınız, Şekil 4).



Şekil 4. *Öğrenci cevabı (Ö4): Resimsel eşlemede bir niceliğin resimlerini orana göre gruplayıp, bu oranı gözeterek her gruba bir diğer niceliğin sayısal değerini eşleme ve zihinden işlem yapma orana göre gruplamalarını eşleme*

Şekil 4'te, öğrencinin bir çocuğa karşılık (problemde kural, 1 çocuk 3 şeker olduğu için) gelen şeker niceliğinin değerini yazarak bağladığı ve herhangi bir işlem belirtmeden (yani, toplama veya çarpma gibi açıkça işlem belirtilmediğinden) sonucu ifade ettiği için zihinden işlem yaparak sonuca ulaştığı düşünülmektedir.

Sonuç olarak, Tablo 4 ve Tablo 5'e ve öğrenci cevaplarına baktığımızda, resimsel temsil tiplerinin sözel problemlere kıyasla resim içerikli problemlerde daha fazla kullanıldığı görülmüştür. Bununla beraber, öğrenciler sözel içerikli, yani soruda resim içermeyen, problemlerde dahi kendi çizimleriyle resimsel temsilleri kullanmışlardır. Yani yukarda resimli problemlerde verildiği gibi şeker veya çocuk resimleri çizerek çözümler yapmışlardır. Ayrıca, Tablo 4 ve Tablo 5'ten görülebileceği üzere hem resimsel içerikli problemlerde hem de sözel problemlerde, resimsel gruplama temsili resimsel eşlemeye göre daha sık kullanılmıştır.

Sayısal Temsiller

Veri analizine dayalı olarak, sayısal temsilin kanıtları dört başlık altında toplanmıştır. Bu başlıklar, dört işlemden bir işlem, işlemsel gruplama ve yineleme, artırma ve doğrudan sayısal değeri yazmadır. Sayısal temsillerden dört işlemden bir işlem başlığına ait beş temsil tipinin kullanıldığı görülmektedir. Bu temsil tipleri ve cevapların sıklığı Tablo 6'da verilmektedir.

Tablo 6

Sayısal temsillerin kullanımı: Dört işlemden bir işlem

Sayısal Temsiller	Frekans	
	Resim içerikli problemler (f)	Sözel problemler (f)
Dört işlemden bir işlem		
Tekrarlı toplama	0	2
Çarpma ($çocuk[grup]\ sayısı \times kural\ değeri$; $çocuk[grup] sayısı \times yeni\ kural\ değeri$)	43	41
Bölme ($şeker: kural = çocuk$)	27	19
Bölme ($şeker: yeni\ kural = çocuk$)	11	25
Bölme ($şeker: çocuk = kural$)	6	0

Tablo 6'dan görüleceği üzere dört işlemden bir işlem sayısal temsilinde, çarpma tipinin hem resim içerikli hem de sözel problemlerde sıklıklarının yakın değerde olduğu görülmüştür. Bunun yanı sıra, farklı bölme yaklaşımları olmakla birlikte (yani, $şeker: kural = çocuk, şeker: yeni\ kural = çocuk,\ şeker: çocuk = kural$), bölme tipinin de resim içerikli ve sözel problemlerde toplamda benzer sıklıklarda kullanıldığı görülmüştür. Dört işlemden bir işlem başlığı altında öğrencilerin çoğunlukla çarpma veya bölme işlemleri yaptığı görülmektedir. Çarpmanın kullanıldığı temsil tipinde, öğrenciler soruda verilen kurala bağlı olarak, çocuk sayısından elde ettikleri grup sayısını verilen kural değeri ile veya yeni kural değeri ile çarparak şeker sayısı bulmaktadır. Çarpma işleminde, örneğin 2 çocuk 4 şeker alabiliyor kuralının olduğu bir problem durumu içerisinde, öğrencinin (Ö26) çocuk sayısı ile yeni kural değeri olan ikiyi (2 çocuğa 4 şeker kuralından elde ettiği ve yeni kural olan 1 çocuğa 2 şeker kuralına dayalı olarak) çarptığı görülmektedir. Az sayıda öğrenci cevabında ise, sözel içerikli problemlerde olmak üzere, tekrarlı toplama yapıldığı görülmektedir.

Sayısal temsilde diğer üç başlığa dair temsil tipleri ve cevapların sıklığı Tablo 7'de verilmiştir. Tabloya bakıldığında, öğrencilerin sayısal temsilleri kullandığı sözel problemlerdeki cevaplarında işlemsel gruplama ve yinelemeye dair üç temsil tipi, resim içerikli problemlerdeki cevaplarında işlemsel gruplama ve yinelemeye yönelik iki temsil tipi kullandığı görülmektedir. Tablo 7'den de görülebileceği üzere sözel içerikli problemlerde sayısal temsillere dair her üç temsil tipinin de daha sık kullanıldığı görülmüştür.

