G.Ü. İ.İ.B.F. Dergisi, 3/2000, 19-36

Diskriminant Analizi ve Uygulaması Üzerine Bir Örnek

Aydın ÜNSAL*

In this study,we investigate discriminant analysis *and an example is given.*

Giriş

Bu çalışmada,uygulamacılara ışık tutmak amacı ile diskriminant analizinin veri yapısı matrisi, iki ve daha fazla grup olması durumunda diskriminant fonksiyonlarının bulunması ve bu fonksiyonların anlamlılık testlerinin nasıl yapıldıgı teorik olarak anlatıldı. Daha sonra tüm anlatılanların küçük bir örnek üzerinde adım adım uygulaması yapıldı.

1.1 DİSKRİMİNANT ANALİZİ

Diskriminant analizi, tek faktör çok değişkenli varyans analizi MANOVA'nın uzantısı olan çok değişkenli bir analiz türüdür. Gruplar arası fark yoktur anlamını taşıyan Ho hipotezi red edildikten sonra, gruplar arası farkın olduğu sonucuna varılır. Bu farklılığın ana nedenleri diskriminant analizi tekniğiyle ortaya çıkarılır.

Diskriminant analizi aracılığıyla elde edilen **diskriminant** (ayırıcı) **fonksiyonları**.i.**diskriminant fonksiyonları**;, tahmin değişkenlerinin doğrusal bileşenlerinden oluşur. Diskriminant fonkiyonları gruplar arası farklılığa etki eden tahmin değişkenlerinin hangileri olduğunu ortaya çıkarır. Gruplar arası farklılığa etki eden bu değişkenlere de **diskriminant** (ayırıcı) **değişkenler** adı verilir. Diskriminant analizinin bir diğer işlevi ise, gruplardan herhangi birisine ait olan fakat hangi gruptan geldiği bilinmeyen bir birimin ait olduğu grubu en az hata ile saptamaktır.

O halde Diskriminant analizinin amacını iki grupta toplamak olanaklıdır.

1) Diskriminant fonksiyonları saptayıp, ve bu fonksiyonlar aracılığıyla gruplar arası ayırıma en fazla etki eden ayırıcı değişkenleri belirlemek,

* Doç.Dr., Gazi Üniversitesi, İ.İ.B.F., Ekonometri Bölümü Öğretim Üyesi.

2) Hangi gruptan geldiği bilinmeyen bir birimin hangi gruba dahil edileceğini belirlemektir. (*1, s : 493*)

Birinci amaca yönelik Diskriminant analizi **Betimsel** (discriptif) **amaçlı analiz,** ikinci amaca yönelik olarak diskriminant analizi **Karar amaçlı analiz** olarak adlandırılır. Gerek 1. gerekse 2. amaca yönelik kuramsal yapıya girmeden önce, Diskriminant analizi probleminin irdelendiği veri yapısını inceleyelim.

1.1 VERİ YAPISI MATRİSİ

Diskriminant analizine ilişkin veri yapısı, bazı notasyon değişiklikleri dışında, MANOVA'ya ilişkin veri yapısına benzer.

g. grupta (yığın) (G_1, G_2 ,....., G_p), p.değişkenin (X_1, X_2 ,...., X_p) herbirine ilişkin nj (j:1, 2 ,....., g) gözlem yapıldığı varsayıldığında aşağıdaki veri tablosu elde edilir.

Tablo 1.1 G-Grup İçin Diskriminant Analizi Veri Tablosu

Gruplar	Birimler \ Değişkenler	X_1	X_2	X_3	...... X_p
	1	x_{111}	x_{121}	x_{131}	...... x_{1p1}
	2	x_{112}	x_{122}	x_{132}	...... x_{1p2}
1	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.
	N_1	x_{11n_1}	x_{12n_1}	x_{13n_1}	...... x_{1pn_1}
	1	x_{211}	x_{221}	x_{231}	...... x_{2p1}
	2	x_{212}	x_{222}	x_{232}	...... x_{2p2}
2	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.
	N_2	x_{21n_2}	x_{22n}	x_{23n}	...... x_{2pn}
	...	.	.	.	.
	...	.	.	.	.
	1	x_{g11}	x_{g21}	x_{g31}	...... x_{gp1}
	2	x_{g12}	x_{g22}	x_{g32}	...... x_{gp2}
G	.	.	.	.	.
	N_g	x_{g1n_g}	x_{g2n_g}	x_{g3n_g}	...... x_{gpn_g}

Veri yapısı matrisi Tablo (1.1)'de olduğu üzere gösterildiği gibi Tablo (1.1.a)'da olduğu gibi de gösterilebilir.

