2000 Gazi Üniversitesi Endüstriyel Sanatlar Eğitim Fakültesi Dergisi, Y.8,S.8, S.29-36

GENELLEŞTİRİLMİŞ LOTOTSKY DÖNÜŞÜMÜ İLE SÜREKLİ FONKSİYONLARA YAKLAŞIM

Mine AKTAŞ *

Özet

Bu makalede, $f \in C[a,b]$ *olmak üzere Genelleştirilmiş Lototsky dönüşümünün sürekli fonksiyonlara yaklaşımı verilmiştir ve* $f \in C[0,1]$ *olmak üzere iki değişkenli Genelleştirilmiş Lototsky dönüşümü ile sürekli fonksiyonlara yaklaşımı verilmiştir.*

Anahtar Kelimeler : *Lototsky, dönüşüm, sürekli, fonksiyon, Bernstein.*

APPROXIMATION TO CONTINUOUS FUNCTIONS BY GENERALIZATION LOTOTSKY TRANSFORMATION

Abstract

In this paper, we give the approximation of the Generalization Lototsky transformation to a continuous function where $f \in C[a,b]$ *and we give the approximation of the Generalization Lototsky transformation with two variable to a continuous function where* $f \in C[0,1]$.

Key Words : *Lototsky, transformation, continuous, function, Bernstein.*

1.GİRİŞ:

$[0,1]$de tanımlı f fonksiyonu ile birlikte

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{1}$$

Bernstein polinomu son zamanlarda en çok araştırılan konudur. Cheney (1963, Gergen (1963), Jakimovski (1959) de Bernstein polinomunun genelleştirilmesi üzerinde çalışmışlardır. Genelleştirilmiş Lototsky veya $[F,d_n]$ matrisine Jakimovski (1959) çalışmaların da çok geniş yer vermiştir. Bu matrisin a_{nk} elemanları

$$a_{00} = 1 \ , \ a_{0k} = 0 \ \ k \neq 0$$

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{y + d_i}{1 + d_i} = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} y^k \tag{2}$$

ile tanımlıdır, burada $\{d_i\}$, $d_i \neq -1$ $(i = 1,2,...)$ olacak şekildeki kompleks sayıların bir dizisidir.

* Yrd.Doç.Dr.Gazi Üniversitesi End. Sanatlar Eğt. Fak. Bilgisayar Eğitimi Böl.

$$h_i = 1/(1+d_i)$$

alınırsa (2) denklemi

$$\prod_{i=1}^{n}(hy+1-h) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} y^k \qquad (3)$$

olur. $\{h_i(x)\}$, $[0,1]$ de tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. $a_{nk}=a_{nk}(x)$, $\{h_i(x)\}$ dizisine göre (3) ile verilen Lototsky matrisinin elemanları olsun. $[0,1]$de tanımlı her f için Lototsky dönüşümü

$$L_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f(k/n)\, a_{nk}(x) \qquad (4)$$

olsun. Kolayca gösterilebilir ki $h_i(x)=x$ $(i=1,2,\ldots)$ ise $L_n(f;x)=B_n(f;x)$ dir.

1. $a_{0k}=1$, $a_{0k}=0$ $(k\neq 0)$

$$\prod_{i=1}^{n}\left[y(h_i-a)+b-h_i\right] = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}y^k \qquad (5)$$

olmak üzere $f\in C[a,b]$ için Genelleştirilmiş Lototsky dönüşümünü

$$L_n(f;x)=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)a_{nk}(x)$$

şeklinde tanımlayalım. $x\in[a,b]$ olmak üzere $h_i(x)=x$ ise $L_n(f;x)=B_n(f;x)$ dir.

Korovkin Teoremi: Eğer L_n Lineer pozitif oparatörler dizisi $[a,b]$ aralığında

$$L_n(1;x)\Rightarrow 1$$
$$L_n(t;x)\Rightarrow x$$
$$L_n(t^2;x)\Rightarrow x^2$$

koşullarını gerçekliyor ise bu durumda $C(a,b)$ uzayında olan ve tüm reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için

$$L_n(t;x)\Rightarrow f(x),\quad n\to\infty \quad (a\le x\le b)$$

dir (Korovkin, 1980).