Tablo 7

Sayısal temsillerin kullanımı devamı

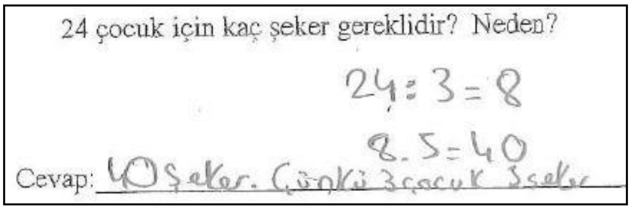
Sayısal Temsiller	Frekans	
	Resim içerikli problemler (f)	Sözel problemler (f)
İşlemsel gruplama ve yineleme		
Çocuk grup sayısı üzerinden çarpma	5	10
Şeker grup sayısı üzerinden çarpma	1	23
İçler-dışlar çarpımı	0	5
Artırma		
Bir önceki sorudan artırma	0	3
Doğrudan sayısal değeri yazma	8	15

Şeker grup sayısı (ŞGS) üzerinden çarpma tipinde, öğrencilerin aşağıdaki işlem adımlarını takip ettiği görülmektedir.

$$Çocuk\ sayısı\ \div kuraldaki\ çocuk\ sayısı = ŞGS,$$

$$ŞGS \times kuraldaki\ şeker\ sayısı = şeker\ sayısı$$

Örneğin, işlemsel gruplama ve yinelemede çocuk grup sayısı üzerinden çarpma tipinde yer alan, bir öğrenci cevabı Şekil 5'te verilmiştir. Bu sözel içerikli problem "3 çocuk 5 şeker alır"" kuralına dayalıdır.



Şekil 5. *Öğrenci cevabı (Ö1): çocuk grup sayısı üzerinden işlemsel gruplama ve yineleme örneği*

Şekil 5'te, "üç çocuk beş şeker alır" kuralına göre problemi çözen öğrenci, üçerli çocuk gruplarına karşılık gelecek şeker grup sayısını belirlemek için, 24 çocuğu üçe bölerek çocukları üçerli gruplamış ve sekiz grup belirlemiştir. Bu şeker grup sayısını (yani, sekiz) da ele alarak, her bir şeker grubuna (yani, beş şekere) bir çocuk grubu (yani, üç çocuk) karşılık geleceğini belirlemiştir. Böylece, belirlenen şeker grup sayısı (yani, sekiz) ile kuraldaki şeker sayısını (yani, kuraldan gelen bir şeker grubundaki şeker sayısını) aşağıdaki gibi çarpmıştır.

$$24 \div 3 = 8\ [Çocuk\ sayısı\ \div\ Kuraldaki\ çocuk\ sayısı =\ grup\ sayısı]$$

$$8 \times 5 =\ 40\ [Grup\ sayısı\ \times Kuraldaki\ \ şeker\ sayısı = şeker\ sayısı]$$

Aynı tipte cevap veren bir başka öğrenci (Ö7), görüşme sırasında bu soruya ilişkin cevabını şöyle açıklamıştır:

Araştırmacı: Nasıl yaptın? Bu sefer şeker, çocuk resimleri yok.

Öğrenci: 24 çocuk için kaç şeker gereklidir? Her 3 çocuk için kaç şeker gerekti? 5 şeker gerekli. 24 çocuk için bunu gruplarız önce. 8 olur. 8 grup var.

Araştırmacı: Bulduğun 8 nedir?

Öğrenci: Grup. Üçerli grup, çocuk grubu.

Araştırmacı: Çok güzel.

Öğrenci: Bir grupta 5 şeker alabilirse. 8 çarpı 5'ten 40 eder.

Araştırmacı: Yani o zaman resimle yaptığın işlemlerle, bu soruda yaptığın işlemlerin arasında bir ilişki var mı?

Öğrenci: Var.

Araştırmacı: Nasıl bir ilişki var?

Öğrenci: Mesela burada (önceki resimsel içerikli soruları gösteriyor) resimle buluyoruz. Ama burada işlem yaparak buluyoruz. Yani çocuktan gidiyoruz.

Dolayısıyla bu temsil tipini kullanan öğrencilerin işlemi yaparken, bağlı birleşik birimleri (3 çocuk-5 şeker) yineleme durumundan ortaya çıkan yineleme durumunu, grup sayısını belirleyerek ve ardından yineleyerek anlamlandırdığı düşünülmektedir.

İşlemsel gruplama ve yinelemedeki diğer bir temsil tipi içler-dışlar çarpımı sayısal temsilidir. Burada ise, öğrencilerin aşağıdaki işlemi yaptığı görülmektedir.

$$(çocuk\ sayısı \times kuraldaki\ şeker\ sayısı = kuraldaki\ çocuk\ sayısı \times şeker\ sayısı)$$

Bu durumu yukarıdaki örnek üzerinden açıklayacak olursak, öğrenci şu işlemi yapmıştır:

$$24 \times 5 = 3 \times (Şeker\ sayısı)$$

Bunların yanı sıra sayısal temsillerde öğrenciler artırma stratejisi kullanmışlar ve doğrudan sayısal değeri yazmışlardır. Örneğin, '1 çocuk 3 şeker' kuralındaki soru grubunda elde ettiği 5 çocuk 15 şeker alır cevabı üzerinden gitmiş, 18 şekeri kaç çocuk paylaşır sorusuna çocuk sayısını bir artırarak (5+1=6) çözüm üretmiştir. Yani, şeker sayısı 3 artarsa çocuk sayısı 1 artar şeklinde düşünerek işlem yapmıştır.