Tablo 1.1a Diskriminant Analizi Veri Tablosu

Gruplar	G1	G2	....	Gg
Değişkenler / Bireyler	$X_1\ X_2 \ldots\ X_p$	$X_1\ X_2 \ldots\ X_p$	....	$X_1\ X_2 \ldots\ X_p$
1	$x_{111}\ x_{121} \ldots x_{1p1}$	$x_{211}\ x_{221} \ldots x_{2p1}$		$x_{g11}\ x_{g21} \ldots x_{gp1}$
2	$x_{112}\ x_{122} \ldots x_{1p2}$	$x_{212}\ x_{222} \ldots x_{2p2}$		$x_{g12}\ x_{g22} \ldots x_{gp2}$
3	$x_{113}\ x_{123} \ldots x_{1p3}$	$x_{213}\ x_{223} \ldots x_{2p3}$		$x_{g13}\ x_{g23} \ldots x_{gp3}$
...	... ...	... ...		... ...
...	... ...	... ...		... ...
n_j	$x_{11n1}\ x_{12n2} \ldots x_{1pnp}$	$x_{21n2}\ x_{22n2} \ldots x_{2pn2}$	....	$x_{g1ng}\ x_{g2ng} \ldots x_{gpng}$
	$x_{11.}\ x_{12.} \ldots x_{1p.}$	$x_{21.}\ x_{22.} \ldots x_{2p.}$	....	$x_{g1.}\ x_{g2.} \ldots x_{gp.}$

Burada;

x_{ijk} : i.(i : 1, 2 ,......, g) yığında j. (j : 1, 2 ,......, p) değişkene ilişkin k. (k : 1, 2 ,......, n_j) bireyin değerini ifade eder.

1.1.2 İKİDEN FAZLA GRUP OLMASI DURUMUNDA DİSKRİMİNANT ANALİZİ

Tek faktör varyans analizi modelinde faktör (değişken) düzeyleri arasında farklılığın olup olmadığı aşağıdaki kriter ile belirlenir.

$$ {}_aF^{p-1}_{n-p} = \frac{GAOK}{GİİO} = \frac{\text{gruplar arası varyans}}{\text{grup içi varyans}} $$

Burada;

$GAOK = SS_b / (p-1)$
$GİOK = Ss_w / (n-p)$ yi ifade eder.

Benzer bir kriter, X_1 , X_2 ,....., X_p tahmin değişkenlerinin doğrusal bileşenleri

$$ Y = V_1X_1 + V_2X_2 + \ldots + V_pX_p \tag{1.1} $$

veya

$$ Y = V'X $$

için diskriminant analizi ile Fisher tarafından geliştirilmiştir. $Y = V'X$ doğrusal bileşenine **ayırıcı fonksiyon** veya **diskriminant fonksiyonu** denir.

Fisher'in geliştirmiş olduğu yöntem gruplar arası varyansın gruplar içi varyansa oranını maksimum yapacak (1.1) eşitliğinde yer alan V_i (i : 1, 2 ,...., p) katsayılarının bulunması esasına dayanır. Yani

$$Y = V_1X_1 + V_2X_2 + ...+ V_pX_p \qquad Y = V'X$$

doğrusal bileşeni için

$$\frac{\text{Gruplar arası varyans}}{\text{Grup içi varyans}} \tag{1.2}$$

oranını maksimum yapacak $V_1, V_2 ,...., V_p$ katsayılarını bulmaktır.

Fisher'in diskriminant analizi için grupların normal dağılıma sahip olma sayıltısı gerekli olmamakla beraber tüm grupların p x p kovaryans matrislerinin eşit olduğu kabul edilir. Yani; $\Sigma_1 = \Sigma_2 = ... = \Sigma_p = \Sigma$.

Birleştirilmiş gruplara ilişkin ortalama vektör $\bar{\mu}$ olmak üzere, gruplar arası kareler toplamı

$$B_o = \sum_{i=1}^{g} (\mu_i - \bar{\mu})(\mu_i - \bar{\mu})' \tag{1.3}$$

Burada ;

μ_i = i. grubun ortalaması,

$\bar{\mu} = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} \mu_i$ tüm gruplara ilişkin genel ortalamadır.

(1.1) 'deki $Y = V'X$ diskriminant fonksiyonunu dikkate aldığımızda, Y 'ye ilişkin ortalama;

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(V'X) \\ &= V'E(X) \\ &= V'\mu_x \end{aligned}$$

$$\mu_{iy} = V'\mu_i \qquad \text{(i.grup için, i: 1, 2 ,...., p)} \tag{1.4}$$

varyans ise;

$$V(Y) = V'Cov(X)V = V'\Sigma V \tag{1.4a}$$

olarak tüm gruplar için elde edilir.

O halde, i.grup için elde edilen y 'lerin ortalaması $\mu_{iy} = V'\mu_i$ olarak bulunur. Gruplar değiştirildikçe μ_{iy}'ler de buna bağlı olarak farklılık gösterirler.Tüm gruplar için Y 'ye ilişkin genel ortalama,

$$\bar{\mu}_y = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} \mu_{iy} = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} V'\mu_i = V'(\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} \mu_i) = V'\bar{\mu} \qquad (1.5)$$

olarak bulunur.

