



Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi

<https://dergipark.org.tr/tr/pub/yyufbed>



Araştırma Makalesi

Uçak Kanadı Tasarımı, Analizi ve Yapı Elemanlarının Topoloji Optimizasyonu

Hasan KORKUT, Meryem ALTAY*, Hakan AYDIN

Bursa Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 16059, Bursa, Türkiye
Hasan KORKUT, ORCID No: 0000-0002-5659-2629, Meryem ALTAY, ORCID No: 0000-0001-6930-6292,
Hakan AYDIN, ORCID No: 0000-0001-7364-6281

*Sorumlu yazar e-posta: meryemaltay@uludag.edu.tr

Makale Bilgileri

Geliş: 15.02.2023
Kabul: 09.05.2023
Online Aralık 2023

DOI:10.53433/yyufbed.1250545

Anahtar Kelimeler

Sonlu elemanlar yöntemi,
Tasarım,
Topoloji optimizasyonu,
Uçak kanadı,
Yapısal analiz

Öz: Havacılık ve uzay endüstrisinde yapısal bir parçanın üretiminde tasarım, yük, analiz süreçlerinin eş zamanlı olarak yürütülmesi gerekmektedir. Konsept tasarım sürecinde en önemli unsur parçanın en hafif şekilde görevini yerine getirebilmesidir. Bu çalışmada uçak kanadı tasarımı Catia yazılımı kullanılarak yapılmıştır, alüminyum 7050 ve HexplyAS4/8552 kompozit malzemeleri için analizler gerçekleştirilmiştir. Sonlu Elemanlar Yöntemi yaklaşımı kullanılarak Hypermesh yazılımı yardımıyla Topoloji Optimizasyonu gerçekleştirilmiştir; birçok iterasyon uygulanarak tasarımda hafifletme çalışmaları için geometrik değişikliklere karar verilmiştir. Optimizasyon sonucunda ortaya çıkan kanat geometrisi yapısal olarak analiz edilip mukavemet kontrolü yapılmıştır. Geometrinin bütünlüğünü sağlayan bağlantı elemanlarının statik hesaplamaları da gerçekleştirilmiştir. İncelenen malzemeler için müsaade edilebilir tasarım değerlerine uygun sonuçlar elde edilmiştir. HexplyAS4/8552 kompozit malzeme hafiflik açısından ön plana çıksa da kullanılabilirlik ve üretime uygunluk açısından alüminyum 7050 malzemesi seçilmiştir.

Airplane Wing Design, Analysis and Topology Optimization of Structural Elements

Article Info

Received: 15.02.2023
Accepted: 09.05.2023
Online December 2023

DOI:10.53433/yyufbed.1250545

Keywords

Airplane wing,
Design,
Finite element method,
Structural analysis,
Topology optimization

Abstract: The design and analysis processes should be carried out simultaneously in the production of a structural part in the aerospace industry. The most important factor in the concept design process is that the part can fulfill its task in the lightest way. In this study, aircraft wing design was made using Catia software, analyzes were performed for aluminum 7050 and HexplyAS4/8552 composite materials. Using the Finite Element Method approach, Topology Optimization was performed with the help of Hypermesh software; By applying many iterations, geometric changes were decided for mitigation studies in the design. The wing geometry that emerged as a result of the optimization was analyzed structurally and strength was checked, and static calculations of the fasteners that ensure the integrity of the geometry were also carried out. The results were obtained in accordance with the permissible design values for the investigated materials. Although the HexplyAS4/8552 composite material stands out in terms of lightness, Aluminum 7050 material was chosen in terms of usability and suitability for production.

1. Giriş

Günümüzde hava araçlarının performans gerekliliklerinin sağlanması ve verimliliklerinin artırılması oldukça önemli bir konu haline gelmiştir. Bu doğrultuda kullanılan malzemeler farklılaşmakta, ağırlık azaltılması üzerine analiz ve optimizasyon çalışmaları gerçekleştirilmektedir. Montajda gerekli bağlayıcı sayısını azaltılması, bağlayıcıların üzerine gelen yüklerin hesaplanması ve yapısal optimizasyon son zamanlarda ön plana çıkan konulardandır.

Uçak kanatları, analiz gerektiren birleştirme elemanları, kirişler gibi yapılardan oluşur. Bu tip yapıların analizi için Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) yaklaşımı yaygın olarak kullanılır, analize yapının modellenmesi ile başlanır. Aynı zamanda yapı optimizasyonu çalışmaları ile yapısal ağırlık büyük ölçüde azaltılabilir. [Aftab ve ark. \(2022\)](#), Boeing 737 uçağı iniş takımı için bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Uçak iniş takımının 3 boyutlu modellemesi yapılarak bağlantı noktaları üzerine gelen yükler alüminyum 7075, Ti6Al4V ve Alaşımli Çelik 4340 malzemeleri için analiz edilmiştir. alüminyum 7075 alaşımında oluşan stresin diğer malzemelere kıyasla daha az olduğu ve yorulma açısından değerlendirildiğinde daha uzun ömür ve güvenilirlik sağladığı tespit etmişlerdir. [Liu ve ark. \(2021\)](#), sandviç yapıda petek levhalar kullanarak insansız hava araçları (İHA) için kanat tasarım parametrelerini belirlemişlerdir. Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak model oluşturulmuş, üç nokta eğme testleri gerçekleştirilmiş ve simülasyon yapılmıştır. Yapısal topoloji optimizasyonu ve kanat statik simülasyon analizi için petek sandviç plakalı kanatçıkların eşdeğer modeli kurulmuş ve topoloji optimizasyon sonuçlarına göre uçuş testi için bir İHA prototipi yapılmıştır. Simülasyon ve prototip test sonuçları, sandviç plaka malzeme ile İHA kanat yapı tasarımının uygun olduğunu ve bu yöntemin aynı tip kanat tasarımı için bir referans sağlayabileceğini göstermiştir. Optimizasyondan sonra, tek bir kanat rib ağırlığı %51.3 azalmıştır. [Abbas ve ark. \(2021\)](#), bir nakliye uçağı kanadının modellemesini ve yapısal analizlerini yapmışlardır. Uçak kanadı CATIA V5 yazılımı yardımıyla modellenmiştir. Kiriş, rib ve kabuk gibi çeşitli yapısal bileşenler ANSYS 2016 yazılımı yardımıyla analiz edilmiştir; gerilme, gerinim, deformasyon bilgileri elde edilmiştir. Sonlu Elemanlar Yöntemi yaklaşımı yardımıyla Von Mises kriterlerine göre değerlendirildiğinde akma veya burkulma kaynaklı deformasyonun meydana gelmediği, tasarımın yapısal limitler içinde bulunduğu tespit edilmiştir.

Bu çalışmada, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) 64012A kanat profili tasarımı için Sonlu Elemanlar Yöntemine dayalı bir yapısal analiz ve topoloji optimizasyonu sunulmuştur. Hafiflik açısından ön plana çıkan alüminyum 7050 ve son yıllarda kullanımı artan kompozit malzemeler olmak üzere iki farklı malzeme için karşılaştırma yapılmıştır. Topoloji optimizasyonu, kanat üzerindeki bağlayıcı üzerine gelen yükler üzerinden gerçekleştirilerek yapısal ağırlık azaltılması amaçlanmıştır. Çalışma sonucunda elde edilen verilerin, uçak kanatlarında kritik yüklenme koşulunda ağırlık ve maliyet açısından tasarımlara yön vermesi amaçlanmaktadır.

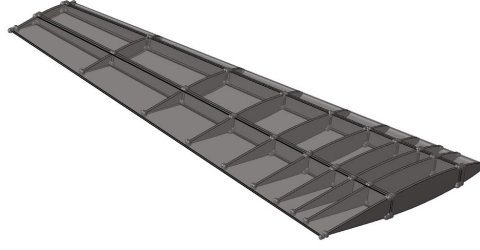
2. Materyal ve Yöntem

Bu çalışmada bir uçak kanadı konsept tasarımından nihai tasarıma giden prosesler ele alınmıştır. İlk tasarım olarak yapılan çalışmanın üzerine gelen yükler hesaplanarak topoloji optimizasyonu gerçekleştirilmiştir, optimizasyon ve statik analiz sonuçlarına göre nihai tasarıma ulaşılmıştır. Bu çalışmalar havacılıkta en çok kullanılan iki malzeme olan alüminyum 7050 alaşımı ve HexplyAS4/8552 Kompozit malzemeleri kullanılarak yürütülmüştür.

