

Düzeltilme: Yönlendirilmemiş Power Graflarda Hyper-Wiener, Harary, SK , SK_1 ve SK_2 İndeksleri

Volkan AŞKIN* 

* Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Türkiye

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author
E-mail: volkan.askin@gazi.edu.tr

Araştırma Makalesi/Research Article
Geliş Tarihi/Received: 19.05.2021
Kabul Tarihi/Accepted: 18.06.2021

ÖZ

Sonlu bir Z_n grubunun yönlendirilmemiş $P(Z_n)$ power grafi, köşelerinin kümesi Z_n olan bağlantılı bir graftır ve burada iki köşe komşudur gerek ve yeter şart $u \neq v$, $\langle v \rangle \subseteq \langle u \rangle$ veya $\langle u \rangle \subseteq \langle v \rangle$ dir. $(Z_n, +)$ grubuna karşılık gelen yönlendirilmemiş $G = P(Z_n)$ power grafinin Hyper-Wiener, Harary, SK , SK_1 ve SK_2 İndeksleri sırasıyla; $\frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d(u,v) + \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d^2(u,v)$, $\sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \frac{1}{d(u,v)}$, $\frac{1}{2} \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u + d_v)$, $\frac{1}{2} \sum_{uv \in E(P(Z_n))} d_u d_v$ and $\frac{1}{4} \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u + d_v)^2$ olarak tanımlandı. Bu makalede $P(Z_{p^k})$ ve $P(Z_{p \cdot q})$ power graflarının Hyper-Wiener, Harary, SK , SK_1 ve SK_2 İndekslerinin hesaplamaları üzerine odaklanıyoruz. Giriş bölümünde yönlendirilmemiş power grafinin tanımı yapıldı. Aynı şekilde bu bölümde bizim için gerekli olan sonuçlar ve teoremler verildi. Bu makalede öncelikle, p ve q farklı asal sayılar olmak üzere p^k ve $p \cdot q$ köşelerine karşılık gelen yönlendirilmemiş $P(Z_n)$ power grafinin Hyper-Wiener indeksini bulup belirli koşullar altında bu power grafinin Hamilton olduğunu gösteriyoruz. Daha sonra aynı değerlere karşılık gelen bu power grafinin n veya $\phi(n)$ ile bağlantılı Harary indeksini hesaplıyoruz. Devamında, p ve q farklı asal sayılar olmak üzere, bu power grafinin p, q veya $\phi(n)$ ile bağlantılı SK_1 ve SK_2 İndekslerini buluyoruz. Son olarakta, bu power grafinin p, q, n, SK_1 veya $\phi(n)$ ile bağlantılı SK_2 İndeksini hesaplıyoruz.

Anahtar Kelimeler: Hyper-Wiener indeksi, SK indeksi, SK_1 indeksi, SK_2 indeksi, Harary indeksi, Yönlendirilmemiş power graf

Erratum: Hyper-Wiener, Harary, SK , SK_1 and SK_2 Indexes of an Undirected Power Graph

ABSTRACT

The undirected $P(Z_n)$ power graph of a finite group of Z_n is a connected graph whose set of vertices is Z_n , where the two vertices are neighbors, and the necessary and sufficient condition is $u \neq v$ and $\langle v \rangle \subseteq \langle u \rangle$ or $\langle u \rangle \subseteq \langle v \rangle$. $(Z_n, +)$ a group corresponding to the Undirected $G = P(Z_n)$ power of graphs with the Hyper-Wiener, Harary SK , SK_1 and SK_2 indices, respectively, $\frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d(u,v) + \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d^2(u,v)$, $\sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \frac{1}{d(u,v)}$, $\frac{1}{2} \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u + d_v)$, $\frac{1}{2} \sum_{uv \in E(P(Z_n))} d_u d_v$ and $\frac{1}{4} \sum_{uv \in E(P(Z_n))} (d_u + d_v)^2$ are defined as. This article also focuses on the calculations Hyper-Wiener, SK , SK_1 , SK_2 and Harary indices of $P(Z_{p^k})$ and $P(Z_{p \cdot q})$ power graphs. In the introduction, the definition of an undirected power graph was made. In the same way, the results and theorems necessary for us were given in this section. In this article, we first find the Hyper-Wiener index of the undirected $P(Z_n)$ power graph corresponding to the values p^k and $p \cdot q$, p and q being different primes, and show that under certain conditions, this power graph is Hamiltonian. Then we calculate the Harary index associated with n or $\phi(n)$ of this power graph corresponding to the same values. In the continuation, we find the indices SK ve SK_1 linked to p, q or $\phi(n)$ of this power graph, with p and q being different primes. Finally, we calculate the SK_2 index of this power graph linked to p, q, n, SK_1 or $\phi(n)$.