Teorem 1. $f\in C[a,b]$ olsun. $\{S_n(x)\}$, $\{h_i(x)\}$ dizisinin $(C,1)$ dönüşümünü, $\{t_i(x)\},\{h_i^2(x)\}$ dizisinin $(C,1)$ dönüşümünü tanımlasın. $0\le h_i(x)\le 1$ $(i=1,2,\ldots)$ ve $S_n(x)\Rightarrow x$ ise

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f;x)=f(x)$$

dir.

Burada "$\Rightarrow$" düzgün yakınsamayı göstermektedir.

İspat. Korovkin teoreminin koşullarını gerçekleyelim.

$$L_n(1;x)=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{n} a_{nk}(x)$$

(5) de $y=1$ alınırsa

$$\prod_{i=1}^{n}\left[h_i-a+b-h_i\right]=\sum_{k=0}^{n} a_{nk}$$

olur. Burada

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk}=(b-a)^n$$

olduğundan

$$L_n(1;x)=1 \text{ ve } L_n(1,x)\Rightarrow 1$$

bulunur.

$$L_n(t;x)=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)a_{nk}(x)$$

$$P_n=\prod_{i=1}^{n}\left[(h_i-a)y+b-h_i\right] \qquad (6)$$

ve

$$r_i(x,y)=\frac{h_i-a}{(h_i-a)+b-h_i} \qquad (7)$$

olsun. (6) ve (7) den

$$P_n'=\sum_{i=1}^{n} r_i(x,y)\,P_n \qquad (8)$$

bulunur.

$$P_n'=\sum_{i=1}^{n} ka_{nk}(x)\,y^{k-1} \qquad (9)$$

(8) ve (9) dan $y=1$ için

$$\sum_{k=0}^{n} ka_{nk}(x)=\frac{(b-a)^n}{(b-a)}\sum_{i=1}^{n}(h_i-a)$$

çıkar. O halde

$$L_n(t;x)=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)a_{nk}(x)$$

$$=a+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(h_k-a)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}h_k(x)=S_n(x)$$

olur. $S_n(x)\Rightarrow x$ olduğundan $L_n(t,x)\Rightarrow x$ dir.

$$L_n(t^2;x)=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)^2 a_{nk}(x)$$

olsun.

$$P_n'=\sum_{i=1}^{n} r_i(x,y)P_n$$

olduğundan

$$P'' = \left\{ \left[\sum_{i=1}^{n} r_i(x,y) \right]^2 - \sum_{i=1}^{n} r_i^2(x,y) \right\} P_n$$

bulunur. Burada $y = 1$ alınırsa ve gerekli işlemler yapılırsa

$$P_n'' = \left\{ \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(b-a)}(h_i - a) \right]^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(b-a)^2}(h_i - a)^2 \right\} (b-a)^n \quad (10)$$

$$P_n'' = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_{nk} \quad (11)$$

olur. (10) ve (11) den

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 a_{nk} = \frac{(b-a)^n}{(b-a)^2} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{n} (h_i - a) \right]^2 - \sum_{i=1}^{n} (h_i - a)^2 \right\} + \sum_{k=0}^{n} k a_{nk}$$

çıkar. O halde

$$L_n(t^2; x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \left(a + \frac{k}{n}(b-a) \right)^2 a_{nk}(x)$$

$$= a^2 + \frac{2a}{n} \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} k(b-a)a_{nk}(x) + \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2}(b-a)^2 a_{nk}(x)$$

$$= a^2 + \frac{2a}{(b-a)^n} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k(b-a)a_{nk}(x) + \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^{n} (h_i - a) \right]^2$$

$$- \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (h_i - a)^2 + \frac{(b-a)^2}{(b-a)^n} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k a_{nk}(x)$$

$$= S_n^2(x) - \frac{1}{n} t_n(x) + \frac{2a}{n} S_n(x) - \frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)}{n} S_n(x)$$

$0 \le h_i(x) \le 1$ olduğundan $t_n(x) = O(1)$ dir.