Resimsel-Sayısal Temsiller

Bu çalışmada Resimsel-Sayısal temsiller başlığı altında, öğrencilerin resimsel ve sayısal temsili bütünleşik olarak kullandığı ortaya konulmuştur. Veri analizine dayalı olarak, resimsel-sayısal temsil iki başlık altında toplanmıştır: resimsel-sayısal işlem ve resimsel-sayma. Tablo 8'de her bir kategori için cevapların sıklığı verilmiştir. Tablo 8'de bakıldığında öğrencilerin resimsel-sayısal işlem temsilleri resim içerikli problemlerde daha sık kullandığı görülmektedir.

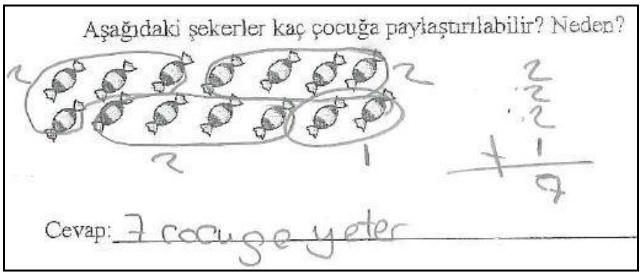
Tablo 8

Resimsel-Sayısal temsillerin kullanımı

Resimsel-Sayısal Temsiller	Frekans	
	Resim içerikli problemler (f)	Sözel problemler (f)
Resimsel-Sayısal İşlem		
Bir nicelik (Şeker/çocuk) resimlerini kurala göre gruplayıp, yanına kurala göre sayı yazma ve tekrarlı toplama	19	4
Bir nicelik (Şeker/çocuk) resimlerini kurala göre gruplayıp, yanına kurala göre sayı yazma ve çarpma	30	7
Bir nicelik (Çocuk) resimlerini yeni kurala göre gruplayıp, yanına kurala göre sayı yazma ve çarpma	2	0

Bir nicelik (şeker/çocuk) resimlerini kurala ve/veya yeni kurala göre gruplayıp, yanına kurala göre sayı yazma ve toplama	13	7
Bir nicelik resmi/resimleri grubu altına kurala ve yeni kurala göre toplayarak sayma	5	0
Resimsel-Sayma		
Bir nicelik (şeker/çocuk) resimlerini kurala/yeni kurala göre gruplayıp, kurala göre grupları sayma (örneğin, 1-2-3…)	25	6
Bir nicelik (şeker/çocuk) resimlerini kurala/yeni kurala göre gruplayıp, kurala göre ritmik sayma (örneğin, 3-6-9…)	12	11

Resimsel-sayısal işlem başlığı altında yer alan 'Bir nicelik (şeker/çocuk) resimlerini kurala ve/veya yeni kurala göre gruplayıp, yanına kurala göre sayı yazma ve toplama' tipinde öğrencilerin resim gruplarına karşılık gelen nicelik miktarını belirleyip, buldukları değerleri toplayarak sonuca ulaştığı görülmektedir (Bakınız Şekil 6).



Şekil 6. *Öğrenci cevabı (Ö2): Resimsel-sayısal işlem örneği*

Şekil 6'da verilen problemde, 2 çocuğun 4 şeker aldığı durum içerisinde, 14 tane şeker resmi verilmiş ve bu şekerlerin kaç çocuğa paylaştırılabileceği sorulmuştur. Bu durumda, öğrenci ilk aşamada verilen niceliğe ait resimleri hem problemde verilen ilk orana göre hem de ona denk olan yeni orana göre gruplamıştır. Ardından bu nicelik grubuna karşılık gelen diğer niceliğin sayı değerini belirlemiş, yazmış ve bu değerleri toplamıştır.

Tablo Temsilleri

Tablo temsilinin kanıtları iki başlık altında toplanmıştır. Biri klasik tablo temsili, diğeri tablo-benzeri temsildir. Tablo 9'da her bir kategori için cevapların sıklığı verilmiştir.

Tablo 9

Tablo temsillerinin kullanımı

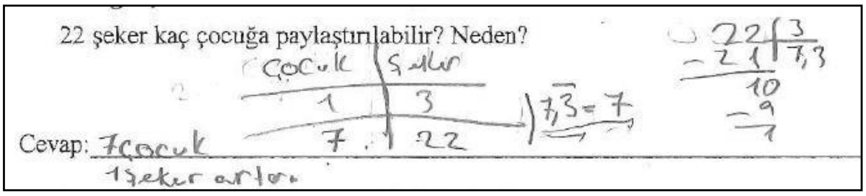
Tablo Temsilleri	Frekans	
	Resim içerikli problemler (f)	Sözel problemler (f)
Klasik tablo temsili (niceliklere ait sütunlarda kurala göre sayısal değerleri yazma)		
Tabloda bölme	5	3
Tabloda çarpma	1	
Tablo-benzeri temsil	1	3

Klasik tablo temsili altında öğrencilerin tabloda bölme ve tabloda çarpma tipinde temsiller kullandığı görülmüştür. Klasik tablo temsili tabloda çarpma tipinde öğrencilerin tablo temsili içerisinde başlıklar altında, niceliklerin sayısal değerlerini yazdığı ve sorulan nicelik için çarpma işlemi yaptığı görülmektedir. Örneğin, Şekil 7'de "1 çocuk 3 şeker alır" durumu için verilen resim içerikli soruya dair cevapta, öğrenci 4 çocuk için 12 şeker gerekeceğini tablo temsili üzerinde çarpma yoluyla bulmuştur.