(1.2) kriterinin $Y = V'X$ diskriminant fonksiyonu için oluşturulabilmesi, Y 'in gruplar arası ve gruplar içi kareler toplamının bulunmasına bağlıdır. Bu kareler toplamından hareketle de gerek gruplar arası varyans gerekse gruplar içi varyans bulunur.

Bu amaçla önce Y 'ye ait gruplar arası kareler toplamını daha sonrada gruplar içi kareler toplamını bulalım.

$$GAKT = \begin{pmatrix} \text{Gruplar arası} \\ \text{kareler toplamı} \end{pmatrix} = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} (\mu_{iy} - \bar{\mu}_y)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{g} (V'\mu_i - V'\bar{\mu})^2 \qquad \text{((1.4) ve (1.5)'den yaralanarak)}$$

$$= V'(\sum_{t=1}^{g} (\mu_i - \bar{\mu})(\mu_i - \bar{\mu}')V$$

$$= V'B_oV \qquad \text{((1.3)'den yaralanarak)} \qquad (1.6)$$

elde edilir. $V'B_0V$ terimi serbestlik derecesi (g – 1)'e bölünerek gruplar arası varyans elde edilir.

(1.2) diskriminant kriteri (1.6) ve (1.4a) dan yararlanılarak

$$\frac{GAKT\ (Y)}{GİİK\ (Y)} = \frac{\text{y için gruplar arası karekareler toplamı}}{\text{y için gruplar içi kareler toplamı}}$$

$$= \frac{V'B_oV}{V'\Sigma V} = \lambda \qquad (1.7)$$

olarak elde edilir. (*2, s : 541*)

Şimdi de diskriminant kriteri adı verilen bu oranı maksimum yapacak V vektörler kümesini bulalım.

$\frac{V'B_oV}{V'\Sigma V} = \lambda$ kriterini maksimum yapacak V vektörler kümesinin bulunabilmesi için G_1 ,G_2 ,...., G_p , yığında X_1 , X_2 ,...., X_p değişkenlerinde yapılan n_i

(i : 1, 2 ,...., g) gözlemleri için tanımlanan gruplar arası kareler toplamı B_o ve gruplar içi kareler toplamı $\hat{A}$ 'nın tahmin değerlerinin bulunması gerekir.

Gruplar arası kareler toplamı ve çapraz çarpımlar B_0 ve gruplar içi kareler toplamı ve çapraz çarpımlar $\hat{A}$ matrisleri sırasıyla;

$$B = \sum_i \sum_j n_p (y_{ij.} - y_{..})(y_{ij.} - y_{..})'$$

ve

$$W = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - y_{ij.})(y_{ijk} - y_{ij.})'$$

olarak tahmin edilir.

B_0 ve Σ 'nın tahmin değerleri bulunduktan sonra (1.7) 'deki diskriminant kriteri aşağıdaki gibi maksimize edilir.

1.1.3 DİSKRİMİNANT KRİTERİNİN MAKSİMİZASYONU

(1.7) diskriminant kriterinin maksimizasyonu için l 'nın V'ye göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitliğinde;

$$\frac{\partial\lambda}{\partial C} = \frac{2[(BV)(V'WV) - (V'BV)(WV)}{(V'WV)^2} = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

Bu eşitliğinde pay ve paydasını 'ye bölüp ve (1.7) eşitliği de kullanıldığında

$$(B - \lambda W)V = 0 \qquad (1.8)$$

eşitliği elde edilir. *(2, s : 160)*

W matrisinin tekil olmayan bir matris olduğunu kabul edip, (1.8) eşitliğinin her iki tarafı W^{-1} matrisi ile çarpıldığında

$$(W^{-1}B - \lambda I)V = 0 \qquad (1.9)$$

eşitliği elde edilir. Burada $W^{-1}B$ matrisi yerine A matrisini koyduğumuzda,

$$(A - \lambda I)V = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikligin çözümüne ulaşabilmek için aşağıdaki eşitlikten yararlanılır.

Söz konusu çözüme ulaşabilmek için,

$$|W-1B - \lambda I| = 0 \qquad (1.10)$$

karekteristik denkleminin kökleri λ_i (i : 1, 2 ,...., s) değerleri bulunur. λ_i (i :1, 2 ,...., s) değerleri $W^{-1}B$ matrisinin sıfırdan farklı özdeğerleridir. λ_i (i : 1, 2 ,...., s) öz değerleri bulunduktan sonra bu değer gerek (1.8)'de gerekse (1.9)'da yerlerine konularak, söz konusu öz değerlere karşılık gelen W-IB matrisinin öz vektörleri (V_1, V_2 ,...., V_s) bulunur. $W^{-1}B$ matrisinin öz vektörlerinin sayısı s = min (p, g – 1) 'dir.[1]

Herhangi bir λ_i değerine karşılık bulunacak V_i değeri için cV_i (c herhangi bir sabit) değeride (1.9) eşitliğini sağlayacağından, V_i vektörünün normu bire eşittir. $V'_iV_i = 1$ olması sağlanır.Böylelikle (1.1) tanımlanan diskriminant fonksiyonları Y_1, Y_2, ...,Y_s bulunmuş olur.