Bu da

$$L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$$

denktir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

2. $a_{00} = 1, a_{0k} = 0 \ (k \neq 0)$

$$\prod_{i=1}^{n} [hy + 1 - h] = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \, y^k$$

olmak üzere $f \in C[0,1]$ için Lototsky dönüşümü

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) a_{nk}(x) \quad (12)$$

ile tanımlanmıştı.

$$L_n(1; x) = 1 \quad (13)$$

$$L_n(t; x) = \sum_{k=0}^{n} (k/n) a_{nk}(x) = S_n(x) \quad (14)$$

$$L_n(t^2; x) = \sum_{k=0}^{n} (k/n)^2 a_{nk}(x)$$

$$= \frac{1}{n}[S_n(x) - t_n(x)] + S_n^2(x) \quad (15)$$

eşitliklerinin var olduğunu King (1966) de göstermiştir.

Tanım 1. Kabul edelim ki f, [a,b] de tanımlı, sınırlı bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in [a,b], \delta > 0$ için

$$W_f(\delta) = W(\delta) = \sup_{|x-y| \le \delta} |f(x) - f(y)|$$

fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun süreklilik modülü denir (Korovkin, 1980).

Teorem 2. $f \in C[0,1]$ olsun. Teorem 1 in hipotezleri var ise,

$$\lambda_n = \max_{0 \le x \le 1} \left[\frac{1}{n}(S_n(x) - t_n(x)) + (S_n(x) - x)^2 \right]^{1/2}$$ olmak üzere

$$|L_n(f; x) - f(x)| \le 2W(\lambda_n)$$

dir.

İspat.

$$L_n(f; x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} [f(k/n) - f(x)] a_{nk}(x)$$

$$|L_n(f; x) - f(x)| \le \sum_{k=0}^{n} |f(k/n) - f(x)| a_{nk}(x)$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \sup_{|k/n - x| \le \delta} |f(k/n) - f(x)| a_{nk}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} w\left(\left| \frac{k}{n} - x \right| \right) a_{nk}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} w\left(\frac{\left| \frac{k}{n} - x \right|}{\lambda_n} \lambda_n \right) a_{nk}(x)$$

$$\le w(\lambda_n) \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\left| \frac{k}{n} - x \right|}{\lambda_n} + 1 \right) a_{nk}(x)$$

$$= w(\lambda_n) \left[\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{k}{n} - x \right| a_{nk}(x) + 1 \right]$$

Parantez içindeki ifadeye Cauchy eşitsizliği uygulanırsa (13), (14) ve (15) den

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|a_{nk}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|\left(a_{nk}(x)\right)^{1/2}\left(a_{nk}(x)\right)^{1/2}$$

$$\leq\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^{2}a_{nk}(x)\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n}a_{nk}(x)\right)^{1/2}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^{2}a_{nk}(x)\right)^{1/2}$$

$$=\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2}a_{nk}(x)-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}a_{nk}(x)+x^{2}\sum_{k=0}^{n}a_{nk}(x)\right]^{1/2}$$

$$=\left[L_n(t^2;x)-2xL_n(t;x)+x^2\right]^{1/2}$$

$$=\left[\frac{1}{n}\left(S_n(x)-t_n(x)\right)+S_n^2(x)-2xS_n(x)+x^2\right]^{1/2}$$

elde edilir. Buradan

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\leq w(\lambda_n)$$

$$\left\{\frac{1}{\lambda_n}\left[\frac{1}{n}\left(S_n(x)-t_n(x)\right)+S_n^2(x)-2xS_n(x)+x^2\right]^{1/2}+1\right\}$$

çıkar.

$$\lambda_n=\max_{0\leq x\leq 1}\left[\frac{1}{n}\left(S_n(x)-t_n(x)\right)+\left(S_n(x)-x\right)^2\right]^{1/2}$$

olduğundan

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\leq 2w(\lambda_n)$$

bulunur.

Korovkin teoremi:

$A_n(f(t,\tau);x,y)$, iki değişkenli fonksiyonu iki değişkenli fonksiyona dönüştürsün. Eğer $f\in\mathbf{C}(a,b;c,d)$, f tüm düzlemde sınırlı ve

$$A_n(1;x,y)\Rightarrow 1$$

$$A_n(t;x,y)\Rightarrow x$$

$$A_n(\tau;x,y)\Rightarrow y$$

$$A_n(t^2+\tau^2;x,y)\Rightarrow x^2+y^2$$

ise keyfi sınırlı $\forall f$ için

$$A_n(f;x,y)\Rightarrow f(x,y)$$

dir (Korovkin, 1980).