Şekil 7. *Öğrenci cevabı (Ö1): Klasik tablo temsili örneği*

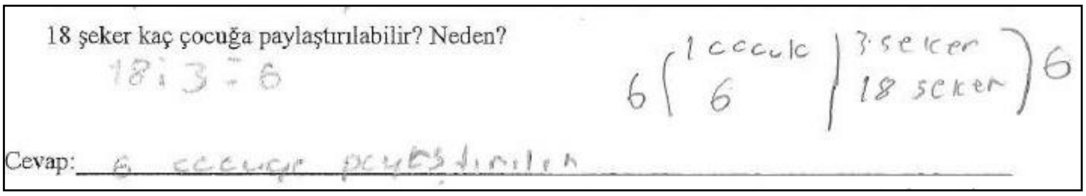
Şekil 7'de öğrenci tablo temsili üzerinde çarpma işlemi yoluyla yineleme yapmaktadır. Yani, öğrencinin tablo temsili üzerinde kısa yoldan yineleme yaptığı görülmektedir.

Klasik tablo temsili altında tabloda bölme tipinde öğrencilerin tablo temsili içerisinde başlıklar altında, niceliklerin sayısal değerlerini yazdığı ve sorulan nicelik için bölme işlemi yaptığı görülmektedir. Örneğin, Şekil 8'de "1 çocuk 3 şeker alır" durumu için verilen sözel içerikli soruya dair cevapta, öğrenci 22 şekerin 7 çocuğa paylaştırılabileceğini tablo temsili üzerinden bölme işlemi kullanarak bulmuştur.



Şekil 8. *Öğrenci cevabı (Ö1): Klasik tablo temsili örneği-2*

Tablo temsilinde diğer başlık tablo-benzeri temsildir. Bu temsilde öğrencilerin, klasik tablo temsiline benzer şekilde bir çizgiyle nicelikler arasındaki ilişkiyi koyacak ilgili sayısal değerleri, alt alta yazdığı görülmektedir. Ve ardından öğrencilerin, sorulan niceliğe ve problem durumuna göre çarpma veya bölme işlemi yaptığı görülmektedir. Buna dair örnek olarak, bir öğrencinin (Ö29) cevabı Şekil 9'da verilmiştir.



Şekil 9. *Öğrenci cevabı (Ö16): Tablo-benzeri temsil örneği*

Şekil 9'daki öğrenci görüşme sırasında cevabını "Şeker sayısını üçe böldüm. Çünkü bir çocuğa düşecek şeker sayısı üç olduğu için toplam şeker sayısını üçe böldüm. Sonra altı buluruz. Altı çocuğa paylaştırılır" diyerek bölme işlemi yaptığını açıklamıştır. Dolayısıyla, öğrenci cevabında öğrencinin tablo-benzeri temsil üzerinde bölme işlemi yaptığı, yani tablo-benzeri temsil ile kısa yoldan yineleme yaptığı görülmüştür.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada yedinci sınıf öğrencilerinin orantısal akıl yürütmenin ilk adımlarında, birleşik birimleri bağlarken ve bağlı birleşik birimleri yinelerken, temsilleri ne ölçüde kullandıkları ve bu sırada ortaya çıkan stratejiler açıklanmıştır. Resimsel içerikli sorular ve sözel sorular içeren teste verilen öğrenci cevaplarında, öğrencilerin hangi temsilleri kullandıkları incelendiğinde şu sonuçlara varılmıştır. Resimsel içerikli sorulardan her iki niceliğin resimlerinin verildiği soruları çözerken öğrencilerin çoğunlukla resimsel temsiller kullandığı görülmüştür. Dolayısıyla, yedinci sınıf öğrencileri oran-orantı öğretiminden sonra dahi resim-içerikli sorularda oran-orantıya dair informel temsilleri (yani, resimlerle gruplama ve eşleme, tablo-benzeri temsillerde sayıları yineleme ve bağlama gibi) kullanma eğiliminde olmuştur. Bununla birlikte, resimsel içerikli sorulardan niceliklerden birinin resminin verildiği soruları çözerken, öğrencilerin çoğunlukla resimsel-sayısal temsiller kullandığı görülmüştür. Resimlerin verilmediği sözel sorularda öğrencilerin sayısal temsilleri daha fazla kullandıkları görülmüştür. Ancak, yine de çarpma işlemi tipindeki sayısal temsilin hem resimsel içerikli sorularda hem de sözel içerikli sorularda neredeyse aynı düzeyde kullanıldığı görülmüştür. Ayrıca az sayıda olsa da bazı öğrencilerin tablo temsili kullandığı görülmüştür. Burada kullanılan temsillere ve temsillere arası geçişe bakıldığında, orantısal akıl yürütmenin temelinde birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme ve çarpımsal düşünme anlayışının yer aldığı fikri bu çalışmanın sonuçlarıyla desteklenmektedir (Battista ve Borrow, 1995; Steffe, 1994). Dolayısıyla, öğrencilerin orantısal akıl yürütmenin ilk adımlarına yönelik sorularda informel temsilleri daha çok kullandığı sonucuna varılmıştır.