λ_1 , $W^{-1}B$ matrisinin öz değeri ve $V_1 = (V_{11}, V_{12}, ..., V_{1p})$ bu özdeğere karşılık gelen öz vektör ise, birinci diskriminant fonksiyonu Y_1 ,

$$Y_1 = v_{11}X_1 + v_{12}X_2 + ...+ v_{1p}X_p$$

olarak bulunur. Y_1 en büyük diskriminant kriteri λ_1 're sahiptir.

λ_2 , $W^{-1}B$ matrisinin öz değeri ve $V_2 = (V_{21}, V_{22}, ..., V_{2p})$ bu özdeğere karşılık gelen öz vektör ise, birinci diskriminant fonksiyonu Y_2 ,

$$Y_2 = v_{21}X_1 + v_{22}X_2 + ...+ v_{2p}X_p$$

olarak elde edilir. Y_2 'de ikinci büyük diskriminant kriteri λ_2 're sahiptir. Y_2 diskriminat fonksiyonu ile Y_1 diskriminant fonksiyonu arasındaki korelasyon sıfırdır. Benzer şekilde,

$$Y_3 = v_{31}X_1 + v_{32}X_2 + ...+ v_{3p}X_p$$

Y_1 ve Y_2 ile korelasyonu sıfır olan 3. en büyük diskriminant kriterine sahip Y_3 diskriminat fonksiyonu elde edilir.

Yine benzer şekilde, s. diskriminant fonksiyonu Y_s, λ_s 'ye karşılık gelen $V_s = (V_{s1}, V_{s2}, ..., V_{sp})$ ağırlıkları kullanılarak elde edilir. Bu şekilde elde edilen

[1] Ave B matrislerinin çarpımları sonucu C matrisi elde edilmi_ ise C matrisinin rankı, A ve B matrislerinden rankı küçük olana eşittir. Yani,

$$\text{Rank (C)} = \min(\text{Rank (A)}, \text{Rank (B)}).$$
$$S = \text{Rank}(W^{-1}B) = \min(\text{rank}(W^{-1}), \text{rank (B)})$$
$$= \min(p, g + 1)$$

diskriminant fonksiyonu Y_s , Y_1 , Y_2 ,....,Y_{s-1} diskriminant fonksiyonları ile korelasyonu sıfır olan en büyük diskriminant kriteri λ_s 'ye sahiptir.

Diskriminant fonksiyonundaki değişkenlerin ayırma etkilerinin ya da diskriminant fonksiyonuna katkı miktarlarının bilinmesi özellikle yorum aşamasında önemli olduğundan, böyle bir karşılaştırmanın yapılabilmesi için bulunan katsayıların;

$$U_{ij} = V_{ij} (W_{ii})^{1/2} \qquad i : 1, 2, ..., p \; ; \; j : 1, 2, ..., s \qquad (1.11)$$

formülü ile standartlaştırılması gerekir. *(4, s: 210)*

Tüm bu bilgiler ışığı altında Fisher'in Diskriminant analizi için geliştirmiş olduğu yöntemi örnek için, aşağıdaki gibi özetlemek olanaklıdır.

$\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 \ldots \hat{\lambda}_p > 0$ $W^{-1}B$ matrisinin öz değerleri ve V_1 , V_2 ,...., V_s $\hat{V}'W\hat{V} = 1$ koşulu altında bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörler ise, V katsayılar vektörü

$$\frac{V'BV}{V'WV} = \frac{V'(\sum_{i=1}^{g}\sum_{i=1}^{ng}(x_{ij.} - x_{..})(x_{ij.} - x_{..})')V}{V'(\sum\sum\sum(x_{ijk} - x_{ij.})(x_{ijk} - x_{ij.})')V} \qquad (1.12)$$

oranını maksimum yapar. Bu durumda; $V_1'X$ ($X = (X_1 , X_2 , ..., X_p)$) doğrusal bileşeni ilk diskriminant fonksiyonunu, $V_2'X$ doğrusal bileşeni ikinci diskriminant fonksiyonu oluşturur. Bu şekilde devam edilerek k. diskriminant fonksiyonu $V_k'X$ şeklinde oluşturulur. *(1, s : 542)*

Buraya kadar, diskriminant fonksiyonlarının boyutunu belirlemeye çalıştık. Diskriminant fonksiyonlarının boyut sayısının, $W^{-1}B$ matrisinin sıfırdan farklı öz değerlerinin sayısına eşit olduğunu gördük. Bu değerinde yani $W^{-1}B$ matrisinin sıfırdan büyük öz değerlerinin sayısının min (g - 1, p) değerine eşit olduğu tesbit edildi. Fakat genellikle, istatistiksel olarak anlamlı diskriminant fonksiyonu sayısı min (g - 1, p) değerinden daha küçüktür. Bunun nedeni de, bazı diskriminant fonksiyonlarının, grup farklılaşmalarının oluşumuna etkilerinin istatistiksel olarak önemsiz olmasıdır.