Uçak kanat profili Şekil 1'de görüldüğü gibi NACA 64012A serisidir. Uçak kanadı tasarımı için CATIA yazılımında yüzey modellenmiş ve katı modele dönüştürülmüştür. Tasarımın geometrik ölçüleri Çizelge 1'de verilmiştir. Uçak kanadı ilk tasarım çalışması Şekil 2'de gösterilmektedir.



Şekil 1. NACA 64012A kanat profili.



Şekil 2. Uçak kanadı ilk tasarımı.

Çizelge 1. Kanat ölçüleri

Parametre	Değer	Birim
Kanat boyu	4.75	m
Kanat alanı	8.25	m ²
Ortalama cord (Veter) uzunluğu	1.736	m
Azami hız	222.222	m/s
Açıklık oranı	5.47	
Hücum açısı	2	°
Süpürme açısı	15	°

2.1. Materyal

Uçak yapısal elemanlarında en fazla kullanılan malzeme alüminyumdur. Mukavemet özellikleri yüksek olan alüminyum, çinko, magnezyum ve bakır içeren 7000 serisi, korozyon direnci avantajı sağlaması sebebiyle havacılık sektöründe tercih edilmektedir. Bu çalışmada T74511 temper özelliğine sahip ekstrüzyon ile üretilen AMS4342 Alüminyum 7050 alaşımları incelenmiştir, özellikleri Çizelge 2’de verilmiştir.

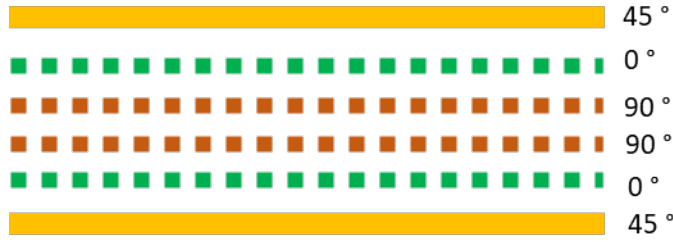
Çizelge 2. Alüminyum 7050 alaşımı özellikleri

Parametre	Değer	Birim
Elastisite	72016	N mm ⁻²
Poisson Oranı	0.33	-
Yoğunluk	2.4 10 ⁻⁶	kg mm ⁻³
Dayanım gerilim değeri F _{ND}	500	N mm ⁻²
Dayanma gerilimi değeri F _{NDD}	775	N mm ⁻²

Kompozit malzemeler, makroskobik düzeyde bir araya getirilmiş ve birbiri içinde çözünmeyen iki veya daha fazla bileşenden oluşmuş malzemelerdir. Bileşenlerden birisi takviye fazı, diğeri ise matris olarak adlandırılır. Takviye fazın malzemesi fiber, parçacık veya pul formunda olabilir. Matris malzemeler ise genellikle sürekli dir. Havacılık sektöründe kullanılan ileri kompozitler, epoksi matris malzeme içinde yer alan yüksek performanslı takviyelerden oluşur. Bu çalışmada Hexply 8552 sertleştirilmiş epoksi prepreg matris ve Hexply AS4 tek yönlü fiber bantlar kullanılmıştır, mekanik özellikleri Çizelge 3’te verilmiştir. Kompozit malzemeler üretilirken dış katmanların hasara karşı dayanıklı olması için 45° ve -45° açılı kullanılması tercih edilmektedir. Eksenel yükleri taşımaları için 0°, kesme yüklerini karşılamaları için 45° ve enine yükleri taşımaları adına 90° açıldaki katmanlar serilmektedir (Kaw, 2005). Kompozit malzemenin serimi Şekil 3’te gösterilmiştir.

Çizelge 3. HexplyAS4/8552 kompozit malzeme özellikleri

Parametre	Değer	Birim
Elastiklik Modülü, E_{11}	133000	$N\ mm^{-2}$
Elastiklik Modülü, E_{22}	8410	$N\ mm^{-2}$
Poisson Oranı	0.35	-
Yoğunluk	$1.77\ 10^{-6}$	$kg\ mm^{-3}$
Kesme Modülü 12, G_{12}	2850	$N\ mm^{-2}$
Çekme Dayanımı 11, XT	2200	$N\ mm^{-2}$
Çekme Dayanımı 22, YT	36	$N\ mm^{-2}$
Basma Dayanımı 11, XC	1350	$N\ mm^{-2}$
Basma Dayanımı 22, YC	220	$N\ mm^{-2}$
Kesme Dayanımı, S	105	$N\ mm^{-2}$
Çekme Gerinimi	1550	μmm
Basma Gerinimi	805	μmm
Dayanma Gerilimi Dayanımı	606	$N\ mm^{-2}$
Baypas Çekme Dayanımı	327	$N\ mm^{-2}$
Baypas Basma Dayanımı	475	$N\ mm^{-2}$
Çentiksiz Çekme Dayanımı	910	$N\ mm^{-2}$
Laminat Kalınlığı	0.13	mm



Şekil 3. Kompozit malzeme serimi.

Bağlayıcılar iki veya daha fazla malzemeyi mekanik olarak birbirine bağlayan ve yük aktarımını sağlayan yapı elemanlarıdır. Mekanik bağlantıyı sağlayabilmek için üretim sonrası sökülebilen durum (sökülebilir, sökülemez) ve kafa tipine (bombe başlı, havşa başlı, mantar başlı) göre çeşitli perçinler kullanılır. Bu çalışmada havacılık sektöründe yaygın kullanılan EN6114 havşa başlı civata kullanılmıştır, bağlayıcı özellikleri Çizelge 4’te gösterilmektedir.

Çizelge 4. EN6114 havşa başlı civata özellikleri

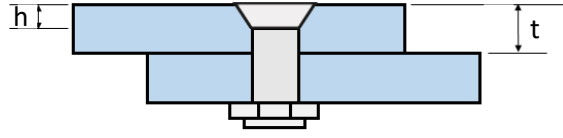
Parametre	Değer	Birim
Elastiklik modülü	210000	$N\ mm^{-2}$
Kesme dayanımı	16000	N
Eksenel dayanımı	14450	N

2.2. Tasarım kural ve kriterleri

Uçuş yükü faktörleri, aerodinamik kuvvet bileşeninin uçağın ağırlığına oranını temsil eder. Pozitif bir uçuş yükü faktörü, aerodinamik kuvvetin uçağa göre yukarı doğru hareket ettiği bir faktördür. Uçağın çalışmasının beklenebileceği aralık dahilindeki her kritik irtifada, tasarım minimum ağırlığından maksimum ağırlığına kadar her ağırlıkta; her yükseklik ve ağırlık için, belirtilen çalışma sınırlamaları dahilinde yükün uygulanabilir dağılımı sağlanmalıdır (FAA Part 23, 2023).

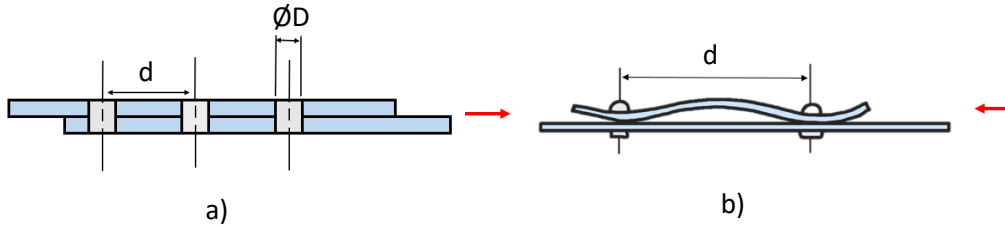
Aerodinamik yüzeylerde hava akışını bozmamak için havşa başlı bağlayıcılar tercih edilmektedir. Havşa başlı bağlayıcı kullanımında Şekil 4’de görülen ve Denklem 1’de verilen formül esas alınmaktadır (Niu, 1989).

$$h \leq \frac{2}{3}t \quad (1)$$



Şekil 4. Havşa başlı bağlayıcı montajı için malzeme kalınlığı.

