Trakya Eğitim Dergisi
Cilt 13, Sayı 3
Eylül 2023, 1893-1907

Geliş Tarihi: 23.02.2023

ISSN: 2630-6301
Doi: 10.24315/tred.1255708
Araştırma Makalesi/
Research Article

Trakya Journal of Education
Volume 13, Issue 3
September 2023, 1893-1907

Yayına Kabul Tarihi:31.05.2023

TÜRKİYE'DEKİ 9. SINIF MATEMATİK DERS KİTAPLARINDAKİ AKSİYOMATİK SİSTEMİN BİLEŞENLERİNİN İNCELENMESİ

INVESTIGATION OF COMPONENTS OF THE AXIOMATIC SYSTEM IN 9th GRADE MATHEMATICS TEXTBOOKS IN TÜRKİYE

Fikret CİHAN[1]

ÖZ: İspatlama sürecinde, matematiksel ve mantıksal argümanlar kullanılarak, geçerli ve resmi bir ispata ulaşılana kadar atılan her adımda aksiyomatik sistemin bileşenlerinden faydalanılmaktadır. Aksiyomatik sistemde tanımsız terimler, tanımlı terimler, tanımlar, postulatlar, aksiyomlar ve lemmalar ispatlarda (veya çürütmelerde) kullanılarak teoremler (veya yanlış önermeler) ile bunların sonuçları elde edilir. Bu çalışmanın amacı Türkiye'deki 9. sınıf matematik ders kitaplarında aksiyomatik sistemin bileşenlerinden hangilerine nasıl yer verildiğini incelemektir. Bu araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden doküman analizi yöntemi tercih edilmiştir. Örneklem ise amaçlı örnekleme tekniklerinden biri olan ölçüt örnekleme tekniği ile belirlenmiştir. Araştırmanın verileri 2022-2023 eğitim-öğretim yılında 9. sınıf ortaöğretim matematik derslerinde okutulması kararlaştırılan üç ders kitabından toplanmıştır. Ders kitaplarından ulaşılan veriler betimsel analize tabi tutulmuştur. Elde edilen bulgular tablolaştırılmış ve birebir alıntılarla desteklenmiştir. Araştırmanın sonuçlarına göre ders kitaplarında aksiyomatik sistemin bileşenlerinden bazılarının tanımlarına yer verilirken bazı bileşenlerin ders kitaplarında hiç geçmediği görülmektedir. Bazı bileşenler de tanımlarına yer verilmeden kitap metinlerinde geçmektedir. Araştırmanın sonuçları doğrultusunda matematik ders kitaplarında aksiyomatik sistemin tüm bileşenlerinin eksiksiz olarak aksiyomatik yapıya ve hiyerarşik kavram yapısına uygun olarak tanıtılması önerilebilir.

Anahtar sözcükler: Akıl yürütme, aksiyomatik sistem, ispat, ispat öğretimi, matematik ders kitapları.

ABSTRACT: In the proving process, components of the axiomatic system are utilized in every stage until a valid and formal proof is reached by using mathematical and logical arguments. In the axiomatic system, undefined terms, defined terms, definitions, postulates, axioms, and lemmas are used in proofs (or disproof) to obtain theorems (or false propositions) and their corollaries. The purpose of this study is to investigate how and which components of the axiomatic system are included in 9th grade mathematics textbooks in Türkiye. In this study, the document analysis method, one of the qualitative research methods, was preferred. The sampling of the research was determined by the criterion sampling method, which is one of the purposive sampling techniques. The data of the study were collected from three textbooks that were decided to be taught in the 9th grade upper secondary school mathematics courses in the 2022-2023 academic year. The data obtained from the textbooks were subjected to descriptive analysis. Findings were tabulated and supported with one-to-one quotations. According to the results of the research, while the definitions of some of the components of the axiomatic system are included in the textbooks, it is seen that some components are never mentioned in the textbooks. Some components are also mentioned in the texts of the books without their definitions. In line with the results of the study, it can be suggested that all the components of the axiomatic system should be introduced completely in the mathematics textbooks in accordance with the axiomatic structure and hierarchical concept structure.

Keywords: Reasoning, axiomatic system, proof, proof teaching, mathematics textbooks.

Bu makaleye atıf vermek için:
Cihan, F. (2023). Türkiye'deki 9. sınıf matematik ders kitaplarındaki aksiyomatik sistemin bileşenlerinin incelenmesi, *Trakya Eğitim Dergisi, 13*(3), 1893-1907.
Cite this article as:
Cihan, F. (2023). Investigation of components of the axiomatic system in 9th grade mathematics textbooks in Türkiye. *Trakya Journal of Education, 13*(3), 1893-1907.

[1] Öğr. Gör. Dr., Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli/TÜRKİYE, e mail: fikret.cihan@klu.edu.tr, ORCID: 0000 0001 8783 4136

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

Mathematicians try to reach the truth and reality with the axiomatic method (Beck & Geoghegan, 2010). In the proving process, the components of the axiomatic system are used in every step taken until a formal proof is reached with valid arguments. In the axiomatic system, undefined terms, defined terms, definitions, postulates, axioms, and lemmas are used in proofs (or disproof) to obtain theorems (or false propositions) and their corollaries. Propositions whose truth cannot be proven or disproved take their place in the system as conjecture until they are proven or disproved (Taylor & Garnier, 2014). This is how the axiomatic structure of modern mathematics progresses (Rossi, 2006). With this viewpoint, it can be said that the components of the axiomatic system are undefined terms, defined terms, definitions, axioms, postulates, lemmas, propositions, proofs, provings, disproofs, theorems, false propositions, conjectures, and corollaries (Campbell, 2012; Cihan, 2019; Garnier & Taylor, 2009; Roberts, 2015; Rossi, 2006). The axiomatic system and its compounds that constitute the conceptual framework of this research have been examined in detail in several studies in the field of mathematics (Campbell, 2012; Gossett, 2009; Hammack, 2013; Hale, 2003; Krantz, 2011; Plumpton, Perry, & Shipton, 1984; Roberts, 2015; Rossi, 2006; Stefanowicz, 2014; Sundstrom, 2014; Taylor & Garnier, 2014) and mathematics education (Can & Clark, 2020; Cihan, 2019; Dede, 2013).