Bu aşamada, istatistiksel olarak anlamlı olan diskriminant fonksiyonları belirlenebilir.

1.1.4 DİSKRİMİNANT FONKSİYONLARININ ANLAMLILIK TESTİ

Wilks Lamda'sıyla ($\wedge^*$ diskriminant fonksiyonlarının sayısı tespit edilir. $\wedge^*$ krieri ile diskriminant fonksiyonlarının diskriminant değerleri arasında cebirsel bir ilişki vardır.Bu ilişki aşağıda olduğu gibidir.

$$\wedge^* = \frac{|W|}{|T|}$$

$$1/\wedge^* = \frac{|T|}{|W|} = |W^{-1}T^{-2}|$$

$$= |W^{-1}(W + B)| \qquad (T = W + B)$$

$$= |I + W^{-1}B| \qquad (1.13)$$

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$, $W^{-1}B$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere, (1.13) 'de tanımlanan $1/\wedge^*$ değeri, ilgili teoremlerden de yararlanılarak, aşağıdaki gibi yeniden tanımlanabilir.

$$1 / \wedge^* = (1 + \lambda_1).(1 + \lambda_2) \ ..... \ (1 + \lambda_r) \qquad (1.14)^{[2]}$$

Wilks Lambda'sı ($\wedge^*$) 'yı test için Bartlett istatistiği V;

$$V = -(N - 1 - (p + g) / 2) \ln\wedge^*$$

şeklinde tanımlanır. V (1.14)'den yararlanılıp, aşağıdaki gibi yeniden tanımlanır.

$$V = -(N - 1 - (p + g) / 2) \ln \{(1 + \lambda_1).(1 + \lambda_2) \ ..... \ (1 + \lambda_r)\}$$

$$= -(N - 1 - (p + g) / 2) \sum_{i=1}^{r} \ln(1+\lambda_i) \qquad (1.15)$$

V, serbestlik derecesi (pg - p) olan χ^2 dağılımına sahiptir.

Ardışık diskriminant fonksiyonlarının aralarındaki korelasyon katsayılarının sıfır olması nedeniyle, (1.15) 'deki $(1 + \lambda_i)$ ardışık terimler istatistiksel olarak birbirleri ile bağımsızdır. Sonuç olarak, V'ye eklenen herbir bileşen yaklaşık olarak χ^2 dağılımına sahiptir. Bu anlamda, V 'nin i. bileşeni

---

[2] $\lambda_1\lambda_2, ..., \lambda_p$ A matrisinin özdeğerleri ise A matrisinin determinantı özdeğerlerinin çarpımına eşittir. $(|A| = \lambda_1\lambda_2 \ ..... \ \lambda_p)$

_λ, A matrisinin özdeğeri ve c herhangi bir sabit olmak üzere , $(\lambda + c)$'de $(A + cI)$ matrisinin özdeğeridir.

$V_i = \{N - 1 - (p + g) / 2\}\ln(1 + l_i)$

serbestlik derecesi (p + g – 2i) olan χ^2 dağılımına sahiptir.

Sonuç olarak, $V - V_1$; $V - V_1 - V_2$; $V - V_1 - V_2 - V_3$,........; $V - V_1 - V_2 - .... - V_r$ istatistiklerinin herbiri χ^2 dağılımına sahiptirler. Bu istatistiklerde artık diskriminantın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadıklarının testi için kullanılır.

Ardışık istatististikler ve serbestlik dereceleri aşağıdaki tabloda olduğu gibi özetlenebilir.

Yaklaşık χ^2 istatistikleri	Serbestlik derecesi
$V-V_1$	$(p-1)(g-2)$
$V-V_1-V_2$	$(p-2)(g-3)$
$V-V_1-V_2-V_3$	$(p-3)(g-4)$
.	.
.	.

O halde,birinci diskriminant fonksiyonun anlamlılık testi $V-V_1$ istatistiğiyle, ikinci diskriminant fonksiyonunun anlamlılık testi $V-V_1-V_2$ istatistiğiyle, eğer ikinci diskriminant fonksiyonu anlamlı bulunmuşsa, $V-V_1-V_2-V_3$ istatistiğiyle, üçüncü diskriminant fonksiyonu da anlamlıysa dördüncü diskriminant fonksiyonunun anlamlılığı $V-V_1-V_2-V_3-V_4$ istatistiği ile test edilir. Bu işlem anlamsız bulunan bir diskriminant fonksiyonuna ulaşılana kadar devam eder. Eğer (s) tane anlamlı diskriminant fonksiyonu elde edilmiş ise geri kalan (r – s) tane diskriminant fonksiyonunun grupları ayırıcı özellikleri örnekleme hataları olarak kabul edilir ve bu nedenle de dikkate alınmazlar.