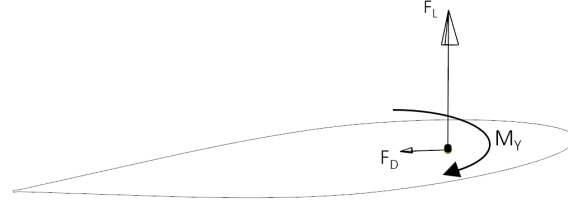
Açılan bağlayıcı deliklerinin kenar mesafesine uzaklığı belli bir kural çerçevesinde oluşturulmaktadır. Kenar uzaklığı (e), bağlayıcı çapının (D) iki katından 0.762 mm fazla uzaklıkta olmalıdır. Yapılan uçak kanadı tasarımında bağlayıcılar, serbest kenardan bağlayıcı çapı merkezine olan uzaklık çapın iki katı artı 1 mm, serbest olmayan kenardan ise çap artı 1 mm olacak şekilde konumlandırılmıştır. Bağlayıcılar arası mesafe (d), kullanılan bağlayıcı çapının (D) dört ila altı katı arasında olması gerekmektedir (Şekil 5.a). Eğer sınır şartlar aşılırsa fazla bir mesafede bağlayıcıların düzeni sağlanırsa, bağlayıcılar arasında basma yükü nedeniyle burkulma ile karşılaşılabilir (Şekil 5.b).



Şekil 5. Bağlayıcı arası mesafe gösterimi ve bağlayıcılar arasında burkulma gösterimi.

2.3. Yük

Uçak kanadı çekme, basma, burkulma, eğilme gibi birçok yük altında çalışmaktadır. Bir kanat tasarımının ölçülendirilebilmesi için uçağın ömrü boyunca karşılaşılabileceği tüm yükler hesaba katılarak hesaplamalar yapılması gereklidir. Bu çalışmada en temel yüklemeye olan aerodinamik yük koşullarına göre ölçülendirme yapılmıştır. Yapılan çalışma düz uçuşta herhangi bir manevra gerçekleştirilmediği durumda gerçekleştirilmiş olup, daha detaylı bir çalışma yapılmak istenirse, hava aracının ömrü boyunca görebileceği tüm kuvvetler göz önünde bulundurulmalıdır: hava aracının montajı devam ederken komponent bazlı testler, tam boy statik, yorulma testleri ile ve ürün ortaya çıktıktan sonra uçuş testleriyle bu yük koşulları desteklenmelidir. Bu çalışmada basit bir düz uçuş yüklemesi altında bir hava aracının ölçülendirilmesinde nasıl bir yol izlenebilir gösterilmek istenmiştir. Yapılan tasarım sonucunda yapıya uygulanacak aerodinamik yükler denklem 2, 3 ve 4 kullanılarak hesaplanmıştır. Hesaplanan yüklerin değerleri Çizelge 5'de verilmiştir. Yapıya uygulanacak aerodinamik yükler: aerodinamik kaldırma kuvveti (F_L), sürüklenme kuvveti (F_D) ve yunuslama momentidir (M_Y). Uygulanan yükler Şekil 6'da gösterildiği gibidir. Yük hesabında kullanılması gerekli katsayılar NACA standartlarından elde edilmiştir, c_L : Kaldırma katsayısı, c_D : Sürüklenme katsayısı, c_M : Yunuslama katsayısı, ρ : yoğunluk, v : Hız, A : Kanat alanı, L : Kanat uzunluğudur. Çalışmada c_L : 0.49, c_D : 0.01, c_M : 1.99 olarak kullanılmıştır (Sadraey, 2012).



Şekil 6. Yapıya uygulanan aerodinamik yükler (F_L : aerodinamik kaldırma kuvveti, F_D : sürüklenme kuvveti, M_Y : yunuslama momenti).

$$F_L = c_L \frac{1}{2} \rho v^2 A \quad (2)$$

$$F_D = c_D \frac{1}{2} \rho v^2 A \quad (3)$$

$$M_Y = c_M \frac{1}{2} \rho v^2 A L \quad (4)$$

Çizelge 5. Tasarıma uygulanan yükler

Yön	Değer	Birim
F_z	124000	N
F_x	2752.4	N
M_y	2360000	N mm

2.4. Analiz

Uçak kanadı tasarımı yapıldıktan sonra emniyet kontrolü yapılması gerekmektedir. Emniyet katsayıları belirlenerek tasarlanan yapının güvenilirliği sağlanmış olur. Gerilim, bağlayıcı kesme kuvveti, bağlayıcı aksenal kuvveti, dayanma gerilimi, net kesit gerilimi, bağlayıcılar arasında burkulma, gerinim, kompozit malzemede dayanma ve baypas gerilimi, kompozit malzemede bağlayıcılar arasında burkulma parametreleri incelenmiştir.

Gerilim: Von Mises şekil değiştirme enerjisini temel almaktadır; yapının herhangi bir yüklenme durumunda plastik şekil değişimine uğramış olup olmadığını belirlemek için hesaplanır, deneysel olarak ölçülen akma noktası ile karşılaştırılabilir (Beer ve ark., 2012).

Bağlayıcı kesme kuvveti: Yapılarda kullanılan bağlayıcılar farklı kuvvetlere maruz kalmaktadır, kuvvetlerin bağlayıcıyı deforme edip etmediğini kontrol edilmelidir. Kesme kuvvetine maruz kalmış bir bağlayıcının mukavemet kontrolü Denklem 5' de verilen formül ile kontrol edilmektedir. F_{BKM} : Bağlayıcı kesme kuvveti müsaade edilebilir değeri, F_K : kesme kuvvetidir. Emniyet katsayısı 1'in üzerinde ise bağlayıcı kesme kuvveti açısından emniyetlidir, bağlayıcı üzerine gelen kesme kuvveti Şekil 7.a'da gösterilmiştir.

$$EK = \frac{F_{BKM}}{F_K} \quad (5)$$

Bağlayıcı aksenal kuvveti: Bağlayıcı elemanın maruz kaldığı bir diğer kuvvet Şekil 7.b'de gösterildiği gibi aksenal kuvvettir (Budynas & Nisbett, 2008). Bağlayıcının aksenal kuvvet altında emniyetli olup olmadığını Denklem 6'daki formül kullanılarak kontrol edilmesi gerekmektedir. Emniyet katsayısı 1'in üzerinde ise bağlayıcı aksenal kuvvet açısından emniyetlidir, F_{BEM} : Bağlayıcı aksenal kuvveti müsaade edilebilir değeri, F_E : aksenal kuvvettir (Bruhn, 1973).

$$EK = \frac{F_{BEM}}{F_E} \quad (6)$$

Dayanma gerilimi: Bağlayıcı eleman kesme kuvvetine maruz kalmaktadır, bu kesme kuvveti parçada dayanma şeklinde bir deformasyon oluşturmaktadır (Şekil 7.c). Dayanma gerilim değeri Denklem 7' deki formül ile elde edilmekte ve emniyet katsayısı hesaplanmaktadır. Burada F_K : Kesme Kuvveti, D : bağlayıcı çapı, t : malzeme kalınlığıdır. Malzemenin emniyet kontrolü de bu emniyet katsayısı ile yapılmaktadır (Niu, 1999).

$$\sigma_D = \frac{F_K}{D \times t} \quad (7)$$

Net kesit gerilimi: Bağlayıcının bağlandığı bölgede kesite dik yönde etkiyen çekme kuvveti malzemeyi çeki yönünde zorlamaktadır. Şekil 7.d'de kırmızı renk ile gösterilen alan çekme kuvvetine karşı koyan kısımdır. Analiz çalışmalarında bu gerilmeyi Denklem 8 yardımıyla kontrol etmek gerekmektedir. F_ζ : çekme kuvveti, W : malzeme genişliği, D : bağlayıcı çapı, t : malzeme kalınlığıdır (Budynas & Nisbett, 2008).

$$\sigma_{N\zeta} = \frac{F_\zeta}{(W - D) \times t} \quad (8)$$

Bağlayıcılar arasında burkulma: Sonlu Elemanlar Yönteminde bağlayıcılar arası burkulmanın kontrol edilmesi gerekmektedir (Şekil 7.e). Bağlayıcılar arasındaki burkulma kritik gerilimi Denklem 9 ile hesaplanarak gerilim değerleri ile kıyaslanır. Burada E : Elastisite modülü, t : malzeme kalınlığı, s : bağlayıcılar arası mesafedir, c katsayısı üniversal başlı bağlayıcılarda 4, havşa başlı bağlayıcılarda ise 1 alınmaktadır (Niu, 1999).

$$\sigma_{kr} = 0.9cE \left(\frac{t}{s} \right)^2 \quad (9)$$

Kompozit Malzemede Gerilim: Maksimum şekil değiştirme hasar teorisi, izotropik malzemelere uygulanan maksimum kayma gerilmesi (Von Mises Kriteri) ve maksimum normal şekil değiştirme teorisini (St Venant) temel alır. Laminaya uygulanan şekil değiştirmeler, malzeme eksenlerindeki şekil değiştirmelere dönüştürülür. Lokal eksenlerdeki kayma gerilmesi veya normal gerilmeler maksimum şekil değiştirmeyi aşarsa hasar tahmini yapılır, Denklem 10 ve Denklem 11'de gösterilmiştir. ε_ζ : çekme gerinimi, ε_b : basma gerinimi, $\varepsilon_{mg\zeta m}$: Malzeme gerilim çekme müsaade edilebilir değeri, ε_{mgbm} : Malzeme gerilim basma müsaade edilebilir değerini ifade etmektedir (Kaw, 2005).