3. $f\in C[0,1;0,1]$ olsun. $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ olmak üzere iki değişkenli Lototsky dönüşümünü

$$\left(L_{nm}f\right)(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{t=0}^{m}f\left(\frac{k}{n},\frac{t}{m}\right)a_{nk}(x)\,a_{mt}(y)\qquad(16)$$

ile tanımlayalım. Bu tanımı kullanarak aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3. $f\in C[0,1;0,1]$ olsun. $\left(L_{nm}f\right)(x,y)$ (16) da ki gibi tanımlı olsun ve teorem 1 in hipotezleri $S_i(x)$, $S_i(y)$ için gerçeklensin. Bu takdirde

$$\lim_{n\to\infty}\left(L_{nm}f\right)(x,y)=f(x,y)$$

dır.

İspat.

$$\left(L_{nm}1\right)(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{t=0}^{m}a_{nk}(x)a_{mt}(y)$$

$$\left(L_{nm}1\right)(x,y)=1$$

dir.

$$\left(L_{nm}t_1\right)(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{t=0}^{m}\frac{k}{n}a_{nk}(x)a_{mt}(y)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}a_{nk}(x)$$

olsun. (14) den

$$\left(L_{nm}t_1\right)(x,y)=S_n(x)$$

çıkar.

$$\left(L_{nm}t_2\right)(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{t=0}^{m}\frac{t}{m}a_{nk}(x)a_{mt}(y)$$

$$=\sum_{t=0}^{m}\frac{t}{m}a_{mt}(y)$$

(14) den

$$\left(L_{nm}t_2\right)(x,y)=S_m(x)$$

elde edilir.

(14) ve (15) den

$$\left(L_{nm}\left(t_1^{\,2}+t_2^{\,2}\right)\right)(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{t=0}^{m}\left(\frac{k^2}{n^2}+\frac{t^2}{m^2}\right)a_{nk}(x)a_{mt}(y)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{t=0}^{m}\frac{k^2}{n^2}a_{nk}(x)a_{mt}(y)+\sum_{k=0}^{n}\sum_{t=0}^{m}\frac{t^2}{m^2}a_{nk}(x)a_{mt}(y)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}a_{nk}(x)+\sum_{t=0}^{m}\frac{t^2}{m^2}a_{mt}(y)$$

$$=\frac{1}{n}\left\{S_n(x)-t_n(x)\right\}+S_n^2(x)+\frac{1}{m}\left\{S_m(y)-t_m(y)\right\}+S_m^2(y)$$

bulunur. $0 \le h_i(x) \le 1$ olduğundan $t_i(x) = O(1)$ dir. Sonuç olarak

$$(L_{nm}1)(x,y) \Rightarrow 1$$
$$(L_{nm}t_1)(x,y) \Rightarrow x$$
$$(L_{nm}t_2)(x,y) \Rightarrow y$$
$$\left(L_{nm}\left(t_1^2 + t_2^2\right)\right)(x,y) \Rightarrow x^2 + y^2$$

elde edilir. Korovkin teoreminin koşulları gerçeklendiğinden yakınsama mevcuttur.
Yani $\lim_{n\to\infty} (L_{nm}f)(x,y) = f(x,y)$ dir.

KAYNAKLAR

Cheney, E.W., And Sharma, A., "Bernstein power Series", *Can. J. Math*, 16,241-252, 1963.

Gergen, J.J., Dressel, F.G., And Purcell, W.H., "Convergence of Extended Bernstein Polynomials in the Complex Plane", *Pacific J.Math.*, 13, 1171-1180, 1963.

Jakımovskı, A., "A Generalization of the Lototsky Method of Summability", *Michigan Math. J.*, 277-290, 1959.

Kıng, J.P., "The Lototsky Transform and Bernstein Polynomials", *Canadian Journal of Math*, 18, 1, 89-91, 1966.

Korovkın, P.P., *Linear Operators and Appraximation Theory*, Delhi, 1980.