ÖRNEK:

Çok değişkenli varyans analizi (MANOVA) modelinde yığın ortalama vektörlerinin aynı olduğu anlamını taşıyan Ho hipotezinin reddinden sonra, sınıflandırma ve ayırımı sağlıyan diskriminant fonksiyonuna gereksinme duyulur. Bu örnekde,aşağıda verilen veri grubunda, MANOVA aracılıgı ile yığın ortalama vektörlerinin farklı olduğu gösterildikten sonra ; yukarıda sözü edilen diskriminant fonksiyonu bulundu.

Aşağıda, her biri 2 değişken içeren 2 yığına ilişkin 15'er gözlem değeri verilmiştir.

Değişkenler / Bireyler	I. Yığın		II. Yığın	
	a_1	a_2	a_1	a_2
1	180	278	185	282
2	186	277	195	285
3	206	308	183	276
4	184	290	202	308
5	177	273	177	254
6	177	284	177	268
7	176	267	170	260
8	200	281	186	274
9	191	287	177	272
10	193	271	178	266
11	212	302	192	281
12	181	254	204	276
13	195	297	191	290
14	187	281	178	265
15	190	284	177	275

(1.1) 'de tanımlanan diskriminant fonksiyonlarından ilki Y_1, $W^{-1}B$ matrisinin öz değeri λ_1 ve buna karşılık gelen $V_1 = (V_{11}, V_{12}, ..., V_{19})$ öz vektörü aracılığıyla

$$Y_1 = V_{11} X_1 + V_{12} X_2 + ... + V_{19} X_9$$

şeklinde yazılabileceğini daha önce belirtmiştik.

Bu nedenle, önce W matrisinin tersi ve $W^{-1}B$ matrislerini bulup (1.10)'da verilen $|W^{-1}B - \lambda I| = 0$ deklemini sağlayan λ_1, λ_2 öz değerleri bulunacak.

W ve B matrisleri MANOVA'da verilen örnekte olduğu gibidir. W^{-1} ve $W^{-1}B$ matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W = \begin{bmatrix} 2814.4 & 2634 \\ 2634 & 5054.4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad W^{-1} = W = \begin{bmatrix} 0,00069 & -0,00036 \\ -0,00036 & 0,00039 \end{bmatrix}$$

$$W^{-1}B = \begin{bmatrix} 0,00069 & -0,00036 \\ -0,00036 & 0,00039 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 55620.15 & 62499 \\ 62499 & 71653.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.9 & 17.3 \\ 4.4 & 5.4 \end{bmatrix}$$

$| W^{-1} B - \lambda I | = 0$ eşitliğini sağlayan λ_1 ve λ_2 değerleri ;

$$| W^{-1} B - \lambda I | = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 21.3\lambda + 9.74 = 0$$

$$\lambda_1 = 20.83$$

$$\lambda_2 = 0.47$$

olarak bulunur.

$\lambda_1 = 20.83$ öz değerine karşılık gelen $V_1 = (v_{11}, v_{12})$ öz vektörü,

$$(W^{-1} B - \lambda I)\, V_1 = 0$$

eşitliğini sağlayacak şekilde daha önce değinildiği gibi bulunur.

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0.96 \\ 0.27 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 0.47$ öz değerine karşılık gelen V_2 öz vektörüde aşağıdaki gibi bulunur.

$$(W^{-1} B - \lambda I)\, V_2 = 0$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 0.74 \\ 0.67 \end{bmatrix}$$

İki yığın olması nedeniyle tek bir diskriminant fonksiyonu bulunur. Bu fonksiyonda daha önce belirtilen gerekçelerle V_1 öz vektörü aracılığıyla bulunan Y_1 'dir. O halde diskriminant fonksiyonu

$$Y_1 = 0.96\, X_1 + 0.27\, X_2$$

olarak elde edilir.

Şimdi de bulunan bu diskriminant fonksiyonu kullanarak sınıflandırma işlemini yapalım.

1. gruptan tesadüfi olarak seçilen $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 281 \end{bmatrix}$ matrisini ele alalım.

Grupların ortalama vektörleri $\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 189 \\ 282.3 \end{bmatrix}$ ve $\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 184.8 \\ 275.5 \end{bmatrix}$ ise,

seçilen gözlem biriminin I. grup ortalama vektörüne uzaklığı;

$$(v_1'[x_1 - \bar{x}_t])^2 = \left\{[0.96 \quad 0.27]\begin{bmatrix} 200 - 189 \\ 281 - 282.2 \end{bmatrix}\right\}^2$$

$$= \left\{[0.96 \quad 0.27]\begin{bmatrix} 11 \\ -1.3 \end{bmatrix}\right\}^2 = (10.209)^2 = 104.224$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde aynı gözlem biriminin II. grup ortalama vektör uzaklığı da;

$$(v_1'[x_1 - \bar{x}_t])^2 = \left\{[0.96 \quad 0.27]\begin{bmatrix} 200 - 184.8 \\ 281 - 275.5 \end{bmatrix}\right\}^2$$

$$= \left\{[0.96 \quad 0.27]\begin{bmatrix} 15.2 \\ 5.5 \end{bmatrix}\right\}^2 = (16.077)^2 = 258.469$$

olarak hesaplanır. Şimdi seçilen gözlem birimin hangi gruba dahil edileceğine karar verme aşamasına sıra geldi. Bu aşamada seçilen gözlem biriminin yukarıda hesaplanan grup ortalama vektörlerine uzaklıkları birbirleri ile mükayese edilir. Seçilen gözlem birimi hangi grup ortalama vektörüne daha yakınsa o gruba dahil edilir. O halde ; 104.224 < 258.469 olduğundan (200,281) birimi birinci gruba aittir.