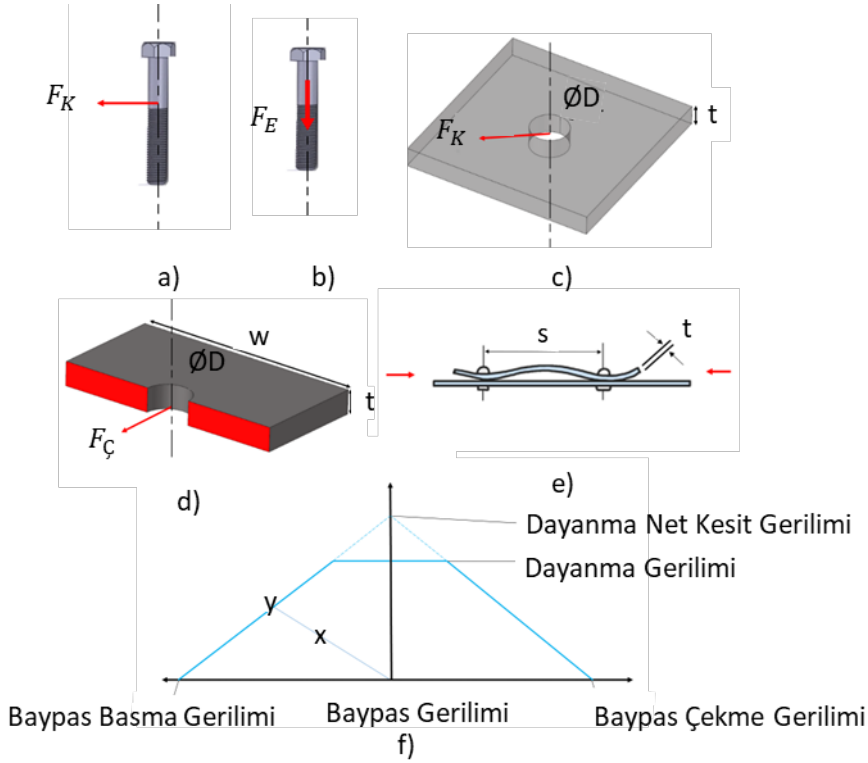
$$\varepsilon_\zeta \leq \varepsilon_{mg\zeta m} \quad (10)$$

$$\varepsilon_b \leq \varepsilon_{mgbm} \quad (11)$$

Kompozit Malzemede Dayanma ve Baypas Gerilimi: Kompozit malzemelerde dayanma ve baypas gerilimlerinin emniyet durumu birlikte kontrol edilmektedir. Şekil 7.f'de gösterilen x noktası analiz sonrasındaki baypas ve dayanma gerilim değerlerinin kesiştirilmesi ile elde edilmiştir. Aynı doğrultu üzerindeki y noktası da malzemenin müsaade edilebilir gerilme değeridir. Baypas basma gerilimi, baypas çekme gerilimi ve dayanma gerilimi arasında kalan yamuk şeklindeki alan emniyet alanıdır (Crews & Naik, 1987).

Kompozit malzemede bağlayıcılar arasında burkulma: Sonlu Elemanlar Yöntemi modeli ile bağlayıcılar arası burkulmanın kontrol edilmesi gerekmektedir. Metal malzemelerde olduğu gibi benzer işlem adımları takip edilir, ancak malzeme farklılığı nedeniyle formülasyon değişmektedir (Denklem 12). D_{11} : laminanın rijitlik matrisindeki eğilme sertlik değerlerinden biridir, c : üniversal başlı bağlayıcılarda 3, havşa başlı bağlayıcılarda 1 alınmaktadır (Kassapoglou, 2010).

$$\sigma_{kr} = \frac{c\pi D_{11}}{ts^2} \quad (12)$$



Şekil 7. a) Bağlayıcı kesme kuvveti gösterimi, b) Bağlayıcı eksenel kuvveti gösterimi, c) Dayanma gerilimi gösterimi, d) Net kesit gerilimi gösterimi, e) Bağlayıcılar arası burkulma, f) Dayanma-baypas gerilimi.

2.5. Sonlu elemanlar yöntemi

Sonlu Elemanlar Yönteminde düğümler, komşu sonlu elemanları uçlarından birbirine bağlayan ve onları bir arada tutan somun ve civata bağlantısı gibi düşünülebilir. Düğümler kaldırıldığında elemanlar birbirinden ayrılırlar, komşu sonlu elemanlar arasında fiziksel süreklilik yoktur. Metodun çözümlemesinde sonraki adım, elemanların direngenlik matrisini tanımlamaktır. Eleman direngenlik matrisleri, parçalara ayrılmış cismin tamamına ait tümel direngenlik matrisini oluşturmak üzere toplanır. Bu toplamada, cismin sonlu eleman modelindeki bütün düğümlerde kuvvetlerin dengesi ve yer değiştirmelerin sürekliliği sağlanır. Buradan Denklem 13'te verilen matris denkleminde ulaşılır. $[K]$ cismin tümel direngenlik matrisini, $\{P\}$ tüm düğümlere uygulanan tümel kuvvet vektörünü, $\{\delta\}$ düğümlerin yer değiştirmelerini tanımlamaktadır.

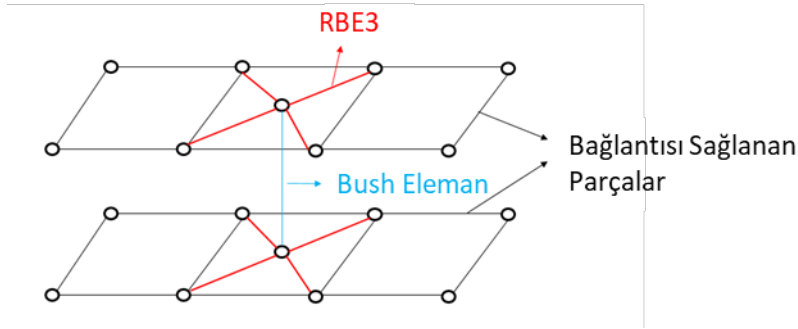
$$[K]\{\delta\} = \{P\} \quad (13)$$

Özetlenirse, bir problemin sonlu eleman metodu ile çözmek için sırası ile aşağıdaki işlemlerin uygulanması gerekir:

- (1) Cismi bir sonlu elemanlar sistemi halinde bölme
- (2) Cismi temsil eden elemanların her birinin eleman direngenlik matrisi ve diğer özelliklerinin çıkarılması
- (3) Tümel direngenlik matrisi $[K]$, ve tümel kuvvet vektörü $\{P\}$ toplama işlemi
- (4) $\{\delta\}$ tayin etmek için, belirlenmiş sınır şartlarıyla Denklem 13'ün çözümü
- (5) Hesaplanan düğüm yer değiştirmeleri $\{\delta\}$ dan elemanların zorlanmalarının ve gerilmelerinin hesaplanması