Including these components together with their definitions in textbooks, which are an important source of teaching, can serve many pedagogical purposes in effective proof teaching. It is required to define the necessary and sufficient properties of these components economically, taking into account the definition criteria, that is, in accordance with the axiomatic structure and hierarchical conceptual structure (Çakıroğlu, 2013). Considering all these aspects, it can be thought that studies on which and how these components are included in the textbooks in terms of mathematics education are valuable. The results of studies examining the place of proof activities in upper secondary school mathematics textbooks in Türkiye revealed that proof activities are not included enough in textbooks (Doğan, 2019; Karakuş & Korkutan, 2021; Zeybek, Üstün, & Birol, 2018). There are also studies in the literature in which the mathematics and geometry textbooks of various countries in abroad are examined in the context of reasoning, proof, and proving (Bieda, Ji, Drwencke, & Picard, 2014; Fujita & Jones, 2014; McCrory & Stylianides, 2014; Otten, Gilbertson, Males, & Clark, 2014; Otten, Males, & Gilbertson, 2014; Stylianides, 2009, 2014; Thompson, Senk, & Johnson, 2012). However, the study examining the components of the axiomatic system in the textbooks in Türkiye was not been found in the literature. In Türkiye, these components are included in the 9th grade mathematics curriculum (Ministry of National Education [MoNE], 2018a, 2018b), hence in the 9th grade textbooks (Ayık, 2021; Gökbaş, Kaleci, Mutluoğlu, & Ballı, 2022; Ulualan, 2021). Because of all these reasons, this study aims to find out which axiomatic system components have been included in the 9th grade mathematics textbooks in Türkiye and how they have been included.

Method

In this study, the document analysis method, one of the qualitative research methods, was preferred. The sampling of the research was determined by the criterion sampling method, which is one of the purposive sampling techniques. In the criterion sampling method, all cases that provide a set of criteria determined for the research are included in the research (Patton, 2014; Yıldırım & Şimşek, 2016). The data of this research were collected through documents, which is one of the qualitative data collection tools. Since the necessary components for the axiomatic system are included in the 9th grade "Numbers and Algebra" learning domain "Logic" sub-learning domain in the current high school mathematics curriculum (MoNE, 2018a, 2018b), three 9th grade upper secondary mathematics textbooks (Ayık, 2021; Gökbaş et al., 2022; Ulualan, 2021) were analyzed in this study. The data obtained from the textbooks were subjected to descriptive analysis. Findings were tabulated and supported with one-to-one quotations.

Findings

It is seen that the definitions of the concepts of *definition*, *axiom*, *proposition*, and *theorem*, which are components of the axiomatic system, are included in all three textbooks (Ayık, 2021; Gökbaş et al., 2022; Ulualan, 2021). While the definitions of the *undefined term* and *defined term* concepts are included in two textbooks (Ayık, 2021; Ulualan, 2021), it is seen that these concepts are not mentioned in the other textbook (Gökbaş et al., 2022). While the definition of the concept of *proof* is given in two textbooks (Ayık, 2021; Ulualan, 2021), this concept is mentioned many times in the other book without its definition (Gökbaş et al., 2022). Similarly, while the definition of the concept of *proving* is given in two books (Ayık, 2021; Gökbaş et al., 2022), this concept is mentioned without its definition in the other book (Ulualan, 2021). The definitions of *false proposition* and *corollary* concepts are not included, but these concepts are mentioned in all three textbooks (Ayık, 2021; Gökbaş et al., 2022; Ulualan, 2021). The concept of *postulate* is mentioned only in one textbook (Ayık, 2021). Again, the concept of *conjecture*, whose definition is not included in all three books, is mentioned in two textbooks (Gökbaş et al., 2022; Ulualan, 2021). The concepts of *lemma* and *disproof* have not been mentioned at all in any of the three textbooks.

Discussion and Conclusion

According to the results of this study, it is seen that while the definitions of some of the components of the axiomatic system are included in the textbooks, the definitions of some are not included. In line with the this results of the study, it can be suggested that all the components of the axiomatic system should be introduced completely in accordance with the axiomatic structure and hierarchical concept structure in the textbooks for the mathematics courses in which modern mathematics is taught.

It is seen that some concepts are used in textbooks without their definitions. It can be thought that such uses in textbooks may cause various learning difficulties in students. Therefore, it can be thought that avoiding such use of concepts in textbooks may be beneficial in overcoming some student difficulties related to proof.

GİRİŞ

Matematiksel ispatların bağlamı aksiyomatik matematiğin alanına girer (Gosset, 2009). İspatın daha iyi anlaşılabilmesi için modern matematiğin doğasının anlaşılması gerekmektedir (Garnier & Taylor, 2009). Modern matematik terimi tümdengelimli akıl yürütme ve mantıksal temellere dayanan aksiyomatik matematik sistemini ifade etmek için kullanılır (Rossi, 2006). Aksiyomatik yaklaşımda ilk kavramların doğruluğu varsayılır ve geri kalan her şeye belli bir sistem içerisinde matematik ve mantık kuralları aracılığıyla ulaşılır (Gossett, 2009). Aksiyomatik sistemin önemli bir özelliği; teoremlerin ispatlandıkça sonraki ispatlarda kullanılabilecek yeni gerçekler ve sonuçlar haline gelmeleridir (Barker-Plummer, Barwise, Etchemendy, Liu, Murray & Pease, 2011). Matematiksel teoremler, ispatlar ve sonuçlar hiçbir zaman tek başlarına değil her zaman bir aksiyomatik sistem bağlamında ortaya çıkmaktadırlar (Lay, 2014). Bu şekilde sistematikleştirmeye yani aksiyomatikleştirmeye yönelik uygulanan bu genel prosedür aksiyomatik yöntem olarak adlandırılmaktadır (Barker-Plummer vd., 2011).

Matematikçiler doğruya ve gerçeğe aksiyomatik yöntemle ulaşmaya çalışırlar (Beck & Geoghegan, 2010). Matematikte aksiyomatik yaklaşımın ilk genişletilmiş örneğine Yunan matematikçi Öklid'in "Öğeler" (Euclid, 2013) adlı eserinde rastlanmaktadır (Feil & Krone, 2003). Bu eser "aksiyomatik yönteme dayalı bir matematiksel sistemin ilk ve en ünlü örneğidir" (Hale, 2003, s. 23). Milattan önce 300 dolaylarında yaşayan Öklid sadece 23 tanım, 5 postulat ve 5 aksiyomla başlayarak tümdengelimli akıl yürütme ile Öklid geometrisini sistematik olarak inşa etmiştir (Nicholson, 2019; Roberts, 2015). Öklid'in bu kadar az kabulden o kadar çok matematiğe ulaşması hayret verici bulunmuştur (Feil & Krone, 2003; Nicholson, 2019). Zaten ideal olan aksiyomların sayıca az olması, birbirleriyle tutarlı olması ve sistem için yeterli ve eksiksiz olmasıdır (Hale, 2003). Birbirleriyle tutarlı olduğu sürece küçük bir aksiyom setinden ileri düzeyde matematik çıkarsanabilir (Beck & Geoghegan, 2010). Aksiyomatik sistemde var olan tüm çıkarımlar doğrudan seçilen aksiyom setine bağlıdır (Gossett, 2009). Eğer aksiyomlar tutarsızsa ve birbirleriyle çelişiyorsa onlardan türeyen teorilerde çökecektir (Taylor & Garnier, 2014). Tabii ki bunun tersi de geçerlidir. Çünkü aksiyomatik sistem tüm bileşenleriyle anlamlı bir bütündür.