Testteki sorularda, verilen üç oran bağlamı içinde her iki nicelik için resim kullanma, bir nicelik için resim kullanma ve sözel ifade kullanma şeklinde bir akış takip edilmiştir. Testin böyle bir akışı takip etmesinin öğrencilerin resimsel temsiller kullanma ve resimsel-sayısal temsiller kullanma biçimlerinden sayısal temsiller kullanma biçimlerine geçiş yapmasında bir rolü olabileceği düşünülmektedir. Öyle ki, birebir eşlemenin orantısal akıl yürütmenin temeli olabileceği düşünüldüğünde (Nunes vd., 2010; Park ve Nunes, 2001), öğrencilerin resimleri birebir, bire-çok ya da çoka-çok eşleme yoluyla orantısal akıl yürütmeye dair stratejiler ürettiği ve bunun ardından sayısal temsiller kullanarak sözel problemleri çözebildikleri düşünülmektedir. Bununla birlikte, sonraki çalışmalarda daha büyük bir katılımcı grubu ile oran-orantı problemlerinin yapısı, öğrencilerin kullandıkları temsil tipleri ve stratejiler arasındaki ilişki olup olmadığı incelenebilir.

Diğer bir yandan, birçok araştırmacı tüm seviyelerdeki öğrencilerin orantısal akıl yürütme problemlerinde içler-dışlar çarpımı gibi algoritmaları sıklıkla kullandıklarını ortaya koymuştur (Arıcan, 2019; Atabaş ve Öner, 2017; Ben-Chaim vd., 1998; Cramer vd., 1993; Duatepe vd., 2005; Kahraman vd., 2019; Kaplan vd., 2011; Kayhan vd., 2004; Mersin, 2018; Özgün-Koca ve Altay, 2009). Sonuçlardan anlaşılacağı üzere, bu çalışma kapsamında, öğrenciler ezbere algoritmalar yerine informel ve formel temsiller (yani, oranın kesir gösterimi, orantı gösterimi) kullanarak problemlere yaklaşmışlardır. Dolayısıyla, bu anlamda, bu çalışmanın sonuçları yukarıda bahsi geçen çalışmaların sonuçlarından büyük ölçüde farklılaşmaktadır. Öğrencilerin ezbere-dayalı ya da algoritmik stratejilerin yerine çeşitli temsiller kullanarak problemlere yaklaşmalarının, tasarlanan ve uygulanan öğretimde işlemsel algoritmalar yerine informel ve formel temsillere önem verilmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Buradan yola çıkarak, anlamlı temsillerin önemsendiği bir sınıf içi öğretim sonrasında öğrencilerin çeşitli temsiller kullanarak ve sadece içler-dışlar çarpımı gibi algoritmalara ihtiyaç duymadan orantısal akıl yürütme problemlerine yönelik çözüm yolları geliştirebilecekleri sonucuna varılabilir.

Benzer şekilde, bu çalışma kapsamında öğrencilerin orantısal akıl yürütme problemlerinde yanlış toplamsal düşünme biçimi ortaya koymadığı görülmüştür. Bu sonuç yüksek oranda yanlış toplamsal düşünme biçimi kullanımının belirtildiği birçok çalışmanın sonuçlarından farklılaşmaktadır (Ben-Chaim vd., 1998; Duatepe vd., 2005; Fernández vd., 2012; Harel vd., 1994; Inhelder ve Piaget, 1958; Kahraman vd., 2019; Kaplan vd., 2011; Kaput ve West, 1994; Karplus vd., 1983; Kayhan vd., 2004; Mersin, 2018; Misailidou ve Williams, 2003; Özgün-Koca ve Altay, 2009; Piaget ve Inhelder, 1975; Resnick ve Singer, 1993; Tourniaire ve Pulos, 1985, Tourniaire, 1986; van Dooren vd., 2010). Örneğin, Mersin (2018) ortaokul öğrencileri ile yaptığı çalışmada, öğrencilerin yanlış toplamsal düşünme biçimini kullandıklarını, öğrencilerin ne zaman orantısal akıl yürütme kullanacağını belirleyemediğini belirtmiş ve bu durumu öğrencilerde önce toplamsal akıl yürütmenin gelişmesine bağlamıştır. Resnick ve Singer (1993) ise yanlış toplamsal düşünme biçiminin öğrencilerde yaygın olmasının sebebini çarpımsal düşünme şemalarının toplamsal düşünme şemalarından daha geç oluşması ve öğrencilerin toplamsal ilişkileri yorumlamada çarpımsal ilişkileri yorumlamadan daha fazla deneyimleri olmasından kaynaklandığını öne sürmektedir. Bu çalışmada yanlış toplamsal düşünme biçiminin görülmemesinin sebebinin, tasarlanan öğretim dizisinde orantısal akıl yürütmenin temelinin, toplamsal düşünmeden ziyade, birleşik birimleri yineleme ve bağlı birleşik birimleri yineleme becerilerinden geçtiğinin ilkesinin benimsenmesi ve öğretimde bu becerilerin geliştirilmesine önem verilmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Dolayısıyla, bu çalışmanın sonuçları da orantısal akıl yürütmenin temelinin birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme becerilerinden geçtiğini vurgulayan çalışmaların sonuçlarını (Battista ve Borrow, 1995; Park ve Nunes, 2001; Steffe, 1994) destekler niteliktedir.