Doğru bir yapısal analiz yapmak için yapısal parçaların etkileşimlerini ve yükün bağlayıcılar aracılığıyla nasıl aktardığını anlamak önemlidir. Büyük yapılar genellikle bağlayıcıları deforme edecek yükler oluşturabilmektedir. Bağlayıcıların sonlu eleman modellemesi için çok farklı yöntemler kullanılmaktadır. Birleştirilecek parçalar kabuk ya da katı olarak modellenebilir. Bağlantı elemanlarını

modellemek için kullanılan tekniklere rijit elemanlar, ayrık yay elemanlar, giriş elemanları, konektör elemanlar örnek olarak verilebilir. Konektör bağlayıcı modelleme son zamanlarda bağlayıcıyı daha hızlı modelleyebilmek için ticari yazılımlarda kullanılan bir yöntemdir. Bağlayıcılar altı serbestlik derecesine sahip bir boyutlu elemanlardır. Yay elemanı (bush) modelde bağlantı elemanının tam konumunda bulunur. Bununla birlikte her bileşen üzerindeki iki düğümün, bağlantısı sağlanan parçaların modeli ile uyum içerisinde olması gerekmez, bu uyum RBE3 elemanlarıyla sağlanır. Bu modelleme yönteminin avantajı mekanik bağlantı sağlayan bağlayıcı konumu ile parçaların modellemesinde kullanılan düğümlerin konumunun uyumlu olmak zorunda olmamasıdır. Ayrıca kullanılan altı serbestlik derecesi bağlayıcı rijitliği için doğru sonuçlar alınmasını sağlar. Şekil 8’de gösterildiği gibi bağlayıcıyı temsil eden bush eleman ve bağlantısı sağlanan parçaların düğümleri arasında konum uyumu yoktur. Ancak MPC (RBE3) elemanlar ile bağlayıcı ve parça arasındaki bağlantı sağlanmıştır. Bush eleman tam bağlayıcı konumundadır (Madier, 2021).



Şekil 8. Bağlayıcı modellemesi gösterimi.

Konektör modelleme yönteminde bağlayıcı elemanının rijitlik hesaplaması sonlu elemanlar yazılımı aracılığı ile yapılmaktadır. Modelleme sonucunda mekanik bağlantı sağlanacak olan modeldeki yük transferi bağlayıcı rijitliğinden oldukça etkilenmektedir. Eksenel rijitlik, Denklem 14 yardımıyla hesaplanabilir. E_b bağlayıcının elastisitesi, A_b bağlayıcı alanı, u bağlayıcının mekanik bağlantısını sağladığı malzemelerin orta düzlemlerinin birbirine olan uzaklığıdır.

$$K_{eksenel} = \frac{E_b A_b}{u} \quad (14)$$

Bağlayıcı kesme yönündeki rijitlik hesaplama tekniklerinden biri ise Denklem 15’te verilen Huth formülasyonudur. n katsayısı tek kesme durumunda 1, çift kesme durumunda ise 2 olarak kullanılır; t_1 ve t_2 bağlantısı sağlanan malzemelerin kalınlıkları, E_1 ve E_2 malzeme elastisiteleri, D_b bağlayıcı çapıdır. h , g_1 , g_2 katsayıları mekanik bağlantısı sağlanan parçaların malzemesine ve bağlayıcı tipine göre farklı değerler almaktadır (Madier, 2021).

$$C_{kesme} = \left(\frac{t_1 t_2}{2D_b} \right)^h \frac{1}{n} \left(\frac{g_1}{t_1 E_1} + \frac{g_2}{n t_2 E_2} + \frac{g_1}{2 t_1 E_b} + \frac{g_2}{2 n t_2 E_b} \right) \quad (15)$$

2.6. Topoloji optimizasyonu

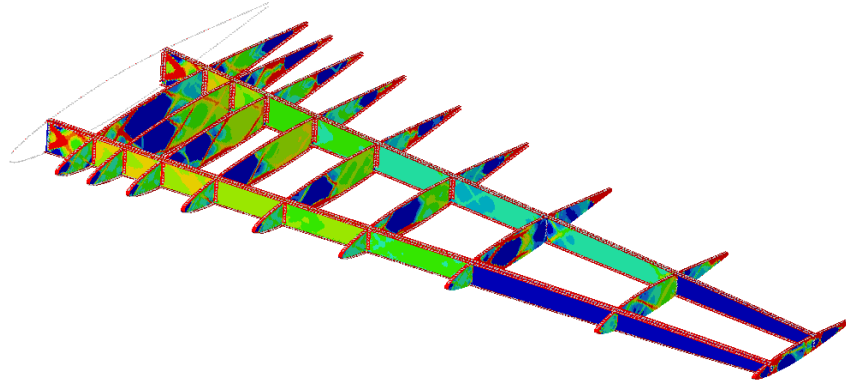
Topoloji Optimizasyonu (TO), önemli yapısal optimizasyon yöntemlerinden biridir, bir tasarım alanı üzerinde optimize edilmiş malzeme dağılımı belirlemek ve ağırlığı azaltmak için uygulanır. Şekil optimizasyonunun aksine, yapılarda genellikle ağırlıkta büyük tasarruf veya rijitlik, güç veya dinamik tepki gibi yapısal davranışın iyileştirilmesiyle sonuçlanan deliklerin veya boşlukların eklenmesine izin verir (Zhou & Rozvany, 1991; Rozvany ve ark., 1992). Topoloji optimizasyonu, özellikle havacılık ve uzay mühendisliğinde en az ağırlık ve performans tasarımı için etkili bir araç haline gelmiştir.

Bu çalışmada uçak kanadı üzerinde bağlayıcılar üzerine gelen yükler HYPERMESH yazılımı aracılığı ile analiz edilerek, topoloji optimizasyonu ile ağırlık azaltımı gerçekleştirilmiştir. Analiz, statik yüklenme altında deformasyon olmadan elastik bölge içerisinde gerçekleştirilmiştir. Statik analiz

kapsamında deformasyona izin verilmez, deformasyona izin verildiğinde non-lineer analiz başlamış olur ve farklı bir disipline geçilir. Çalışma kapsamında yorulma analizi gerçekleştirilmemiştir. Burkulma performansının yanında montajdaki bağlayıcı sayısının düşürülmesiyle birlikte yapısal ağırlığın azalması ve montaj süresinin kısalması da avantaj sağlamaktadır.

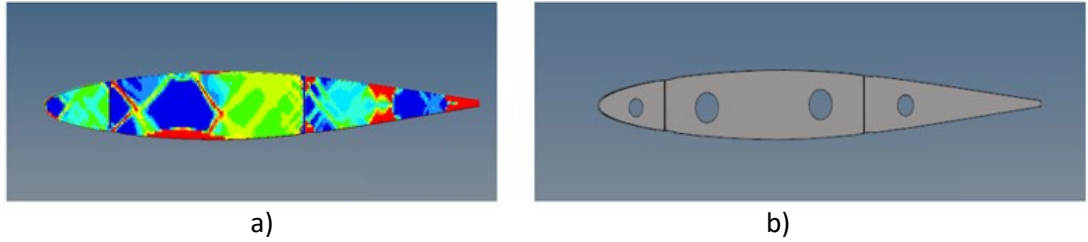
3. Bulgular ve Tartışma

Bu çalışma kapsamında bir uçak kanadının nihai tasarımına kadar olan süreçte ilk adım olarak topoloji optimizasyonu gerçekleştirilmiştir. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile uçak kanadının bağlantı noktalarına gelen yüklemeler belirlenmiştir. Şekil 9'da yapılan tasarımın hafifletme çalışmalarında hangi bölgelerden malzeme azaltılabileceği gösterilmektedir.



Şekil 9. Topoloji optimizasyonu gösterimi.

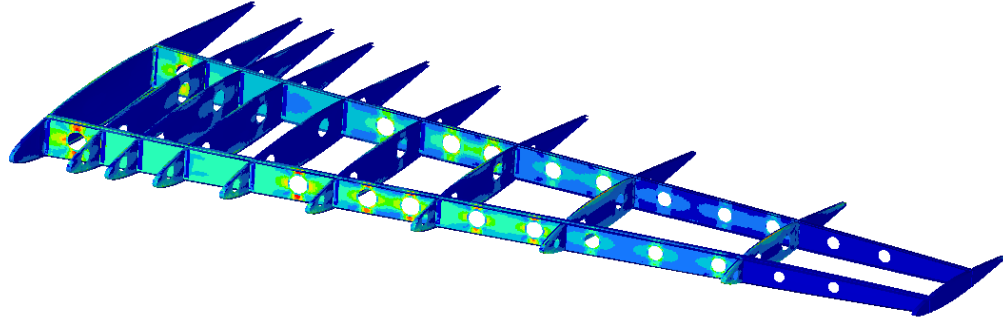
Topoloji optimizasyonunu takiben yapılacak çalışmalar malzeme azaltma, kalınlık değişimi, geometri değişimidir. Ayrıca yapılacak olan çalışmaların her biri statik açıdan analizi yapıp kontrol edilmesi gerekmektedir. Şekil 10'da optimizasyon sonucuna göre yapılan geometrik değişiklik gösterilmiştir.