Keywords: Hyper-Wiener index, SK index, SK_1 index, SK_2 index, Harary index, Undirected power graph

Cite as;

Aşkın, V. (2022). Yönlendirilmemiş Power Graflarda Hyper-Wiener, Harary, SK , SK_1 ve SK_2 İndeksleri, *Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 3(2), 146-155. Doi: 10.53501/rteufemud.1227184

Orcid ID: V.Aşkın, 000-0003-2990-4858

1. Giriş

Bir G grup için yönlendirilmemiş $P(G)$ power grafını aşağıdaki gibi tanımlarız. $u \in G$ ve \mathbb{N} doğal sayılar kümesi olmak üzere $\langle u \rangle$ tarafından üretilen devirli alt grubu $\langle u \rangle = \{u^m | m \in \mathbb{N}\}$ ile gösterelim. $P(G)$, G köşeli yönlendirilmemiş bir power graf olsun. Burada $u, v \in G$ köşeleri komşudur gerek ve yeter şart $u \neq v$, $\langle v \rangle \subseteq \langle u \rangle$ veya $\langle u \rangle \subseteq \langle v \rangle$ olmasıdır. (buna denk olarak $u \neq v$ ve bazı m pozitif tamsayısı için $u^m = v$ veya $v^m = u$ olmasıdır.) (Chakrabarty vd., 2009). Bir G grafi için, $d_u = d(u)$ ve $d(u, v)$, sırasıyla $u \in V(G)$ köşesinin derecesini ve $u, v \in V(G)$ köşeleri arasındaki en kısa mesafeyi gösterebilir. n module göre toplamsal Z_n grubu için $P(Z_n)$ power grafını ele alıyoruz. n pozitif tamsayısı için n nin Euler fonksiyonunu $\phi(n)$ ile göstereceğiz. Shegahalli ve diğerleri tarafından (Shegahalli vd., 2016) de yeni topolojik indeksler tanımlandı ve daha sonra bir G grafi için SK , SK_1 ve SK_2 indeks formüllerini ortaya koydular. Aşağıda Shegahalli ve diğerleri derece tabanlı iki yeni topolojik indeksleri tanıttılar. (SK indeksler):

$$SK(G) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} d(u) + d(v)$$

$$SK_1(G) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} d(u) \cdot d(v)$$

$$SK_2(G) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{uv \in E(G)} (d(u) + d(v))^2 \text{ 'dir.}$$

$W(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d(u, v)$ Wiener indeksi uygulama ve teorik bakış açıları en çok çalışılan topolojik indekstir (Dobrynin vd., 2001). Hyper-Wiener indeksi, yakın zamanda tanımlanan mesafeye dayalı moleküler yapı tanımlayıcılarından biridir (Gutman, 1997).

$$WW(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d(u, v) + \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d^2(u, v).$$

Bağlantılı bir grafın Harary indeksi, kullanışlı bir topolojik indekstir. Bu Plavšić ve diğerleri

(Plavšić vd., 1993) ve Ivanciuc ve diğerleri tarafından 1993 yılında (Ivanciuc vd., 1993) da tanıtıldı. Bir G grafının Harary indeksi

$$H(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \frac{1}{d(u, v)}$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 1. (Aşkın ve Büyükköse, 2021) p asal sayı ve k pozitif tamsayı olsun. O halde m kenarlı p^k mertebeden yönlendirilmemiş $P(Z_{p^k})$ power grafının Wiener indeksi

$$W(P(Z_{p^k})) = m = \binom{p^k}{2} \text{ şeklindedir.}$$

Sonuç 2. (Aşkın ve Büyükköse, 2021) p ve q farklı asallar olmak üzere $P(Z_n)$, $n = pq$ köşeli ve m kenarlı yönlendirilmemiş bir power graf olsun. O halde

$$W(P(Z_{pq})) = m + 2 \phi(pq)$$

veya denk olarak

$$W(P(Z_{pq})) = \binom{pq}{2} + \phi(pq) \text{ 'dir.}$$

Teorem 3. (Chakrabarty vd., 2009) n tamsayısı, $n \geq 3$ ise o halde $P(Z_n)$, hamiltondur.