Öneriler

Bireysel temsil kullanımına dair bulgular içeren bu çalışmanın sonuçları, mevcutta uygulanan bir öğretimsel etkinlik dizisinin sınıf içi öğrenmeye dair sonuçları (yani, Ayan-Civak vd. (2022)) ile düşünülebilir. Bu bağlamda, bu sonuçlar araştırmacılar ve eğitimcilere, öğrencilerin sınıf içi öğrenmesiyle birlikte bireysel öğrenmesini de birlikte irdeleyebilecekleri, bütünleşik bir anlayış geliştirmesine olanak sağlayabilir. Öncelikle Ayan-Civak ve diğerleri (2022) geliştirdikleri öğrenme rotasında birleşik birimleri bağlama ve yineleme becerileri erken orantısal akıl yürütme becerileri olarak adlandırılmıştır. Orantısal akıl yürütmenin temelinin Steffe (1994) ile Battista ve Borrow'un (1995) da ileri sürdüğü gibi birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme becerileri olduğu düşünüldüğünde, bu becerilerin geliştirilmesi sürecinde, öğrencilerin informel temsillerden formel temsillere geçişlerinin desteklenmesi gerektiği düşünülmektedir. Dolayısıyla, erken orantısal akıl yürütme becerilerine yönelik geliştirilen bir öğrenme rotası ile yapılan bir öğretimde, öğrencilerin bu becerileri geliştirme yönünde informel araçları ve temsilleri kullanımının desteklenmesinin, öğrencilerin yazılı cevaplarında da bu araçları kullanımını destekleyebileceği sonucuna varılabilir. Bu sebeplerden dolayı öğrencilerin orantısal akıl yürütmeleri kapsamında, informel araçlardan formel araçlara geçişlerini desteklemek adına öğretim dizilerinin geliştirilmesine, uygulanmasına ve bireysel ve sınıf-içi öğrenci uygulamalarının bir arada ortaya konmasına yönelik araştırmalara ihtiyaç duyulduğu düşünülmektedir.

Çıkar Çatışması Bildirimi

Yazarlar, bu makalenin araştırılması, yazarlığı ve/veya yayınlanmasına ilişkin herhangi bir potansiyel çıkar çatışması beyan etmemiştir.

Destek/Finansman Bilgileri

Bu araştırma Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (Proje No 217K430) tarafından desteklenmekmiştir.

Etik Kurul Kararı

Bu araştırma için Orta Doğu Teknik Üniversitesi İnsan Araştırmaları Etik Kurulu'nun 07.11.2017 tarih ve 28620816/549 sayılı ve Ankara İl Milli Eğitim Müdürlüğü 08.12.2017 tarih ve 14588481-605.99-E.21143479 sayılı kararları ile etik izin alınmıştır.

Kaynakça/References

Akkuş, O. & Duatepe Paksu, A. (2006). Orantısal akıl yürütme becerisi testi ve teste yönelik dereceli puanlama anahtarı geliştirilmesi. *Eurasian Journal of Educational Research, 25,* 1–10.

Arıcan, M. (2019). A diagnostic assessment to middle school students' proportional reasoning. *Turkish Journal of Education*, *8*(4), 237–257. https://doi.org/10.19128/turje.522839

Atabaş, Ş. & Öner, D. (2017). An examination of Turkish middle school students' proportional reasoning. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, *33*(1), 63–85.

Battista, M. & Borrow, C. V. A. (1995). *A proposed constructive itinerary from iterating composite units to ratio and proportion concepts.* Paper presented at the Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Columbus, OH.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296–233). Macmillan.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver E. (1983). Rational number concepts. R. Lesh ve M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (pp. 91–125). Academic Press.

Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics*, *36*(3), 247–273.

Cramer, K., Post, T. & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom* (pp. 159–178). Macmillan Publishing Company.

Çelik, A. & Yetkin-Özdemir, E. (2011). İlköğretim öğrencilerinin orantısal akıl yürütme becerileri ile problem kurma becerileri arasındaki ilişki. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *30*(1), 1–11.

Duatepe, A., Akkuş-Çıkla, O. & Kayhan, M. (2005). Orantısal akıl yürütme gerektiren sorularda öğrencilerin kullandıkları çözüm stratejilerinin soru türlerine göre değişiminin incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *28*, 73–81.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Proceedings of the annual meeting of the north american chapter of the International group fort he pschology of mathematics education (21st, Cuernavaca, Morelos, Mexico, October 23-26, 1999) (pp. 3–26).*

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D. & Verschaffel, L. (2012). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *European Journal of Psychology of Education*, *27*(3), 421–438. http://dx.doi.org/10.1007/s10212-011-0087-0

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3–17. http://dx.doi.org/10.2307/748969

Goldin, G. (1997). Observing mathematical problem solving through task-based interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 9*, 40–177. doi:10.2307/749946. http://dx.doi.org/10.2307/749946

Goldin, G.A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, M. G. Martin, ve S. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275–286). National Council of Teachers of Mathematics.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney ve N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 17–51). Routledge.