İspatlama sürecinde, formal bir ispata geçerli argümanlarla ulaşılana kadar atılan her adımda aksiyomatik sistemin bileşenlerinden yararlanılmaktadır. Aksiyomatik sistemde tanımsız terimler, tanımlı terimler, tanımlar, postulatlar, aksiyomlar ve lemmalar ispatlarda (veya çürütmelerde) kullanılarak teoremler (veya yanlış önermeler) ile bunların sonuçları elde edilir. Doğruluğu ispatlanamayan veya çürütülemeyen önermeler ise doğruluğu ispatlanana veya çürütülene kadar varsayım olarak sistem içerisinde yerini alır (Taylor & Garnier, 2014). Modern matematiğin aksiyomatik yapısı bu şekilde ilerlemektedir (Rossi, 2006). Buradan hareketle aksiyomatik sistemin bileşenlerinin tanımsız terimler, tanımlı terimler, tanımlar, aksiyomlar, postulatlar, lemmalar, önermeler, ispatlar, ispatlamalar, çürütmeler, teoremler, yanlış önermeler, varsayımlar ve sonuçlar olduğu söylenebilir (Campbell, 2012; Cihan, 2019; Garnier & Taylor, 2009; Roberts, 2015; Rossi, 2006).

Her disiplinde olduğu gibi matematik terminolojisinin de kendine has terimleri vardır (Taylor & Garnier, 2014). Bu terimlerden bazıları tanımsız, bazıları tanımlı terimlerdir. Matematikte tüm terimler tanımlanmaya kalkılırsa kısır bir döngüye girmekten başka bir seçenek yoktur (Roberts, 2015). Her terim kendinden önceki terimlerle tanımlanır ancak sistem anlaşılır olacaksa bir başlangıcı olmalıdır (Hale, 2003). Nokta, doğru, düzlem gibi sezgisel olarak açık olan ve ilkel terimler de denilen tanımsız terimler aksiyomatik yöntemde başlangıç yeri olarak güvenle kullanılabilirler (Gossett, 2009; Hale, 2003). Aksiyomatik yöntemde matematikçiler sisteme tanımsız terimlerle başlarlar ancak onlara sahip olmak tek başına yeterli değildir (Gossett, 2009). Aksiyomatik sistemde önceden ispatlanmış teoremler, yeni ispatlamalarda kullanılabilir ve aksiyomlara atıfta bulunulabilir (Stefanowicz, 2014). Diğer bir deyişle aksiyomatik sistemde çalışmaya kısa bir tanım ve aksiyom listesi ile başlanılır (Krantz, 2011).

Terimlerin anlamlarına ilişkin anlaşmalar olan tanımlar rastgele değil, terimlerin özellikleri dikkate alınarak yapılırlar ve çoğu ispatlamada bazı tanımların kullanılması gerekebilir (Sundstrom, 2014). Matematiksel tanım, matematiksel bir terim veya kavramın matematik camiasında genel kabul görmüş, kesin ve yerleşik anlamıdır (Campbell, 2012; Rossi, 2006). Eserinde öncelikle tanımlara yer veren Öklid doğru olduğunu kabul ettiği ifadeleri nedenini açıklamasa da postulatlar ve aksiyomlar olmak üzere ikiye ayırmıştır (Roberts, 2015). İspatına gerek duyulmayan bu ifadelerden bazılarının daha genel veya daha açık olduğunu düşünmüş olabilir (Roberts, 2015). Öklid'ten sonra da bu ayrımı sürdüren matematikçiler olduğu gibi bu kavramları eşdeğer kabul edip birbirinin yerine kullanan matematikçiler de olmuştur (Gossett, 2009). Ayrıca postulat ve aksiyomların doğasına ve yapısına ilişkin modern görüş bazı yönleriyle yine Öklid'ten farklılaşmıştır (Garnier & Taylor, 2009). Bir aksiyomatik sistemde kabul edilen postulat ve aksiyomların mantıksal sonucu olan ispatlanmış teoremler ve sonuçlar da doğal olarak geçerli olurlar (Plumpton, Perry & Shipton, 1984). Aksiyomların ve postulatların dışında lemmalar da aksiyomatik sistem içindeki ispatlamalarda kullanılabilirler. Birincil işlevi başka önermeleri ispatlamaya yardımcı olmak olan teoremlere lemma denir (Hammack, 2013; Nicholson, 2019). Lemmalar bir teoremi ispatlamak için kullanılırken sonuçlar teoremin ispatını takip eder ve ispatlanan o teoremden basitçe elde edilirler (Taylor & Garnier, 2014). Doğruluğu başka bir teoremin doğal ve doğrudan sonucu olan ve kolayca ispatlanabilen teoremlere sonuç denir (Gossett, 2009; Sundstrom, 2014). Postulatlar, aksiyomlar, lemmalar ve sonuçların daima doğru olması gerekir ancak bilindiği üzere önermeler için durum böyle değildir. Bunlardan bu yönüyle farklı olarak doğru veya yanlışlığı kesin olan, hem doğru hem yanlış olmayan bildirim cümlelerine önerme denir (Hale, 2003). Yani bir önerme ya doğru bir önermedir ya yanlış bir önermedir ya da doğru ya da yanlışlığı henüz ispatlanamamış bir önermedir. Eğer önerme doğruysa ve doğruluğu da matematiksel ve mantıksal argümanlar kullanılarak ispatlanmışsa bu önermelere teorem denir (Campbell, 2012; Hammack, 2013; Rossi, 2006; Nicholson, 2019). Benzer şekilde önerme yanlış ise ve yanlışlığı ispatlanmış yani doğruluğu çürütülmüşse bu önermelere yanlış önerme denir. Bu ikisinden farklı olarak Kurt Gödel "herhangi bir aksiyomatik matematiksel sistemde ispatlanamayan veya çürütülemeyen önermeler olduğunu ispatlamıştır" (Hale, 2003, s. 25). Doğru olduğuna inanılan (Campbell, 2012; Nicholson, 2019) yani doğruluğu yönünde kuvvetli gerekçelendirmeler olan ancak doğruluğunun ispatı veya çürütülmesi henüz yapılamamış önermelere varsayım (kestirim-sanı) denir (Rossi, 2006; Taylor & Garnier, 2014). Bu çalışmanın kavramsal çerçevesini oluşturan aksiyomatik sistem ve bileşenleri, matematik (Campbell, 2012; Gossett, 2009; Hammack, 2013; Hale, 2003; Krantz, 2011; Plumpton vd., 1984; Roberts, 2015; Rossi, 2006; Stefanowicz, 2014; Sundstrom, 2014; Taylor & Garnier, 2014) ve matematik eğitimi alanındaki (Can & Clark, 2020; Cihan, 2019; Dede, 2013) pek çok kaynakta detaylı olarak incelenmiştir. Bu çalışmalarda aksiyomatik sistemler ve bileşenleri, aksiyomatik yapı içerisinde tanıtılıp, tanımlarına ve örneklerine yer verilmiştir.