Teorem 4. (Walikar vd., 2004) G , n köşeli ve m kenarlı bağlantılı bir graf olsun. Eğer $diam(G) \leq 2$ ise o halde $W(G) = n(n - 1) - m$ 'dir.

2. Esas Sonuçlar

Bu bölümde amacımız, p ve q nun farklı asal sayılar olduğu ve k nin negatif olmayan bir tamsayı olduğu $n = p^k$ veya $n = pq$ için yönlendirilmemiş $P(Z_n)$ power grafının Hyper-Wiener, SK , SK_1 , SK_2 ve Harary İndeksleri üzerinde ana sonuçlarımızı vermektir.

Teorem 5. $P(Z_n)$ yönlendirilmemiş power graf olsun. O halde

$$WW(P(Z_n)) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 1, & u \sim v \\ 3, & u \not\sim v \end{cases}$$

'dir.

İspat. $\mathbb{R} = \left\{ \{u, v\} \subseteq V(P(Z_n)) \mid u \sim v \text{ gerek ve yeter şart } u \neq v, \langle u \rangle \subseteq \langle v \rangle \text{ veya } \langle v \rangle \subseteq \langle u \rangle. \right\}$

kümesini kullanarak $V(P(Z_n)) = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^c$ şeklinde yazabiliriz.

$$WW(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d(u,v) + \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d^2(u,v)$$

olmak üzere herhangi bir $\{u, v\} \subseteq V(P(Z_n))$ köşeleri ya komşudur yada komşu değildir. Dolayısıyla

$$V(P(Z_n)) = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^c$$

şeklinde yazabiliriz. Hyper-Wiener indeksi tanımı kullanılacak olursa,

$$WW(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d(u,v) + \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d^2(u,v)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^c} d(u,v) (1 + d(u,v))$$

$$WW(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R}} d(u,v) (1 + d(u,v)) + \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R}^c} d(u,v) (1 + d(u,v))$$

$$WW(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R}} 2 + \sum_{\{u,v\} \subseteq \mathbb{R}^c} 6 \right)$$

$$WW(P(Z_n)) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 1, & \{u,v\} \subseteq \mathbb{R} \\ 3, & \{u,v\} \not\subseteq \mathbb{R} \end{cases}$$

\mathbb{R} nin tanımından,

$$WW(P(Z_n)) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 1, & u \sim v \\ 3, & u \not\sim v \end{cases} \text{ yazarız ve dolayısıyla ispat tamamlanır.}$$

Teorem 6. $p \neq q$ farklı asallar ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. n mertebeli m kenarlı yönlendirilmemiş $P(Z_n)$ power grafi için,

eğer $n = p^k$ ise

$$WW(P(Z_n)) = 2W(P(Z_n))$$

ve eğer $n = pq$ ise

$$WW(P(Z_n)) = 2\binom{n}{2} + 4\phi(n) \text{ 'dir.}$$

İspat. Sonuç 2. (Aşkın ve Büyükköse, 2021) gereğince; $n = p^k$ için $m = \binom{n}{2}$ ve $n = pq$ için

$$W(P(Z_n)) = \binom{n}{2} + \phi(n) = 2\phi(n) + m$$

olduğundan Hyper- Wiener indeksi tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılarak

$n = p^k$ için;

$$\begin{aligned}
WW(P(Z_n)) &= \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d(u,v) + \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d^2(u,v) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (d(u_i) + 2(n-1-d(u_i))) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (d(u_i) + 4(n-1-d(u_i))) \\
&= \frac{6n(n-1)}{2} - 2 \sum_{i=1}^n d(u_i) \\
&= 6 \binom{n}{2} - 4m
\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılacak olursa;

$$WW(P(Z_n)) = 2W(P(Z_n))$$

elde edilir.

Diğer taraftan $n = pq$ için;

$$\begin{aligned}
WW(P(Z_n)) &= 6 \binom{n}{2} - 4m \\
&= 6 \binom{n}{2} - 4 \cdot \left(\binom{n}{2} - \phi(n) \right)
\end{aligned}$$

$$WW(P(Z_n)) = 2 \binom{n}{2} + 4\phi(n)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 7. G devirli bir grup olsun. $e \in G$ birim eleman olmak üzere herhangi bir $e \neq a \in G$ alalım. Eğer $a \sim b$ olacak şekilde $e \neq b \in G$ varsa $\delta(P(G)) \geq 2$ dir.