Aynı işlemi, 2. gruptan tesadüfi seçtiğimiz bir örnek üzerinde de gösterelim.

$$x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170 \\ 260 \end{bmatrix} \quad \text{olsun.}$$

Seçilen bu gözlem biriminin birinci grup ortalama vektörüne uzaklığı;

$$(v_1'[x_2 - \bar{x}_1])^2 = \left\{[0.96 \quad 0.27]\begin{bmatrix} 170 - 189 \\ 260 - 282.3 \end{bmatrix}\right\}^2$$

$$= \left\{[0.96 \quad 0.27]\begin{bmatrix} -19 \\ -22.3 \end{bmatrix}\right\}^2 = (-24.261)^2 = 588.596$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde, aynı gözlem biriminin ikinci grup ortalama vektörüne uzaklığı;

$$(v_1'[x_2 - \bar{x}_2])^2 = \left\{[0.96 \quad 0.27]\begin{bmatrix} 170 - 184.8 \\ 260 - 275.5 \end{bmatrix}\right\}^2$$

$$= \left\{[0.96 \quad 0.27]\begin{bmatrix} -14.8 \\ -15.5 \end{bmatrix}\right\}^2 = (-18.393)^2 = 338.302$$

olarak hesaplanır. Birinci grupta yaptığımız degerlendirmenin ışıgında seçilen gözlem biriminin hangi gruba dahil edileceğine karar verilir;

588.596 > 338.302 olduğundan (170.260) gözlem birimi ikinci gruba aittir.

Diskriminant fonksiyonu, hangi yığından geldiği bilinmeyen gözlem birimlerinin sınıflandırılması için de kullanılır. Örneğin: X = (210, 250) gözlem biriminin, örnek grupları incelendiğinde, iki gruba da dahil olmadığı görülür. Bu gözlem biriminin hangi gruba dahil edileceği, diskriminant fonksiyonu aracılığı ile aşağıdaki gibi belirlenir.

(210, 250) biriminin, birinci grup ortalama vektörüne uzaklığı;

$$(v_1'[x-\bar{x}_1])^2 = \left\{[0.96 \;\; 0.27]\begin{bmatrix} 170-184.8 \\ 260-275.5 \end{bmatrix}\right\}^2$$

$$= \left\{[0.96 \;\; 0.27]\begin{bmatrix} -14.8 \\ -15.5 \end{bmatrix}\right\}^2 = (-18.393)^2 = 338.302$$

olarak hesaplanır. Benzer biçimde aynı gözlem biriminin ikinci grup ortalama vektörüne uzaklığı da;

$$(v_1'[x-\bar{x}_2])^2 = \left\{[0.96 \;\; 0.27]\begin{bmatrix} 170-184.8 \\ 260-275.5 \end{bmatrix}\right\}^2$$

$$= \left\{[0.96 \;\; 0.27]\begin{bmatrix} -14.8 \\ -15.5 \end{bmatrix}\right\}^2 = (-18.393)^2 = 338.302$$

olarak hesaplanır. Sonuçta, (4.34) 'deki eşitsizlik yardımı ile gözlem biriminin hangi gruba dahil edileceğine karar verilir;

Yani, 130.851 < 299.532 olduğundan, X = (210. 250) gözlem biriminin birinci gruba dahil edileceği söylenir.

Tablo 1. Diskriminant Analizi Veri ve Sonuçları

Birinci grup :İkinci grup :

X11	x12	X21	X22	y1	y2
180	278	185	282	247.86	253.74
186	277	195	285	253.35	264.15
206	308	183	276	280.92	250.2
184	290	202	308	254.94	277.08
177	273	177	254	243.63	238.5
177	284	177	268	246.6	242.28
176	267	170	260	241.05	233.4
200	281	186	274	267.87	252.54
191	287	177	272	260.85	243.36
193	271	178	266	258.45	242.7
212	302	192	281	285.06	260.19
181	254	204	276	242.34	270.36
195	297	191	290	267.39	261.66
187	281	178	265	255.39	242.43
190	284	177	275	259.08	244.17