Matematikçiler için bir önermenin doğruluğuna veya makul olduğuna inanmak asla yeterli değildir, muhakkak ispat gereklidir (Rossi, 2006). Çünkü matematiksel ispatlar kesin ve mutlaktırlar (Hammack, 2013; Rossi, 2006). Zaten aksiyomatik sistemlerin amacı da kesinleştirmektir (Bloch, 2011). Bunun için ispat retorik bir araç olarak kullanılır. İspat yapmanın asıl amacı bir şeyin doğru olduğundan emin olmak olsa da matematiğin anlaşılması açısından ispat yapmak pedagojik bir amaca da sahiptir (Bloch, 2011). Ancak ispat yapmak doğrusal olmayan bir süreç olduğundan ispat öğretimi zordur (Hale, 2003). Etkili matematik ve ispat öğretimi için öncelikle aksiyomatik sistemin bileşenlerinin öğretilmesi gereklidir. Aksiyom, postulat, lemma, önerme, teorem, çürütme ve ispat gibi kavramların ne olduğu öğretilmeden etkili matematik ve ispat öğretiminin amaçlanması beklenilemezdir. Bu kavramlara ait tanımlarının bilinmesi kavramsal bilgi için yeterli olmasa da gereklidir (Hiebert & Lefevre, 1986). Çünkü tek başına bu küçük bilgi parçaları zihinsel kavram ağlarıyla birbirlerine bağlanarak anlamlı bir bütün oluştururlar

(Hiebert & Carpenter, 1992). Dolayısıyla öğretimin önemli bir kaynağı olan ders kitaplarında da bu bileşenlere tanımlarıyla birlikte yer verilmesi, etkili matematik ve ispat öğretiminde birçok pedagojik amaca hizmet edebilir. Bu bileşenlerin tanım olma ölçütleri göz önüne alınarak yani aksiyomatik yapıya ve hiyerarşik kavram yapısına uygun olarak gerekli ve yeterli özelliklerinin ekonomik bir biçimde tanımlanması gerekmektedir (Çakıroğlu, 2013). Tüm bu yönleriyle düşünüldüğünde matematik alan eğitimi açısından ders kitaplarında bu bileşenlerden hangilerine nasıl yer verildiği üzerine yapılacak çalışmaların değerli olduğu düşünülebilir.

Türkiye'de ispat etkinliklerinin ortaokul matematik ders kitaplarındaki yerinin incelendiği çalışmaların sonuçları, ders kitaplarında ispat etkinliklerine yeterince yer verilmediğini ortaya koymuştur (Doğan, 2019; Karakuş & Korkutan, 2021; Zeybek, Üstün & Birol, 2018). Yurtdışında çeşitli ülkelerin matematik ve geometri ders kitaplarının akıl yürütme, ispat ve ispatlama bağlamında incelendiği çalışmalar (Bieda, Ji, Drwencke & Picard, 2014; Fujita & Jones, 2014; McCrory & Stylianides, 2014; Otten, Gilbertson, Males & Clark, 2014; Otten, Males & Gilbertson, 2014; Stylianides, 2009, 2014; Thompson, Senk & Johnson, 2012) da yine literatürde mevcuttur. Ancak Türkiye'deki ders kitaplarında aksiyomatik sistemin bileşenlerinin incelendiği çalışmaya literatürde rastlanılmamıştır. Türkiye'de bu bileşenlere 9. sınıf matematik dersi öğretim programında (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018a, 2018b) dolayısıyla 9. sınıf ders kitaplarında (Ayık, 2021; Gökbaş, Kaleci, Mutluoğlu & Ballı, 2022; Ulualan, 2021) yer verilmiştir. Tüm bu nedenlerden dolayı bu araştırmada Türkiye'deki 9. sınıf matematik ders kitaplarında aksiyomatik sistemin bileşenlerinden hangilerine nasıl yer verilmiştir? sorusuna cevap aranmıştır.

YÖNTEM

Araştırmanın Deseni

Bu araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden biri kabul edilen doküman analizi yöntemi kullanılmıştır. Veriler 9. sınıf ortaöğretim matematik ders kitaplarından toplanmıştır. Ders kitaplarından ulaşılan veriler betimsel analize tabi tutulmuştur. Analiz sonucu elde edilen bulgular tablolaştırılmış ve birebir alıntılarla desteklenmiştir.

Ders Kitabı Örneklemi

Nitel araştırmalarda örneklem bir olayın, bir durumun veya bir olgunun derinlemesine incelenmesine ve anlaşılmasına olanak tanıması için amacına yönelik seçilmektedir (Creswell, 2014; Patton, 2014). Bu araştırmada amaçlı örnekleme tekniklerinden birisi olan ölçüt örnekleme tekniği tercih edilmiştir. Ölçüt örnekleme tekniğinde araştırma için belirlenen bir dizi ölçütü sağlayan durumların tümü araştırma kapsamına dâhil edilir (Patton, 2014; Yıldırım & Şimşek, 2016). Bu araştırmanın verileri nitel veri toplama araçlarından biri olan dokümanlar aracılığıyla toplanmıştır.

Bu araştırmanın örneklemi MEB Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı [TTKB] tarafından 2022-2023 eğitim-öğretim yılı için 9. sınıf matematik derslerinde okutulması karara bağlanmış ders kitapları ile ders kitabı yerine kullanılabilecek eğitim araçları/öğretim materyallerinden oluşmaktadır. Bu araştırma kapsamında incelenen kitapların seçiminde ölçüt; kitapların 2022-2023 eğitim-öğretim yılı için MEB TTKB tarafından Anadolu ve Fen Liseleri için okutulması kararlaştırılmış ve basılı kitaplar olmasıdır. Aksiyomatik sistem için gerekli bileşenlere mevcut ortaöğretim matematik dersi öğretim programlarında 9. sınıf "Sayılar ve Cebir" öğrenme alanının "Mantık" alt öğrenme alanında yer verilmiştir (MEB, 2018a, 2018b). Bu nedenle bu araştırmada Tablo 1'deki üç ortaöğretim matematik ders kitabı analiz edilmiştir.