İspat. G devirli bir grup ve $e \in G$ birim eleman olsun. Yönlendirilmemiş $P(G)$ power grafının tanımı gereği $\forall u \in G$ için $u \sim e$ olduğundan $d(u, e) = 1$ olur. O halde δ derece olduğundan negatif olamaz. Ayrıca hipotezden kabul edelim ki herhangi bir $u \in G$ için $u \sim b$ olacak şekilde $e \neq b \in G$ olsun. Bu bize $u \in G$ nin hem $e \in G$ ile hem de $b \in G$ ile arasında farklı bir yollar olduğunu gösterir. Bu da

$$\min\{u \in V(P(G)) | d(u)\} \geq 2$$

olduğunu gösterir. O halde $\delta(P(G))$ nin tanımı gereği istenen elde edilmiş olur ve ispat biter.

Sonuç 2.4. $(Z_n, +)$ devirli grup olmak üzere, eğer $\delta(P(Z_n)) \geq 2$ ise yönlendirilmemiş $P(Z_n)$ power grafi Hamiltondur.

İspat. Kabul edelim ki $\delta(P(Z_n)) \geq 2$ olsun. O halde bu bize $n \geq 3$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan Teorem 3. (Chakrabarty vd., 2009) kullanılacak olursa $P(Z_n)$ power grafi Hamilton olur ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 9. $p \neq q$ farklı asal sayılar ve k pozitif bir tamsayı olsun. O halde n mertebeden ve m kenarlı $P(Z_n)$ power grafi için,

eğer $n = p^k$ ise

$$H(P(Z_n)) = 2 \binom{n}{2}$$

ve eğer $n = pq$ ise

$$H(P(Z_n)) = 2 \binom{n}{2} - \phi(n)$$

dir.

İspat. Harary indeks tanımı ve gerekli bilgiler kullanılacak olursa;

$$\begin{aligned}
H(P(Z_n)) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \frac{1}{d(u,v)} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(d(u_i) + \frac{1}{2}(n-1-d(u_i)) \right) \\
&= \binom{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d(u_i)
\end{aligned}$$

$$= \binom{n}{2} + m$$

elde edilir. Eğer $n = p^k$ ise sonuç 1. (Aşkın ve Büyükköse, 2021) gereğince

$$W(P(Z_{p^k})) = \binom{p^k}{2}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan teorem 4. (Walikar vd., 2004) gereğince

$$W(P(Z_{p^k})) = p^k(p^k - 1) - m$$

idi. Dolayısıyla

$$m = \binom{n}{2}$$

olur. O halde bu bilgiler doğrultusunda düzenleme yapılacaktır,

$$H(P(Z_n)) = 2 \binom{n}{2}$$

İspat. $n = p^k$ (p asal sayı ve $k \in \mathbb{Z}^+$) olmak üzere;

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(P(\mathbb{Z}_n))} d(u) + d(v)$$

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} (d_0 + d_1) + (d_0 + d_2) + (d_0 + d_3) + \dots + \\ (d_0 + d_{\frac{p^k-1}{p}}) + (d_1 + d_2) + (d_1 + d_3) + \\ (d_1 + d_4) + \dots + (d_1 + d_{\frac{p^k-1}{p}}) + (d_2 + d_3) + \\ (d_2 + d_4) + (d_2 + d_5) + \dots + \\ (d_2 + d_{\frac{p^k-1}{p}}) + \dots + (d_{\frac{p^k-2}{p}} + d_{\frac{p^k-1}{p}}) \end{array} \right)$$

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2} \left(d_0 \cdot (p^k - 1) + d_1 \cdot (p^k - 1) + \dots + d_{\frac{p^k-1}{p}} \cdot (p^k - 1) \right)$$

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2} p^k (p^k - 1)^2 \text{ elde edilir.}$$

Teorem 12. p ve q farklı asal sayılar ve $P(Z_n)$, $n = pq$ köşeli yönlendirilmemiş bir power graf olsun. O halde,

$$SK(P(Z_n)) = \frac{1}{2} \left(((n-1)^2 \cdot (\phi(n) + 1)) + q^2 \cdot \phi(p)^3 + p^2 \cdot \phi(q)^3 \right) \text{ 'dir}$$