Şekil 10. Topoloji optimizasyonu ve tasarım a) Bir rib için topoloji optimizasyonu sonucu b) Topoloji optimizasyonu sonucunda yapılan tasarım.

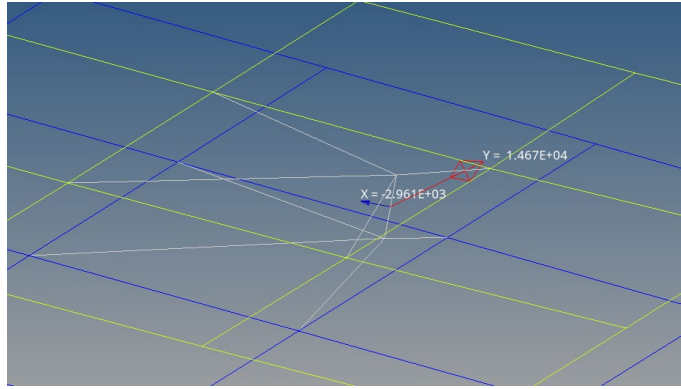
3.1. Alüminyum 7050 kanat analiz çalışmaları

Gerilim: Sonlu Elemanlar Yöntemine göre analiz sonucunda gerekli görülen bölgelerde kalınlık artışına ve kalınlık düşüşüne gidilmiştir. Yapılan tüm değişiklikler sonucunda tasarımın gerilim açısından emniyet kontrolü gerçekleştirilmiş ve emniyetli olduğu gösterilmiştir. Şekil 11'de gerilim dağılımı gösterilmektedir, hesaplanan en düşük gerilim emniyet katsayısı 1.02'dir.



Şekil 11. Gerilim dağılımı gösterimi.

Bağlayıcı kesme kuvveti: Hypermesh programında Sonlu Elemanlar Yöntemine göre yapılan çözümde bağlayıcıya gelen kesme kuvveti Şekil 12’de gösterilmiştir. Yeşil ve mavi kare elemanlar bağlayıcının bağlandığı malzemelerdir, kuvvetlerin gösterildiği eleman bağlayıcıyı temsil etmektedir, bağlantıyı sağlayan 4 kollu beyaz elemanlar ise RBE3 elemanlarıdır. Buradaki iki kuvvet bağlayıcıyı kesme yönünde zorlamaktadır, kuvvetlerin bileşkesi alınarak emniyet katsayısı hesaplanmaktadır. Tüm bağlayıcılar için bu hesaplamalar yapılmaktadır, belirlenen en küçük emniyet katsayısı kritik emniyet katsayısını oluşturmaktadır, elde edilen sonuçlar Çizelge 6’da verilmiştir.

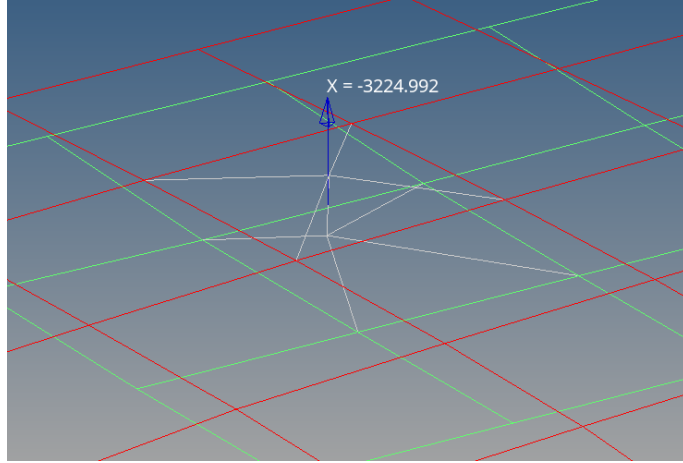


Şekil 12. Kesme kuvvetinin sonlu elemanlar modelinde gösterimi.

Çizelge 6. Kesme kuvveti emniyet katsayısı

Eleman numarası	Kesme Kuvveti (N)	Bağlayıcı müsaade edilebilir kesme kuvveti değeri (N)	Emniyet Katsayısı
417906	15047.01	16000	1.06

Bağlayıcı eksenel kuvveti: Sonlu Elemanlar Yöntemi modelinde bağlayıcıya gelen eksenel kuvvet örneği Şekil 13’te gösterilmiştir. Buradaki yeşil ve kırmızı kare elemanlar bağlayıcının bağlandığı malzemelerdir, kuvvetin gösterildiği eleman bağlayıcıyı temsil etmektedir. Bağlayıcı ve malzemeler arasındaki bağlantıyı sağlayan 4 kollu beyaz elemanlar ise RBE3 elemanlarıdır. Şekil 13’te gösterilen yük bağlayıcıyı eksenel yönde zorlamaktadır. Bu kuvvet ile emniyet katsayısı hesaplanır, tüm bağlayıcılar için emniyet katsayısı hesaplanarak kritik emniyet katsayısı ortaya konulmuştur (Çizelge 7).

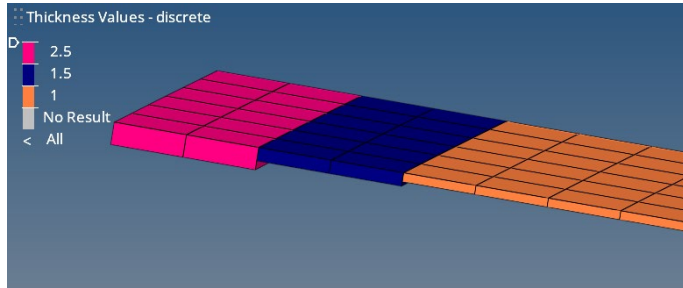


Şekil 13. Eksenel kuvvetin sonlu elemanlar modelinde gösterimi.

Çizelge 7. Eksenel kuvvet emniyet katsayısı

Eleman numarası	Eksenel Kuvvet (N)	Bağlayıcı müsaade edilebilir eksenel kuvvet değeri (N)	Emniyet Katsayısı
431465	3225	14450	4.48

Dayanma gerilimi: bağlayıcılara gelen kesme kuvvetinin deformasyon oluşturma durumu kontrol edilirken aynı zamanda bağlayıcının bağlandığı malzemenin de deformasyon durumu kontrol edilmektedir. Dayanma gerilimi sonucuna göre mevcut malzeme kalınlığının yetersiz görüldüğü bölgelerde lokal olarak kalınlaştırma yapılarak yapının emniyeti sağlanmıştır. Şekil 14’de gösterilen kalınlık artışı tasarım kurallarına istinaden kademeli olarak gerçekleştirilmiştir. Değişiklikler sonucunda sonlu elemanlar modeli tekrar analiz edilmiştir. Hesaplanan kritik dayanma gerilimi emniyet katsayısı Çizelge 8’te verilmiştir.

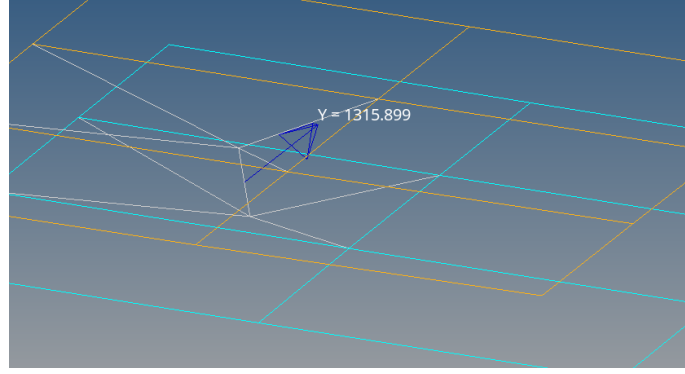


Şekil 14. Sonlu elemanlar modelinde kademeli kalınlık artışı gösterimi.