Tablo 1.

İncelenen matematik ders kitapları

Kod	Kitap Adı	Yayıncı	ISBN
MK1	Ortaöğretim Matematik 9 Ders Kitabı	Millî Eğitim Yayınları (Ayık, 2021)	978-975-11-4903-9
MK2	Ortaöğretim Fen Lisesi Matematik 9 Ders Kitabı	Millî Eğitim Yayınları (Ulualan, 2021)	978-975-11-4956-5
MK3	Ortaöğretim 9. Sınıf Matematik Ders Kitabı	Pasifik Yayınları (Gökbaş, Kaleci, Mutluoğlu & Ballı, 2022)	978-605-5923-37-2

Verilerin Analizi

Bu nitel araştırmada Tablo 1'deki ders kitapları doküman analizine tabi tutulmuştur. Doküman analizi araştırmacıların araştırdıkları olay, olgu ve durumla ilgili yazılı belgeler ile onların özelliklerini göz önüne alarak tarafsızca incelemesine dayanır (Christensen & Brumfield, 2010; Norum, 2008). Bu çalışmada doküman analizinin aşamaları (Forster, 1995; Yıldırım & Şimşek, 2016) sıralı olarak izlenmiştir.

İlk aşamada MEB tarafından oluşturulan, bir dijital eğitim platformu olan ve tüm okul türleri ve sınıf düzeylerine ait ders kitaplarının bulunduğu https://www.eba.gov.tr/ (Eğitim Bilişim Ağı [EBA], t.y.) adresinden üç ortaöğretim matematik ders kitabına erişilmiştir. İkinci aşama erişilen dokümanların özgünlük ve orijinalliklerinin kontrolü aşamasıdır. Erişilen ders kitapları MEB ders kitapları ve eğitim araçları yönetmeliğine (MEB ders kitapları …, 2021) göre hazırlanmıştır. Ayrıca MEB TTKB'ce ders kitabı olarak okutulması uygun bulunan (Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı [TTKB], 2018, 2019) ve yayınlanan kitaplardır (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021). Tüm bu nedenlerden dolayı erişilen dokümanlar özgün belgelerdir. Üçüncü aşamada üç ders kitabının bütün metinleri belli bir düzende, sırasıyla önce ayrı ayrı sonra da karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Dördüncü aşamada aksiyomatik sistemin bileşenlerinden (tanımsız terim, tanımlı terim, tanım, aksiyom, postulat, lemma, önerme, ispat, ispatlama, çürütme, teorem, yanlış önerme, varsayım ve sonuç) hangilerine nasıl yer verildiği betimsel analizle çözümlenmiştir. Betimsel analiz için şu kodlar kullanılmıştır:

a) ders kitabında kavramın tanımı verilmiştir,
b) ders kitabında tanımı verilmeden kavram geçmektedir,
c) ders kitabında bu kavram geçmemektedir.

Son aşamada öncelikle elde edilen bulgular tablolaştırılmıştır. Sonrasında ise ders kitaplarında kavramların tanımı verildiyse tanımların tanım olma ölçütleri doğrultusunda benzerlikleri ve farklılıklarına yer verilmiştir. Tanımı verilmeden kavramlara kitaplarda yer verildiyse kavramlara kitapların hangi bölümünde ve nasıl yer verildiği ele alınmıştır. Bulgular birebir alıntılarla desteklenerek raporlaştırılmıştır.

Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları

Araştırmanın geçerliği açısından araştırma örnekleminin seçimi, veri toplama, veri analizi, yorumlanması ve rapor edilmesi süreçleri tutarlı bir şekilde yürütülmüş ve bunlarla ilgili detaylı betimlemelere yer verilmiştir (Guba & Lincoln, 1982; Miles & Huberman, 1994; Yıldırım & Şimşek, 2016).

Güvenirlik çalışması için uzman incelemesine başvurulmuştur. Araştırmacı tarafından ispatın 14 bileşeni için üç kitapta toplam 42 (14x3) kodlama yapılmıştır. Alanında uzman başka bir akademisyen tarafından kodlamalar kontrol edilmiştir. 39 kodda uyum, üç kodda ise uyuşmazlık ortaya çıkmıştır. Uyuşmazlık *varsayım* bileşenine ait kodlamalarda ortaya çıkmıştır. Bunun sebebinin dilimizde varsayım kavramı ile eş anlamlı olan sözcükler ile aksiyomatik sistemin bileşeni olan varsayım kavramının ifade ettiği anlam arasındaki farktan kaynaklandığı tespit edilmiştir. Araştırmacı ve alan uzmanının yaptığı kodlamalar arasındaki uyum Miles ve Huberman'ın (1994, s. 64) aşağıdaki güvenirlik formülü ile hesaplanmıştır. "Güvenirlik = görüş birliğinin sayısı / (görüş birliği + görüş ayrılığının toplam sayısı)" $=39/(39+3) \approx \%\,93$. Kodlayıcılar arası uyum yüzdesi %80'den daha yüksek çıktığı için araştırmanın güvenirliğinin sağlandığı (Miles & Huberman, 1994, s. 64) düşünülebilir. Araştırmacı ve alan uzmanı üç uyumsuz kodu birlikte tekrar değerlendirip görüş birliğine vardıktan sonra Tablo 2'deki kodlamalara son hali verilmiştir.

Ayrıca araştırmanın örneklemi amaçlı örnekleme tekniği ile seçilmiş ve belirlenen ölçütler dâhilinde tüm kitaplar araştırmaya dâhil edilerek araştırmanın aktarılabilirlik niteliğinin arttırılması amaçlanmıştır (Guba, 1981; Guba & Lincoln, 1981, 1982). Araştırmanın inandırıcılık ve teyit edilebilirlik niteliklerini arttırmak amacıyla da kodlamaları yansıtan bulgulara ait birebir alıntılara yani ham verilere yer verilmiştir (Guba, 1981; Guba & Lincoln, 1981, 1982).

Araştırmanın Etik İzinleri

Yapılan bu araştırmada, araştırma etiği ilke ve kuralları gözetilmiş ve çalışma için gerekli etik kurul izni alınmıştır. Etik kurul izni kapsamında; Kırklareli Üniversitesi Rektörlüğü Bilimsel Araştırmalar ve Yayın Etiği Kurulundan, 23.01.2023 tarihli, E-35523585-302.99-75451 sayılı belge alınmıştır.

BULGULAR

Bu bölümde Türkiye'deki 9. sınıf matematik ders kitaplarında aksiyomatik sistemin bileşenlerinden hangilerine nasıl yer verildiği ile ilgili bulgulara yer verilmiştir. Üç ders kitabının betimsel analizi sonucu elde edilen bulgular karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Bu ders kitaplarında aksiyomatik sistemin bileşenlerinden tanımına yer verilenler, tanımına yer verilmeden ders kitabında geçenler ve ders kitabında hiç yer verilmeyenler Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2.