İspat. $n = p \cdot q$ (p ve q farklı asal sayılar) olmak üzere tamsayılar iyi sıralı olduğundan $p < q$ olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca,

elde edilmiş olur. Eğer $n = pq$ ise sonuç 2. (Aşkın ve Büyükköse, 2021) nin ispatından dolayı

$$m = \binom{n}{2} - \phi(n) \text{ olduğunu biliyoruz. O halde,}$$

$$H(P(Z_n)) = 2 \binom{n}{2} - \phi(n)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Tanım 10. (Shegahalli vd., 2016, *SK index*).

$G = (V, E)$ grafının *SK* indeksi

$$SK(G) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} d(u) + d(v)$$

olarak tanımlanır. Burada $d(u)$ ve $d(v)$ sırasıyla u ve v köşelerinin G deki dereceleridir.

Teorem 11. p asal sayı ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer yönlendirilmemiş $P(\mathbb{Z}_{p^k})$ power grafi $n = p^k$ mertebeli ise

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2} n(n-1)^2 \text{ 'dir.}$$

$$\phi(p, q) = (p - 1)(q - 1),$$

$$V(P(\mathbb{Z}_n)) = \{0\} \cup \{1, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p, q)}\} \cup \{q, 2q, \dots, (p - 1)q\} \cup \{p, 2p, \dots, (q - 1)p\}$$

$$V_0 = \{0\},$$

$$V_1 = \{1, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p, q)}\},$$

$$V_2 = \{q, 2q, 3q, \dots, (p - 1)q\},$$

$$V_3 = \{p, 2p, 3p, \dots, (q - 1)p\},$$

$$U_{\mathbb{Z}_n} = \{1, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p, q)}\} \text{ alabiliriz.}$$

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(P(\mathbb{Z}_n))} d(u) + d(v)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} (p \cdot q - 1) \cdot d_0 + (p \cdot q - 1) \cdot d_1 \\ + (p \cdot q - 1) \cdot d_{u_2} + \dots + \\ (p \cdot q - 1) \cdot d_{u_{\phi(p, q)}} + (\phi(p, q) + 1 + (p - 2)) \cdot d_{\bar{q}} \\ + (\phi(p, q) + 1 + (p - 2)) \cdot d_{\overline{2 \cdot q}} + \dots + \\ (\phi(p, q) + 1 + (p - 2)) \cdot d_{\overline{(p-1) \cdot q}} + (\phi(p, q) + 1 + (q - 2)) \cdot d_{\bar{p}} \\ + (\phi(p, q) + 1 + (q - 2)) \cdot d_{\overline{2 \cdot p}} \\ + \dots + (\phi(p, q) + 1 + (q - 2)) \cdot d_{\overline{(q-1) \cdot p}} \end{array} \right)$$

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} (n - 1)^2 \cdot (\phi(n) + 1) \\ + (\phi(n) + p - 1)^2 \cdot (p - 1) \\ + (\phi(n) + q - 1)^2 \cdot (q - 1) \end{array} \right)$$

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2} \left(((n - 1)^2 \cdot (\phi(n) + 1)) + q^2 \cdot \phi(p)^3 + p^2 \cdot \phi(q)^3 \right) \text{ elde edilir.}$$

Tanım 13. (Shegahalli vd., 2016, SK_1 index). $G = (V, E)$ grafının SK_1 indeksi

$$SK_1(G) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} d(u) \cdot d(v)$$

olarak tanımlanır. Burada $d(u)$ ve $d(v)$ sırasıyla u ve v köşelerinin G deki dereceleridir.

Teorem 14. p asal sayı, $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $P(\mathbb{Z}_{p^k})$, p^k mertebeden yönlendirilmemiş bir power graf olsun. O halde,

$$SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{n \cdot (n-1)^3}{4} \text{ 'dir.}$$