Çizelge 8. Dayanma gerilimi emniyet katsayısı

Eleman numarası	Dayanma Gerilimi (N/mm ²)	Bağlayıcı müsaade edilebilir dayanma gerilimi değeri (N/mm ²)	Emniyet Katsayısı
417811	505	775	1.54

Net kesit gerilimi: kritik net kesit gerilimini oluşturan kuvvet Şekil 15’de gösterilmiştir. Kuvvetin gösterildiği eleman bağlayıcı, sarı ve turkuaz renkli kare elemanlar bağlayıcının mekanik bağlantısını sağladığı malzemelerdir. Bağlayıcı ve malzemeler arasında bağlantıyı sağlayan 4 kollu beyaz elemanlar ise RBE3 elemanlarıdır. Bu kuvvet, malzemeleri net kesit yönünde zorlamaktadır. Malzeme kesitine dik gelen kuvvetler tüm bağlayıcı lokasyonları için hesaplanıp net kesit gerilimi emniyeti kontrol edilmiştir, en kritik emniyet katsayısı Çizelge 9’da verilmiştir.

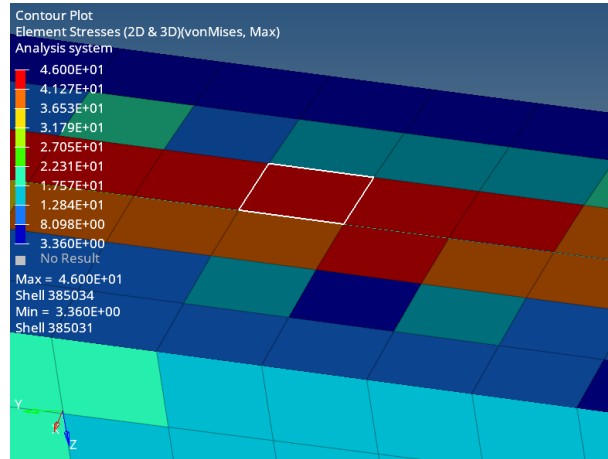


Şekil 15. Net kesite dik kuvvetin sonlu elemanlar modelinde gösterimi.

Çizelge 9. Net kesit gerilimi emniyet katsayısı

Eleman numarası	Dayanma Gerilimi (N/mm ²)	Bağlayıcı müsaade edilebilir net kesit gerilimi değeri (N/mm ²)	Emniyet Katsayısı
417811	302.11	500	1.66

Bağlayıcılar arasında burkulma gerilimi: Hypermesh analizinde bağlayıcılar arasındaki burkulma gerilim değerleri hesaplanmıştır, Şekil 16’da gösterilmektedir. Bu gerilim değerlerinin okundukları bölgelerdeki kritik gerilim değerleri hesaplanarak emniyet katsayıları belirlenmiştir (Çizelge 10).



Şekil 16. Sonlu elemanlar modelinden okunan gerilim değeri gösterimi.

Çizelge 10. Bağlayıcılar arasında burkulma emniyet katsayısı

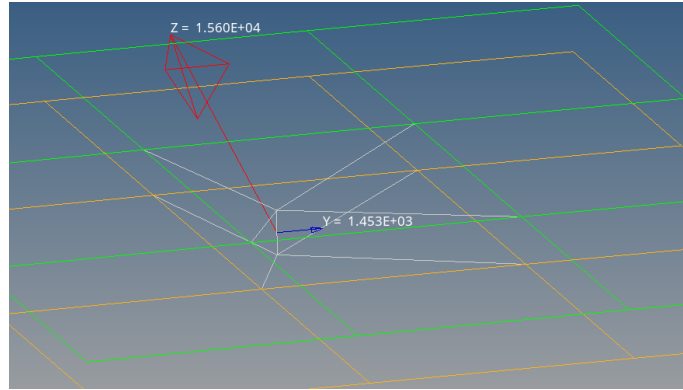
Eleman numarası	Gerilim (N/mm ²)	değeri	Kritik gerilim değeri (N/mm ²)	Emniyet Katsayısı
385034	46		56	1.21

3.2. Kompozit kanat analiz çalışmaları

Gerinim: Tasarımın Sonlu Elemanlar Yöntemi modeli kurulup birçok konfigürasyonda analiz çözümü alınmıştır. Yapının hem emniyetli olması hem de hafif olması istenmektedir. Yapıya uygulanan yükler manevra yükleri içermediğinden gerinim açısından emniyetlidir.

Bağlayıcı kesme kuvveti: Bağlayıcıya gelen kesme kuvveti örneği Şekil 17’de gösterilmiştir. Yeşil ve sarı kare elemanlar bağlayıcının bağlandığı malzemelerdir. Kuvvetlerin gösterildiği eleman bağlayıcıyı temsil etmektedir, bağlayıcı ve malzemeler arasındaki bağlantıyı sağlayan 4 kollu beyaz

elemanlar ise RBE3 elemanlarıdır. Gösterilen iki yük bağlayıcıyı kesme yönünde zorlamaktadır, kuvvetlerin bileşkesi alınarak emniyet katsayısı hesaplanmıştır (Çizelge 11).

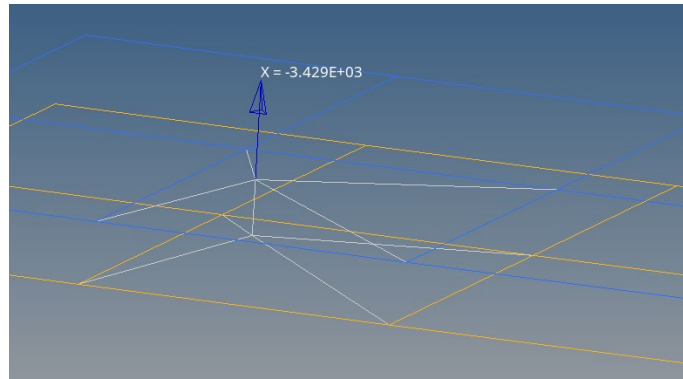


Şekil 17. Kesme kuvvetinin sonlu elemanlar modelinde gösterimi.

Çizelge 11. Kesme kuvveti emniyet katsayısı

Eleman numarası	Kesme Kuvveti (N)	Bağlayıcı müsaade edilebilir kesme kuvveti değeri (N)	Emniyet Katsayısı
407611	15667	16000	1.02

Bağlayıcı eksenel kuvveti: bağlayıcıya gelen eksenel kuvvet örneği Şekil 18’de gösterilmiştir. Mavi ve sarı kare elemanlar bağlayıcının bağlandığı malzemelerdir, kuvvetin gösterildiği eleman bağlayıcıyı temsil etmektedir, bağlayıcı ve malzemeler arasındaki bağlantıyı sağlayan 4 kollu beyaz elemanlar ise RBE3 elemanlarıdır. Gösterilen yük bağlayıcıyı eksenel yönde zorlamaktadır ve bu kuvvet ile emniyet katsayısı hesaplanmaktadır. Tüm bağlayıcılar için emniyet katsayısı hesaplanmıştır ve kritik emniyet katsayısı Çizelge 12 ’de verilmiştir.

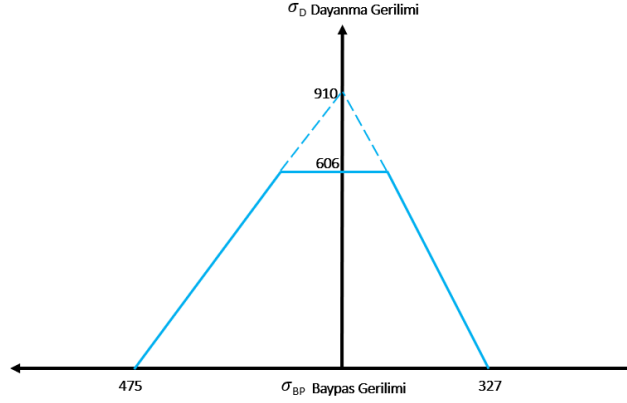


Şekil 18. Eksenel kuvvetin sonlu elemanlar modelinde gösterimi.