Aksiyomatik sistemin bileşenlerinin ders kitaplarındaki kullanım durumları

Aksiyomatik Sistemin Bileşenleri	MK1 (Ayık, 2021)	MK2 (Ulualan, 2021)	MK3 (Gökbaş vd., 2022)
Tanımsız terim	√√	√√	-
Tanımlı terim	√√	√√	-
Tanım (tanımlama)	√√	√√	√√
Aksiyom	√√	√√	√√
Postulat	√	-	-
Lemma	-	-	-
Önerme	√√	√√	√√
İspat	√√	√√	√
İspatlama	√√	√	√√
Çürütme	-	-	-
Teorem	√√	√√	√√
Yanlış önerme	√	√	√
Varsayım (Kestirim-Sanı)	-	√	√
Sonuç	√	√	√

Not : √√: Kavramın tanımı verilmiştir. √ : Tanımı verilmeden kavram geçmektedir. - : Ders kitabında bu kavram geçmemektedir.

Tablo 2'de görüldüğü gibi aksiyomatik sistemin bileşenlerinden biri olan *tanımsız terim* kavramının tanımına iki ders kitabında yer verilmiştir (Ayık, 2021; Ulualan, 2021). MK1'de tanımsız terim kavramı "Çeşitli örnekler ile sezgiler kullanılarak kavranabilen terimlere tanımsız terim denir" şeklinde tanımlanmış ve "nokta, doğru, düzlem, küme" tanımsız terimlere örnek olarak verilmiştir (Ayık, 2021, s. 38). MK2'de ise tanımsız terimler "Başka bir terim ya da tanıma ihtiyaç duyulmadan anlaşılabilen terimlerdir" şeklinde tanımlanmış ve örnek olarak yine "nokta, doğru, düzlem" verilmiştir (Ulualan, 2021, s. 35). Ancak MK3'de tanımsız terim kavramına yer verilmemiştir (Gökbaş vd., 2022). Tanımsız terim kavramı gibi *tanımlı terim* kavramının tanımına da yine aynı iki kitapta yer verilmiştir (Ayık, 2021; Ulualan, 2021). Bu kavrama MK1'de "Asal sayı, açı, üçgen, dörtgen gibi kavramlar matematiksel birer terimdir. Bu terimler diğer matematiksel terimler yardımıyla tanımlanabilir. Bu tür terimlere tanımlı terimler denir" (Ayık, 2021, s. 38) şeklinde yer verilirken MK2'de de "Kendisinden önce tanımlanan terimler, tanımsız terim ve başkaca kavramlar kullanılarak tanımlanmaya ihtiyaç duyulan terimlerdir" şeklinde yer verilmiş olup örnek olarak "denklem" tanımı yapılmıştır (Ulualan, 2021, s. 35). MK3'de ise yine bu kavrama yer verilmemiştir (Gökbaş vd., 2022). MK1 ve MK2'de tanımsız ve tanımlı terim kavramları verilmeden önce *terim* kavramının tanımı verilmiş ve bu iki kavram aksiyomatik yapıya ve hiyerarşik kavram yapısına uygun olarak terim kavramı üzerine inşa edilmiştir (Ayık, 2021, s. 38; Ulualan, 2021, s. 35). Yine MK1 ve MK2'de tanımsız ve tanımlı terim kavramlarından sonra *tanım (tanımlama)* kavramına yer verilmiştir. Yine aksiyomatik yapıya ve hiyerarşik kavram yapısına uygun olarak tanım (tanımlama) kavramı bu iki kavram kullanılarak tanımlanmış yani bu iki kavram üzerine inşa edilmiştir (Ayık, 2021, s. 37; Ulualan, 2021, s. 35). MK1 ve MK2'de tanım (tanımlama) kavramı; tanımsız ve tanımlı terimler yardımıyla bir kavramı açıklamak ya da özelliklerini belirtmek olarak ifade edilmiştir (Ayık, 2021; Ulualan, 2021). Bunlardan farklı olarak MK3'de tanım kavramı sadece terim kavramı üzerine inşa edilmiş ve "Bir terimi daha önceden bilinen terimler yardımıyla ifade etmeye tanım denir" şeklinde ifade edilmiştir (Gökbaş vd., 2022, s. 35). Ayrıca MK1 ve MK3'de iyi bir tanımın içermesi gereken özelliklere de yer verilmiştir (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022). Bunun yanı sıra MK1'de tanımsız ve tanımlı terimler kullanılarak "birleşim kümesi" tanımı (Ayık, 2021, s. 38), MK2'de ise "üçgen" tanımı örnek olarak yapılmıştır (Ulualan, 2021, s. 35).

Yine Tablo 2'den görüldüğü üzere aksiyomatik sistemin başka bir bileşeni olan *aksiyom* kavramının tanımına üç ders kitabında da yer verilmiştir (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021). Üç kitabın hem "Sayılar ve Cebir" öğrenme alanı "Mantık" alt öğrenme alanında hem de sözlük kısmında aksiyom kavramının tanımı benzer şekilde yapılmıştır (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021). Aksiyom kavramı MK1'de "Doğruluğu ispatsız olarak kabul edilen önermeler" (Ayık, 2021, s. 38), MK2'de "İspata gerek duyulmaksızın doğruluğu kabul edilen önermeler" (Ulualan, 2021, s. 35), MK3'de ise "Doğruluğu ispat etmeye gerek duyulmadan kabul edilen önermeler" şeklinde tanımlanmıştır (Gökbaş vd., 2022, s. 35). Her üç tanımda aksiyomatik yapıya ve hiyerarşik kavram yapısına uygun olarak aksiyom kavramının kendinden daha genel bir kavram olan önerme kavramı üzerine inşa edildiği görülmektedir. Her üç kitapta da aksiyomların ispatına gerek olmayan birer kabul olduğuna vurgu yapılmıştır (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021). Aksiyom kavramının tüm gerekli ve yeterli özellikleri tanımlarda en öz haliyle yani ekonomik bir biçimde ifade edilmiştir. Yine üç ders kitabında da aksiyom kavramının anlaşılması için örneklere yer verilirken (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021) farklı olarak MK1'de "Aksiyomlarda bulunması gereken özellikler" sıralanmıştır (Ayık, 2021, s. 38). Her üç kitabın "Geometri" öğrenme alanı "Üçgenler" alt öğrenme alanında Öklid ile ilgili tarihsel ufak parçalara (Tzanakis & Arcavi, 2000) yer verilirken aksiyom kavramından söz edilmiştir. MK1 ve MK3'te Öklid'in beş aksiyomuna yer verilirken MK2'de Öklid'in bazı aksiyomlarına yer verilmiştir (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021). Aksiyom kavramından farklı olarak *postulat* kavramı ise sadece MK1'de geçerken MK2 ve MK3'de geçmemektedir (Ayık, 2021). Bu kavram ve tanımı MK1'de "Sayılar ve Cebir" öğrenme alanı "Mantık" alt öğrenme alanında geçmemektedir. Ayrıca sözlük kısmında da tanımı verilmemektedir. MK1'de "Geometri" öğrenme alanı "Üçgenler" alt öğrenme alanında Pisagor hakkında tarihsel ufak parçalar verilirken "Pisagor, geometri alanında aksiyomları ve postulatları kullanarak bu alandaki ilk verileri elde etmiştir" ifadesinde aksiyom kavramının yanı sıra postulat kavramı geçmektedir (Ayık, 2021, s. 286). Bu kitapta postulat kavramı ilk ve son kez bu ifadede geçmektedir. Daha öncesinde bu kavram tanıtılmamıştır. Ayrıca bu ifadeden anlaşılacağı gibi aksiyom ve postulat kavramları birbirinin yerine kullanılmayıp birbirlerinden farklı kavramlar olarak kullanılmıştır. Aksiyom ve postulatlar gibi ispatlamalarda kullanılan başka bir yardımcı teorem olan *lemma* kavramı ise hiçbir kitapta geçmemektedir.