İspat. $n = p^k$ (p asal sayı ve $k \in \mathbb{Z}^+$) olmak üzere ;

$$SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(P(\mathbb{Z}_n))} d(u) \cdot d(v)$$

$$\begin{aligned}
SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) &= \frac{1}{2} \left((d_0 \cdot d_1) + (d_0 \cdot d_2) + \dots + (d_0 \cdot d_{\frac{p^k-1}{p}}) + (d_1 \cdot d_2) \right. \\
&\quad \left. + (d_1 \cdot d_3) + \dots + (d_1 \cdot d_{\frac{p^k-1}{p}}) + (d_2 \cdot d_3) + \right. \\
&\quad \left. (d_2 \cdot d_4) + \dots + (d_2 \cdot d_{\frac{p^k-1}{p}}) + \dots + (d_{\frac{p^k-1}{p}} \cdot d_{\frac{p^k-1}{p}}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left((p^k - 1)^2 + (p^k - 1)^2 + \dots + (p^k - 1)^2 + \right. \\
&\quad \left. (p^k - 1)^2 + (p^k - 1)^2 + \dots + (p^k - 1)^2 + (p^k - 1)^2 \right. \\
&\quad \left. + (p^k - 1)^2 + \dots + (p^k - 1)^2 + \dots + (p^k - 1)^2 \right) \\
&= \frac{m}{2} (n - 1)^2 \\
&= \frac{1}{2} \binom{n}{2} (n - 1)^2 \\
&= \frac{n(n-1)^3}{4} \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

Teorem 15. p ve q farklı asal sayılar ve $P(\mathbb{Z}_n)$, $n = pq$ yönlendirilmemiş bir power graf olsun. O halde,

$$SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} n^2 \cdot (n^2 - 8 \cdot n - p^2 + 10 \cdot p + 5 \cdot q + 4) + n \cdot p \cdot (p^2 - 5 \cdot p - 11) \\ -n \cdot (14 \cdot q - 19) - p^2 \cdot (p - 9) + 3 \cdot q \cdot (q - 1) - 11 \cdot p + 2 \end{pmatrix}$$

dir.

İspat. $n = p \cdot q$ (p ve q farklı asal sayılar) olmak üzere tamsayılar iyi sıralı olduğundan $p < q$ olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca,

$$V(P(\mathbb{Z}_n)) = \{0\} \cup \{1, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}\} \cup \{q, 2q, \dots, (p-1)q\} \cup \{p, 2p, \dots, (q-1)p\}$$

$$V_0 = \{0\},$$

$$V_1 = \{1, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}\},$$

$$V_2 = \{q, 2q, 3q, \dots, (p-1)q\},$$

$$V_3 = \{p, 2p, 3p, \dots, (q-1)p\},$$

$$U_{\mathbb{Z}_n} = \{1, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p \cdot q)}\}$$

alabiliriz. Buradan,

$$SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(P(\mathbb{Z}_n))} d(u) \cdot d(v)$$

$$SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{l} d_{\bar{0}} \cdot \sum_{\bar{i} \in V(P(\mathbb{Z}_{p \cdot q}) - \{\bar{0}\})} d_{\bar{i}} + d_{\bar{1}} \cdot \sum_{\bar{i} \in V(P(\mathbb{Z}_{p \cdot q}) - \{\bar{1}\})} d_{\bar{i}} \\ + d_{u_2} \cdot \sum_{\bar{i} \in V(P(\mathbb{Z}_{p \cdot q}) - \{u_2\})} d_{\bar{i}} + d_{u_3} \cdot \sum_{\bar{i} \in V(P(\mathbb{Z}_{p \cdot q}) - \{u_3\})} d_{\bar{i}} \\ + \dots + d_{u_{u_{\phi(p \cdot q)}}} \cdot \sum_{\bar{i} \in V(P(\mathbb{Z}_{p \cdot q}) - \{u_{u_{\phi(p \cdot q)}}\})} d_{\bar{i}} \\ + d_{\bar{q}} \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(\mathbb{Z}_{p \cdot q}) - V_3 \\ \bar{i} \neq \bar{q}}} d_{\bar{i}} + d_{\bar{2 \cdot q}} \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(\mathbb{Z}_{p \cdot q}) - V_3 \\ \bar{i} \neq \bar{2 \cdot q}}} d_{\bar{i}} \\ + \dots + d_{\overline{(p-1) \cdot q}} \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(\mathbb{Z}_{p \cdot q}) - V_3 \\ \bar{i} \neq \overline{(p-1) \cdot q}}} d_{\bar{i}} + d_{\bar{p}} \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(\mathbb{Z}_{p \cdot q}) - V_2 \\ \bar{i} \neq \bar{p}}} d_{\bar{i}} \\ + d_{\bar{2 \cdot p}} \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(\mathbb{Z}_{p \cdot q}) - V_2 \\ \bar{i} \neq \bar{2 \cdot p}}} d_{\bar{i}} + \dots + d_{\overline{(q-1) \cdot p}} \cdot \sum_{\substack{\bar{i} \in V(P(\mathbb{Z}_{p \cdot q}) - V_2 \\ \bar{i} \neq \overline{(q-1) \cdot p}}} d_{\bar{i}} \end{array} \right)$$