Harel, G., Behr, M., Lesh, R. & Post, T. (1994). Invariance of ratio: The case of children's anticipatory scheme for constancy of taste. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(4), 324–345.

Inhelder, B. ve Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence.* New York: Basic Books.

Kahraman, H., Kul, E. & Aydoğdu-İskenderoğlu, T. (2019). 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin nicel karşılaştırma içeren orantısal akıl yürütme problemlerinde kullandıkları stratejiler. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *10*(1), 195–216. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.333046

Kaplan, A., İşleyen, T. & Öztürk, M. (2011). 6. sınıf oran orantı konusundaki kavram yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *19*(3), 953–968.

Kaput, J. J. & West, M. M. (1994). Missing-value proportional problems: factors affecting informal reasoning patterns. G. Harel ve J. Confrey, (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235–287). State University of New York Press.

Karplus, R., Pulos, S. & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 219–233.

Kayhan, M., Duatepe, A. & Akkuş-Çıkla, O. (2004, Eylül). İlköğretim ikinci kademe öğrencilerinin orantısal akıl yürütme gerektiren sorularda kullandıkları çözüm stratejileri. VI. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 9-11 Eylül, İstanbul.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. G. Harel ve J. Confrey, (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89–120). State University of New York Press.

Lamon, S. J. (1995). Ratio and proportion: Elementary didactical phenomenology. J. T. Sowder ve B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 167–198). State University of New York Press.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–668). Information Age Publishing.

Lesh, R., Behr, M. & Post, T. (1987a). Rational number relations and proportions. C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 41–58). Lawrence Erlbaum.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. R. Lesh ve H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–34). Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh R., Post, T. & Behr, M. (1987b). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. C. Janvier (Ed.), *Problems of*

Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 33–40). Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. J. Hiebert, ve M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Lawrence Erlbaum ve National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Martínez-Juste, S., Arıcan, M., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2023). A diagnostic comparison of Spanish and Turkish middle school students' proportional reasoning. *Asian Journal for Mathematics Education*, *2*(1), 64-90. https://doi.org/10.1177/27527263231166

Mersin, N. (2018). İki aşamalı teşhis testine göre ortaokul 5, 6 ve 7. sınıf öğrencilerinin orantısal akıl yürütmelerinin değerlendirilmesi. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi*, *7*(4), 319–348. http://dx.doi.org/10.30703/cije.426627

Miles, M, B. & Huberman, A. M. (1994). Qualitative data analysis: An expanded Sourcebook. (2nd ed). Sage.

Misailidou, C. & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 335–368. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00025-7

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I: The determination of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*(2), 217–253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part II—problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(3), 331–363. https://doi.org/10.1007/BF00304357

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., & Bell, D. (2010). The scheme of correspondence and its role in children's mathematics. *BJEP Monograph Series II, Number 7-Understanding number development and difficulties* (Vol. 83, No. 99, pp. 83–99). British Psychological Society.

Özgün-Koca, S. A., & Altay, M. K. (2009). An investigation of proportional reasoning skills of middle school students. *Investigations in Mathematics Learning*, *2*(1), 26–48. https://doi.org/10.1080/24727466.2009.11790289

Park, J. H. & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, *16*(3), 763–773. https://doi.org/10.1016/S0885-2014(01)00058-2

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods* (2nd ed.). Sage Publications, Inc.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). *The origin of idea of chance in children*. Norton.

Post, T., Behr, M. & Lesh, R (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics. 8*(1), 39–48.

Proulx, J. (2023). Relative proportional reasoning: transition from additive to multiplicative thinking through qualitative and quantitative enmeshments. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10373-y

Resnick, L. B. & Singer, J. A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. T. P. Carpenter, E. Fennema ve T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 107–130). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel ve J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3–39). State University of New York Press.

Supply, AS., Vanluydt, E., Van Dooren, W., & Onghena, P. (2023). Out of proportion or out of context? Comparing 8- to 9-year-olds' proportional reasoning abilities across fair-sharing, mixtures, and probability contexts. *Educational Studies in Mathematics, 113* (3), 371–388. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10212-5

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(4), 401–412.

Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(2), 181–204. https://doi.org/10.1007/PL00020739

van Dooren, W., De Bock, D. & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back: The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, *28*(3), 360–381. https://doi.org/10.1080/07370008.2010.488306

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(2), 110–113. https://doi.org/10.5951/MTMS.14.2.0110

Ayan-Civak, R., Işıksal-Bostan, M., & Yemen-Karpuzcu, S. (2022). Orantısal Akıl Yürütmenin Gelişimine Yönelik Varsayıma Dayalı Öğrenme Rotasının Geliştirilmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* *37*(1), 345–365. https://doi.org/10.16986/HUJE.2020063485

Ayan-Civak, R., Işıksal-Bostan, M., & Yemen-Karpuzcu, S. (2023). From informal to formal understandings: analysing the development of proportional reasoning and its retention. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2160384

Yin, R. K. (2009). *Case study research: design and methods* (4th ed.). Sage Publications Inc.