Aksiyomatik sistemin diğer bir bileşeni olan *önerme* kavramının tanımına üç kitapta da yer verilmiştir. Her üç kitapta da önerme kavramı doğru veya yanlış kesin hüküm bildiren ifadeler olarak tanımlanmıştır (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021). Görüldüğü üzere kitaplarda tanım olma ölçütleri de göz önüne alınarak önerme kavramı kendinden daha genel bir kavram olan ifade kavramı üzerine inşa edilmiştir. Her üç kitapta ifade kavramının tanımı yapılmasa da önerme olan ve önerme olmayan ifade örneklerine yer verilerek bu kavramlar arasındaki farka değinilmiştir. Önermeler konusuna MK1 ve MK3'de "Önermeler ve Bileşik Önermeler" başlığı altında yer verilirken MK2'de farklı olarak "Önermeler ve Bileşik Önermeler" ve "Açık Önermeler ve İspat Yöntemleri" başlıkları altında yer verilmiştir (Ayık, 2021, s. 14; Gökbaş vd., 2022, s. 10; Ulualan, 2021, s. 13, s. 32). Her üç kitapta benzer şekilde önerme olan veya olmayan ifadelere, doğru ve yanlış önermelere, önermelerin doğruluk değerleri ve tablolarına, önermelerin değillerine (olumsuzlarına), denk önermelere, bileşik önermelere, De Morgan kurallarının doğruluğunun doğruluk tablosu ile gösterilmesine, koşullu önermelere, iki yönlü koşullu önermelere, açık önermelere, $\forall$ ve $\exists$ niceleyicilerine bu başlıklar altında detaylı olarak yer verilmiştir (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021). Diğer iki kitaptan farklı olarak MK2'de totoloji ve çelişki kavramları ve örnekleri ile tikel ve tümel evetleme önermelerinin elektrik devrelerinde kullanılmasına da yer verilmiştir (Ulualan, 2021).

Aksiyomatik sistemin en önemli bileşenlerinden biri olan *ispat* kavramının tanımına ders kitaplarının sözlük kısmında MK1 ve MK2'de yer verilmiştir. MK1'in sözlük kısmında ispat kavramı "Bilinen matematiksel kural, özellik, sonuç veya tanımları kullanarak bir yargının doğru veya yanlış olduğunun gösterilmesi" (Ayık, 2021, s. 368) şeklinde tanımlanmıştır. MK2'nin sözlük kısmında da benzer bir tanıma yer verilmiştir (Ulualan, 2021, s. 35). Ders kitaplarının "Mantık" alt öğrenme alanında ispat kavramının tanımına sadece MK2'de yer verilirken MK1 ve MK3'ün "Mantık" alt öğrenme alanında ispat kavramı yerine *ispatlama* kavramı verilmiştir. İspat kavramının tanımına MK2'de "Aksiyom, kural, sonuç veya tanımları kullanarak bir yargının doğru veya yanlış olduğunun gösterilmesi işlemlerine ispat denir" şeklinde yer verilmiştir (Ulualan, 2021, s. 35). Yukarıdaki üç tanımdan da görüleceği üzere ispat kavramının tanımı yapılırken aksiyom, tanım, sonuç ve yargı gibi kavramlara ihtiyaç duyulmuştur. Ayrıca bu üç tanımdan da görüleceği üzere bir yargının doğru olduğunu gösterme ispat olduğu gibi yanlış olduğunu göstermek de ispat olarak ifade edilmiştir. Ancak ispatlama kavramı MK1'in "Mantık" alt öğrenme alanında "Bir teoremin doğru önerme olduğunu göstermeye teoremin ispatlanması denir" (Ayık, 2021, s. 38) şeklinde, MK3'de ise "Bir teoremin doğru olduğunu göstermeye teoremi ispatlamak denir" (Gökbaş vd., 2022, s. 35) şeklinde verilmiştir. İspat kavramının tanımlarının aksine ispatlama kavramının tanımlarında yanlış önermelerin doğruluğunun çürütülmesi yani yanlışlığının gösterilmesine tanımlarda yer verilmemiştir. Çünkü ispat kavramının tanımlarında bir *yargının* ispatından bahsedilirken, ispatlama kavramının tanımlarında bir *teoremin* ispatından bahsedilmiştir. Dolayısıyla yargıların doğru veya yanlış olabileceği, teoremlerin ise sadece doğru olması gerektiği tanımlarda göz önünde bulundurulmuştur. Her üç kitapta da *çürütme* kavramı geçmemektedir. Ancak çürütme kavramına yer verilmese de ispat kavramının tanımlarında bir önermenin yanlış olduğunun gösterilmesinden bahsedilmiştir. Bununla birlikte *yanlış önerme* kavramının tanımına üç kitapta da yer verilmemesine rağmen her üç kitapta da yanlış önerme kavramı geçmektedir. Şöyle ki; üç kitapta da önermelerin doğruluk değerleri ifade edilirken ve bununla ilgili örneklerde doğruluk değerleri bulunurken de yanlış önerme kavramı geçmektedir (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021). Örneğin her üç kitapta da herhangi bir p önermesi doğru önermeyken p≡1 ve p önermesi yanlış önermeyken p≡0 olduğu belirtilip, doğru ve yanlış önerme örnekleri verilmiştir (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021).