elde edilir. Diğer taraftan $u, v, u', v' \in V(P(\mathbb{Z}_n))$ olmak üzere $u \neq v, u, v \in \{0\}$ veya $u, v \in V_1$ ise

$d(u) \cdot \sum_{u' \in V - \{u\}} d(u') = d(v) \cdot \sum_{v' \in V - \{v\}} d(v')$ olur. Aynı şekilde $u, v, u', v' \in V(P(\mathbb{Z}_n))$ olmak üzere $u \neq v, u, v \in V_2$ ise

$$d(u) \cdot \sum_{\substack{u' \in V - V_3 \\ u' \neq u}} d(u') = d(v) \cdot \sum_{\substack{v' \in V - V_3 \\ v' \neq v}} d(v')$$

ve $u, v, u', v' \in V(P(\mathbb{Z}_n))$ olmak üzere $u \neq v, u, v \in V_3$ ise

$$d(u) \cdot \sum_{\substack{u' \in V - V_2 \\ u' \neq u}} d(u') = d(v) \cdot \sum_{\substack{v' \in V - V_2 \\ v' \neq v}} d(v')$$

olacağından yukarıda ki son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{l} (\phi(pq) + 1) \cdot d_{\bar{1}} \cdot \sum_{u \in V(P(\mathbb{Z}_n) - \{\bar{1}\})} d_u \\ + d_{\bar{q}} \cdot \phi(p) \cdot \sum_{\substack{u \in V - V_3 \\ u \neq \bar{q}}} d_u + d_{\bar{p}} \cdot \phi(q) \cdot \sum_{\substack{u \in V - V_2 \\ u \neq \bar{p}}} d_u \end{array} \right)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\sum_{u \in V(P(\mathbb{Z}_n) - \{\bar{1}\})} d(u) = \phi(n)(n - 1) + (n - q)(p - 1) + (n - p)(q - 1)$$

$$\sum_{\substack{u \in V - V_3 \\ u \neq \bar{q}}} d(u) = (\phi(n) + 1)(n - 1) + (p - 2)(n - q)$$

$$\sum_{\substack{u \in V - V_2 \\ u \neq \bar{p}}} d(u) = (\phi(n) + 1)(n - 1) + (n - p)(q - 2)$$

$$d(1) = (n - 1),$$

$$d(q) = (n - q),$$

$$d(p) = (n - p)$$

ifadeleri son eşitlikte yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$SK_1(P(Z_n)) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} n^2 \cdot (n^2 - 8 \cdot n - p^2 + 10 \cdot p + 5 \cdot q + 4) + n \cdot p \cdot (p^2 - 5 \cdot p - 11) \\ -n \cdot (14 \cdot q - 19) - p^2 \cdot (p - 9) + 3 \cdot q \cdot (q - 1) - 11 \cdot p + 2 \end{pmatrix}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Tanım 16. (Shegahalli vd., 2016, SK_2 index). $G = (V, E)$ grafinin SK_2 indeksi

$$SK_2(G) = \frac{1}{4} \sum_{uv \in E(G)} (d(u) + d(v))^2$$

olarak tanımlanır. Burada $d(u)$ ve $d(v)$ sırasıyla u ve v köşelerinin G deki dereceleridir.