Çizelge 12. Eksenel kuvvet emniyet katsayısı

Eleman numarası	Eksenel Kuvvet (N)	Bağlayıcı müsaade edilebilir eksenel kuvvet değeri (N)	Emniyet Katsayısı
417811	3429	14450	4.21

Dayanma ve baypas gerilimi: Sonlu Elemanlar Yöntemi modeli ile bağlayıcılar için kesme kuvvetleri elde edilip dayanma gerilimi hesaplanmıştır. Tüm bağlayıcılar arasındaki gerilimler çıktı olarak alınmıştır ve dayanma-baypas emniyet katsayıları Şekil 19’daki grafik kullanılarak hesaplanmıştır. Hesaplanan en kritik emniyet katsayısı 1.98’dir.



Şekil 19. Kompozit malzeme dayanma – baypas gerilimi.

Bağlayıcılar arasında burkulma gerilimi: Hypermesh analiz sonucundan bağlayıcılar arasındaki gerilim değerleri elde edilmiştir. Kritik gerilim değerleri Denklem 12 kullanılarak hesaplanmıştır, programdan okunan gerilim değerleri ve kritik gerilim değerleri kıyaslanarak emniyet katsayıları hesaplanmıştır, kritik emniyet katsayısı 1.47 olarak elde edilmiştir.

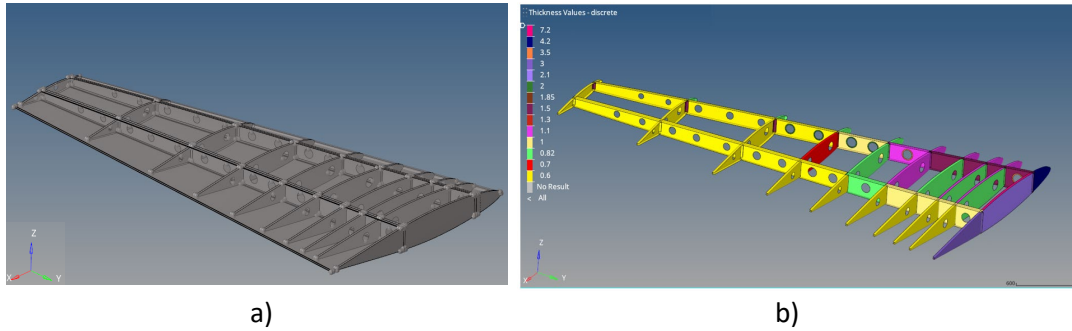
3.3. Alüminyum ve kompozit kanat karşılaştırılması

Uçak kanadı ilk tasarımı, alüminyum 7050 ve HexplyAS4/8552 kompozit malzeme için yapılan tasarımların karşılaştırılması Çizelge 13’de gösterilmiştir. HexplyAS4/8552 kompozit malzeme hafiflik açısından ön plana çıkmaktadır, ilk tasarımın %30.21’lik ağırlığına sahiptir. Ancak kompozit malzemelerin üretilmesi sırasında katman serimi uzun süre almaktadır, zaman ve maliyet açısından olumsuz etkiye sahiptir. Alüminyum 7050 malzeme ilk tasarımın %81.9’luk kısmını karşılamaktadır, daha ağır olmasına rağmen havacılık sektöründeki ağırlık standartlarını karşılamaktadır, malzeme ulaşılabilirliği ve maliyet açısından değerlendirildiğinde ön plana çıkmaktadır.

Çizelge 13. İlk tasarım ve son tasarımlar arasındaki karşılaştırma

Parametre	İlk tasarım	Alüminyum 7050 Son Tasarım	Kompozit Malzeme Son Tasarım
Ağırlık (kg)	96	78.67	29.01
(%)		81.9	30.21

Bu çalışma kapsamında elde edilen nihai geometri Şekil 20.a’da, nihai kanat geometrisi kalınlık haritası Şekil 20.b’de gösterilmiştir. Kompozit malzeme ile tasarımda ise gerekli mukavemet sağlandığından lamina artışına gerek duyulmamıştır.



Şekil 20. a) Nihai tasarım geometrisi, b) Nihai alüminyum kanat tasarımının kalınlık haritası gösterimi.

4. Sonuç

Bu çalışma kapsamında bir uçak kanadı tasarımı yapılmış, kanat profili seçiminden nihai tasarıma kadar olan süreçteki adımlar incelenmiştir. Yapısal performansı artırmak ve yapısal bütünlüğün tasarım kriterlerini karşılaması amaçlanmaktadır. Topoloji optimizasyonu ile yapılacak geometrik değişimlerin parça ağırlığını azaltma yönünde etkisi ortaya konulmuştur. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile uçak kanadında bağlayıcılar üzerine gelen yükler düz uçuş manevra hareketi olmama durumu için hesaplanarak emniyet durumları belirlenmiştir, fizibilitesi ortaya konulmuştur. Sonuçlar, optimize edilmiş alüminyum 7050 ve HexplyAS4/8552 kompozit malzemelerin mukavemet özelliklerini sağladıklarını göstermektedir. Uçak kanadının uçuş esnasında maruz kalacağı yükler dikkate alındığında uygulama açısından alüminyum 7050 malzeme kullanımı daha uygundur. Alüminyum 7050 malzemesinin hammadde ve imalat aşamasında maliyeti daha düşüktür ve ulaşılabilir bir malzemedir. HexplyAS4/8552 kompozit malzemeler istenilen emniyet koşullarını sağlamasına rağmen, kompozit malzemelerin serimli üretimi işçilik, zaman, maliyet açısından değerlendirildiğinde tercih edilmemiştir.

Teşekkür

Yazarlar, çalışmayı destekleyen TUSAŞ firmasına teşekkür eder.

Not: Bu çalışmada, yazarı Hasan Korkut olan “Uçak Kanadı Tasarımı, Analizi ve Yapı Elemanlarının Topoloji Optimizasyonu” başlıklı yüksek lisans tezinden elde edilen veriler kullanılmıştır.

Kaynakça

- Abbas, Y., Elsonni, T., Abdulmajid, A.A., Khalafallah, A., & Alnazir, M. (2021). Structural analysis of a transport aircraft wing. *Incas Bulletin*, 13(1), 3-9. doi:10.13111/2066-8201.2021.13.1.1
- Aftab, S. G., Sirajuddin, Sreedhara, B., Ganesh, E., Babu, N. R., & Aithal, S. K. (2022). Finite element analysis of a passenger aircraft landing gear for structural and fatigue safety. *Materials Today: Proceedings*, 54 (2), 152-158. doi:10.1016/j.matpr.2021.08.199
- Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T., & Mazurek, D. F. (2012). *Mechanics of Materials*. NY, USA: MacGraw Hill.
- Bruhn, E. (1973). *Analysis and Design of Flight Vehicles Structures*. Tri-State Offset Company.
- Budynas, R., & Nisbett, J. (2008). *Shigley's Mechanical Engineering Design*. NY, USA: MacGraw Hill.
- Crews, J. H., & Naik, R. A. (1987). *Bearing-Bypass Loading on Bolted Composite Joints*. NASA Technical Memorandum 89153, NASA-TM-89.
- FAA Part 23. (2023). *PART 23 – Airworthiness Standards: Normal, Utility, Acrobatic and Commuter Category Airplanes*. Federal Aviation Administration.
- Kassapoglou, C. (2010). *Design and Analysis of Composite Structures With Applications to Aerospace Structures*. John Wiley & Sons. doi:10.1002/9781118536933
- Kaw, A. (2005). *Mechanics of Composite Materials*. CRC Press.
- Liu, H., Zhou, D., Shen, B., & Ding, Y. (2021). Lightweight design of solar uav wing structures based on sandwich equivalent theory. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2021, 1-12. doi:10.1155/2021/6752410
- Madier, D. (2021). *Practical Finite Element Analysis for Mechanical Engineers*. FEA Academy.
- Niu, M. C. (1989). *Airframe Structural Design*. Conmilit Press Ltd.
- Niu, M. C. (1999). *Airframe Stress Analysis And Sizing*. Conmilit Press Ltd.
- Rozvany, G. I., Zhou, M., & Birker, T. (1992). Generalized shape optimization without homogenization. *Structural optimization*, 4(3), 250-252. doi:10.1007/BF01742754
- Sadraey, M. (2012). *Aircraft Design: A System Engineering Approach*. John Wiley & Sons, Ltd.
- Zhou, M., & Rozvany, G. I. (1991). The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89(1-3), 309-336. doi:10.1016/0045-7825(91)90046-9