$$V = \begin{vmatrix} 0.96 \\ 0.27 \end{vmatrix}$$

x11 - ort(x11)	x12 - ort(x12)	x11 – ort(x21)	x12 – ort(x22)	x21 -ort(x21)	x22 - ort(x22)	x21- ort(x11)	x22 - ort(x12)
-9	-4.3	-4.8	2.5	0.2	6.5	-4	-0.3
-3	-5.3	1.2	1.5	10.2	9.5	6	2.7
17	25.7	21.2	32.5	-1.8	0.5	-6	-6.3
-5	7.7	-0.8	14.5	17.2	32.5	13	25.7
-12	-9.3	-7.8	-2.5	-7.8	-21.5	-12	-28.3
-12	1.7	-7.8	8.5	-7.8	-7.5	-12	-14.3
-13	-15.3	-8.8	-8.5	-14.8	-15.5	-19	-22.3
11	-1.3	15.2	5.5	1.2	-1.5	-3	-8.3
2	4.7	6.2	11.5	-7.8	-3.5	-12	-10.3
4	-11.3	8.2	-4.5	-6.8	-9.5	-11	-16.3
23	19.7	27.2	26.5	7.2	5.5	3	-1.3
-8	-28.3	-3.8	-21.5	19.2	0.5	15	-6.3
6	14.7	10.2	21.5	6.2	14.5	2	7.7
-2	-1.3	2.2	5.5	-6.8	-10.5	-11	-17.3
1	1.7	5.2	8.5	-7.8	-0.5	-12	-7.3

TABLO : 1'in devamı

Birinci grup :

X11	x12	Diskriminant değerleri:			Eski Grup :	Yeni Grup :	Sınıflandırma:
180	278	95.9	>	15.4	1	1	Doğru
186	277	18.5	>	2.5	1	1	Doğru
206	308	541.4	<	848.9	1	1	Doğru
184	290	7.4	<	10.0	1	1	Doğru
177	273	196.6	>	66.5	1	1	Doğru
177	284	122.1	>	26.9	1	1	Doğru
176	267	275.6	>	115.2	1	1	Doğru
200	281	104.4	<	258.8	1	1	Doğru
191	287	10.2	<	82.2	1	1	Doğru
193	271	0.6	<	44.4	1	1	Doğru
212	302	751.2	<	1107.3	1	1	Doğru
181	254	234.5	>	89.2	1	1	Doğru
195	297	94.8	<	243.5	1	1	Doğru
187	281	5.1	<	13.0	1	1	Doğru
190	284	2.0	<	53.2	1	1	Doğru

İkinci grup :

X21	x22	Diskriminant değerleri:			Eski Grup :	Yeni Grup :	Sınıflandırma:
185	282	3.8	<	15.3	2	2	Doğru
195	285	152.9	>	42.2	2	2	Doğru
183	276	2.5	<	55.5	2	2	Doğru
202	308	639.9	>	377.4	2	2	Doğru
177	254	176.5	<	366.8	2	2	Doğru
177	268	90.3	<	236.3	2	2	Doğru
170	260	338.0	>	588.2	2	2	Doğru
186	274	0.6	<	26.1	2	2	Doğru
177	272	71.0	<	204.3	2	2	Doğru
178	266	82.5	<	223.6	2	2	Doğru
192	281	70.7	>	6.4	2	2	Doğru
204	276	345.1	>	161.5	2	2	Doğru
191	290	97.5	>	16.1	2	2	Doğru
178	265	87.5	<	231.7	2	2	Doğru
177	275	58.0	<	181.8	2	2	Doğru

Sonuç ve degerlendirme

Daha öncede belirtildigi gibi uygulamacılara ışık tutmak amacı ile küçük bir örnek üzerinde, diskriminant fonksiyonun bulunması aşamaları ve sınıflandırma aşamaları anlatıldıktan sonra küçük bir veri grubu üzerinde uygulaması yapıldı.Uygulama aşamasında önce diskriminant fonksiyonu bulundu, daha sonrada birinci ve ikinci gruplardan seçilen birer birimin seçildikleri gruplara ait oldukları diskriminant fonksiyonu aracılığı ile gösterildi. İkinci aşamada, hangi gruba ait olduğu bilinmiyen bir birimin sınıflamasının nasıl yapılacağı gösterildi.

KAYNAKÇA

Johnson, R. A.,Wichern, D. W., "Applied Multivariate Statistical Analysis", Prentice- Hall International, Inc. USA, 1982

Krzanowski, W. S."Principle of Multivariate Analysis AUser's Perspective" Clarendan Press-Oxford, 1993

Tatsuoka, Maurice "Multivariate Analysis : Techniques for Educational and Psychlogical Research", John Wiley and Sons, Inc. New-York, 1971

Tatlıdil, Hüseyin "Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz" H.Ü. Fen Fakültesi İstatistik Bölümü Yayınları, Ankara, 1992

Akdoğan, N. Tenker, Nejat "Finansal Tablolar ve Mali Analiz Teknikleri" G.Ü. Basın Yayın Yüksek Okulu Matbaası, 4. Basım Ankara, Ocak-1992

Norusis, M. J. "SPSS / PC + Advanced Statistics" USA, 1986