İletişim/Correspondence

Dr. Öğr. Üyesi Seçil YEMEN KARPUZCU
secil.karpuzcu@dpu.edu.tr

Dr. Öğr. Üyesi Rukiye AYAN CİVAK
rukiye.ayancivak@idu.edu.tr

Prof. Dr. Mine IŞIKSAL BOSTAN
misiksal@metu.edu.tr

Ek 1

Kod listesi

Orantısal Düşünmede Birimleri birleştirme ve yinelemede kullanılan gösterimlere dair kod listesi

Gösterim		Gösterimin Alt Tipi	Kod Kısaltma
Resimsel Gösterim	*Resimsel Gruplama*	Bir niceliğin resimlerini sadece verilen orana göre gruplama/yuvarlak içine alma	R-GRUP-1r-o
		Bir niceliğin resimlerini sadece yeni orana göre gruplama/yuvarlak içine alma	R-GRUP-1r-yo
		Bir niceliğin resimlerini verilen orana ve yeni orana göre gruplama/yuvarlak içine alma	R-GRUP-1r-oyo
		İki niceliğin resimlerini sadece verilen orana göre gruplama/yuvarlak içine alma	R-GRUP-2r-o
		İki niceliğin resimlerini sadece yeni orana göre gruplama/yuvarlak içine alma	R-GRUP-2r-yo
		İki niceliğin resimlerini verilen orana ve yeni orana göre gruplama	R-GRUP-2r-oyo
	Resimsel Eşleme	İki niceliğin resimlerinin orana/yeni orana göre gruplamalarını eşleme	R- EŞ-1r-o/yo
		Bir niceliğin resimlerini orana/yeni orana göre gruplayıp, bu oranı gözeterek her gruba bir diğer niceliğin sayısal değerini eşleme ve zihinden işlem yapma (toplama/çarpma)	R-EŞ-1r-o/yo-zihinden
Sayısal Gösterim	*Dört işlemden bir işlem*	Tekrarlı toplama	S-Dİ-ttop
		Çarpma (çocuk [grup] sayısı × kural değeri; çocuk [grup] sayısı × yeni kural değeri)	S-Dİ-çarpma
		Bölme (şeker: kural = çocuk)	S-Dİ-b-şkç
		Bölme (şeker: yeni kural = çocuk)	S-Dİ-b-şykç
		Bölme (şeker: çocuk = kural)	S-Dİ-b-şçk
	İşlemsel gruplama ve yineleme	Çocuk grup sayısı üzerinden çarpma	S-ORANTISAL-çgs
		Şeker grup sayısı üzerinden çarpma	S-ORANTISAL-şgs
		İçler dışlar çarpımı	S-ORANTISAL-içdış
	Artırma	Bir önceki sorudan artırma	S-ARTIRMA
	Doğrudan sayısal değeri yazma		S-DOGRUDAN
Tablo Gösterimi	*Klasik tablo gösterimi*	Tabloda bölme	T-KLASİK-b
		Tabloda çarpma	T-KLASİK-ç
	Tablo-benzeri gösterim		T-TBENZERİ

Orantısal Düşünmede Birimleri birleştirme ve yinelemede kullanılan gösterimlere dair kod listesi devamı

	Gösterim	Gösterimin Alt Tipi	Kısaltma
Resimsel-Sayısal Gösterim	*Resimsel-Resimsel İşlem**	Bir nicelik resmi/resimleri grubu altına kurala göre diğer nicelik miktarını temsil eden resim çizme ve (zihinden) toplama	RS-RRİ
	Resimsel-Sayısal İşlem	Bir nicelik (Şeker/çocuk) resimlerini kurala göre gruplayıp, yanına kurala göre sayı yazma ve tekrarlı toplama	RS-RSİ-k-grupttop
		Bir nicelik (Şeker/çocuk) resimlerini kurala göre gruplayıp, yanına kurala göre sayı yazma ve çarpma	RS-RSİ-k-grupçarp
		Bir nicelik (Çocuk) resimlerini yeni kurala göre gruplayıp, yanına kurala göre sayı yazma ve çarpma	RS-RSİ-yk-çarp
		Bir nicelik (şeker/çocuk) resimlerini kurala ve/veya yeni kurala göre gruplayıp, yanına kurala göre sayı yazma ve toplama	RS-RSİ-k/yk-top
		Bir nicelik resmi/resimleri grubu altına kurala ve yeni kurala göre toplayarak sayma	RS-RSİ-kyk-topsay
	Resimsel-Sayma	Bir nicelik (şeker/çocuk) resimlerini kurala/yeni kurala göre gruplayıp, kurala göre grupları sayma (örneğin, 1-2-3…)	RS-RSay-grupsay
		Bir nicelik (şeker/çocuk) resimlerini kurala/yeni kurala göre gruplayıp, kurala göre ritmik sayma (örneğin, 3-6-9…)	RS-Rsay-grupritm

*Bu kod bir öğrencide görüldüğünden bulgularda detaylandırılmamıştır.