Teorem 17. p asal sayı ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer yönlendirilmemiş $P(\mathbb{Z}_{p^k})$ power grafi $n = p^k$ mertebeli ise

$$SK_2(P(\mathbb{Z}_n)) = 2 \cdot SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{n \cdot (n-1)^3}{2}, \text{ dir.}$$

İspat. $n = p^k$ (p asal sayı ve $k \in \mathbb{Z}^+$) olmak üzere;

$$\begin{aligned} SK_2(P(\mathbb{Z}_n)) &= \frac{1}{4} \sum_{uv \in E(P(\mathbb{Z}_n))} (d(u) + d(v))^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{uv \in E(P(\mathbb{Z}_n))} (d(u)^2 + d(v)^2) + SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left((p^k - 1) \cdot d_0^2 + (p^k - 1) \cdot d_1^2 \right. \\ &\quad \left. + \dots + (p^k - 1) \cdot d_{\frac{p^k-1}{2}}^2 \right) + SK_1(P(\mathbb{Z}_{p^k})) \\ &= \frac{(p^k - 1) \cdot (d_0^2 + d_1^2 + \dots + d_{\frac{p^k-1}{2}}^2)}{4} + SK_1(P(\mathbb{Z}_{p^k})) \\ &= \frac{p^k \cdot (p^k - 1)^3}{4} + SK_1(P(\mathbb{Z}_{p^k})) \\ &= 2 \cdot SK_1(P(\mathbb{Z}_{p^k})) \end{aligned}$$

$$= \frac{n \cdot (n - 1)^3}{2}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 18. p ve q farklı asal sayılar ve $P(\mathbb{Z}_n)$, $n = pq$ köşeli yönlendirilmemiş bir power graf olsun. O halde,

$$SK_2(P(\mathbb{Z}_n)) = SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (n-1)^3 \cdot (\phi(n) + 1) \\ +(n-q)^3 \cdot \phi(p) \\ +(n-p)^3 \cdot \phi(q) \end{pmatrix} \text{ 'dir.}$$

İspat. $n = p \cdot q$ (p ve q farklı asal sayılar) olmak üzere;

$$\begin{aligned} SK_2(P(\mathbb{Z}_n)) &= \frac{1}{4} \sum_{uv \in E(P(\mathbb{Z}_n))} (d(u) + d(v))^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{uv \in E(P(\mathbb{Z}_n))} (d(u)^2 + d(v)^2) + SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) \end{aligned}$$

$$SK_2(P(\mathbb{Z}_n)) = SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (n-1)^3 \cdot (\phi(n) + 1) \\ +(n-q)^3 \cdot \phi(p) \\ +(n-p)^3 \cdot \phi(q) \end{pmatrix} \text{ elde edilir ve ispat tamamlanır.}$$

3. Sonuç

$P(G)$ ile bir G grubunun yönlendirilmemiş power grafını göstereceğiz. Burada, p, q farklı asal sayılar ve k pozitif tamsayı olmak üzere $n = p^k$ ve $n = pq$ ya göre $(\mathbb{Z}_n, +)$ grubun yönlendirilmemiş power grafi $P(\mathbb{Z}_n)$ olarak ele alınır ve bu power graflarının Euler fonksiyonu yardımıyla Hyper- Wiener, Harary, SK , SK_1 ve SK_2 indekslerinin hesaplamaları üzerine yeni teoremler ve sonuçlar elde edilir.

Kaynaklar

- Aşkın, V., Büyükköse, Ş. (2021). The Wiener index of an undirected power graphs. *ALAMT*, 11(1), 21-29. DOI: 10.4236/alamt.2021.111003
- Chakrabarty, I., Ghosh, S., Sen, M.K. (2009). Undirected power graphs of semigroups. *Semigroup Forum*, 78, 410-426. DOI: 10.1007/s00233-008-9132-y

- Dobrynin, A.A., Entringer, R., Gutman, I. (2001). Wiener index of trees: theory and applications. *Acta Applicandae Mathematica*, 66, 211-249. DOI: 10.1023/A:1010767517079

- Gutman, I. (1997). A property of the Wiener number and its modifications. *Indian Journal of Chemistry*, 36A, 128-132.

- Ivanciuc, O., Balaban, T.S., Balaban, A.T. (1993). Reciprocal distance matrix, related local vertex invariants and topological indices. *Journal of Mathematical Chemistry*, 12, 309-318.

- Plavšić, D., Nikolić, S., Trinajstić, N., Mihalić, Z. (1993). On the Harary index for the characterization of chemical graphs. *Journal of Mathematical Chemistry*, 12, 235-250.

- Shegahalli, V.S., Kanabur, R. (2016). Computation of new degree-based topological indices of graphene. *Journal of Mathematics*, 5: 4341919. DOI: http://dx.doi.org/10.1155/2016/4341919

- Walikar, H.B., Shigehalli, V.S., Ramane, H.S. (2004). Bounds on the Wiener index of a graph. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 50, 117-132.