İspat ve ispatlama kavramlarından matematik tarihi ile ilgili tarihsel ufak parçalar verilirken de bahsedilmiştir. Örneğin; MK1 ve MK2'de Pisagor hakkında bilgi verilirken onun matematik bilimine ispat fikrini kazandıran kişi olduğu ifade edilmiştir (Ayık, 2021; Ulualan, 2021). Yine MK1'de "Pisagor teoreminde rasyonel sayılarla ölçümü yapılamayan uzunlukların var olduğunu ispatlamıştır" ifadesine yer verilerek ispatlama kavramından bahsedilmiştir (Ayık, 2021, s. 286). Yine MK2'de matematik tarihi ile ilgili bilgilerin verildiği "tarihçe"lerde (Ulualan, 2021, s. 94, s. 96) ispat ve ispatlama kavramlarından bahsedilmiştir. Benzer şekilde MK3'de matematik tarihi ile ilgili bilgilerin verildiği "tarih köşesi"nde Gıyaseddin Cemşid'e ait ispatlardan bahsedilmiştir (Gökbaş vd., 2022, s. 261).

Bunların dışında ispat kavramı ile ilgili ayrıntılı bilgi olarak şunlar ifade edilebilir. Ders kitaplarında öğrenme alanları içerisinde "Geometri" öğrenme alanında daha fazla ispata yer verildiği görülmektedir. Bunlardan birkaçına örnek vermek gerekirse; bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunun, dış açılarının ölçülerinin toplamının 360° olduğunun, bir üçgende bir dış açının ölçüsünün kendine komşu olmayan iç açıların ölçülerinin toplamına eşit olduğunun, iç ve dış açıortay teoremlerinin ispatları, vb. MK1 ve MK2'de verilmiştir (Ayık, 2021; Ulualan, 2021). MK3'ün "Geometri" öğrenme alanında da bazı geometrik ispatlara yer verilmiştir. Bir örnek vermek gerekirse; herhangi iki kenar uzunluğu ile bu kenarlar arasında kalan açının ölçüsü verilen üçgenin alan formülünün ispatına yer verildiği görülmektedir (Gökbaş vd., 2022). Her üç kitapta da bazı önermelerin doğruluğunu göstermek için dinamik geometri yazılımlarından faydalanılmıştır. Örneğin üçgende kenar açı ilişkilerine ait bazı önermelerin doğruluğu bu programlar aracılığı ile incelenmiştir (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021). Görselleştirme adına ayrıca MK2'de Pisagor Teoreminin görsel bir ispatına da yer verilmiştir (Ulualan, 2021). "Sayılar ve Cebir" öğrenme alanında da bazı matematiksel ispatlara yer verilmiştir. Örneğin MK1'de bazı cebirsel ifadelerin doğruluğu ispatlanmış ve öğrencilere de bazı ispatlama görevleri bırakılmıştır. Spesifik bir örnek vermek gerekirse "$x \in R, x \neq 0$ ve $a, b \in Z^{+}$ olmak üzere $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$" ifadesinin doğruluğu $a < b$ durumu için ispatlanmış, $a = b$ ve $a > b$ durumları için ispat öğrencilere bırakılmıştır (Ayık, 2021, s. 140). "Sayılar ve Cebir" öğrenme alanı için MK2'den de bir örnek vermek gerekirse "$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$" kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine soldan dağılma özelliğinin ispatı yapılıp "$(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$" kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine sağdan dağılma özelliğinin ispat görevi öğrencilere bırakılmıştır (Ulualan, 2021, s. 60).

Aksiyomatik sistemin bileşenlerinden bir diğeri olan *teorem* kavramının tanımına yine üç ders kitabında da yer verilmiştir (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021). Teorem kavramı MK1 ve MK3'de "doğruluğu ispatlanabilen" (Ayık, 2021, s. 38; Gökbaş vd., 2022, s. 35), MK2'de "Doğruluğu ispatsız, kabul görmeyen" (Ulualan, 2021, s. 35) önermeler olarak tanımlanmıştır. Üç tanım da tanım olma ölçütlerine uygun olarak verilmiştir. Teorem kavramın tüm özellikleri aksiyomatik yapıya uygun olarak en kısa haliyle tanımlarda verilmiştir. Teorem kavramı da hiyerarşik kavram yapısına uygun şekilde yine aksiyom kavramı gibi önerme kavramı üzerine inşa edilmiştir. Aksiyom kavramında aksiyom olarak kabul edilen önermelerin doğruluğu için ispata gerek duyulmadığı vurgulanırken, bunun aksine teorem kavramında teorem olan önermelerin doğruluğu için muhakkak ispatına gerek olduğu vurgulanmıştır. Ders kitaplarının sözlük kısımlarında ise teorem kavramının tanımına sadece MK2'de yer verilerek "Kanıtlanabilen bilimsel önerme" olarak tanımlanmıştır (Ulualan, 2021, s. 399). Ayrıca üç ders kitabında da teorem kavramını açıklamak için *hipotez* ve *hüküm* kavramlarına yer verilmiştir. p⇒q önermesinde p önermesinin hipotez, q önermesinin hüküm olduğu üç kitapta da ifade edilmiştir (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021). Buradan hareketle MK1 ve MK2'de p doğru bir önerme q'da bir önerme iken p⇒q koşullu önermesinin doğru olduğu ispatlanabiliyor ise p⇒q önermesinin bir teorem olduğu belirtilmiştir (Ayık, 2021; Ulualan, 2021). MK3'de ise bu ifade doğruluk değerleri üzerinden "p≡1 ve p⇒q≡1 ise p⇒q bileşik önermesi bir teoremdir" şeklinde ifade edilmiştir (Gökbaş vd., 2022, s. 35). Ayrıca ders kitaplarının üçünde de teorem örnekleri ile hipotez ve hüküm yazma örneklerine de yer verilmiştir (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021). MK2 ve MK3'ün sözlük kısmında hipotez kavramının karşılığı olarak *varsayım* kavramı gösterilmiştir (Gökbaş vd., 2022, s. 306; Ulualan, 2021, s. 398). Ayrıca MK2'de $\sqrt{2}$'nin irrasyonel olduğu ispatlanırken $\sqrt{2}$'nin rasyonel sayı olduğu varsayılmış ve bu varsayımın yanlış olduğu ispatlanmıştır (Ulualan, 2021). Teorem kavramına geri dönecek olursak MK3'de teorem ile aksiyomun farkına dair vurgu yapılmıştır (Gökbaş vd., 2022). Teorem kavramının tanımının yanında ders kitaplarında iyi bilindik bazı teoremlere de yer verilmiştir. Örneğin "Geometri" öğrenme alanında Pisagor Teoremi, Temel Orantı Teoremi, Thales Teoremi, İç Açıortay Teoremi, Dış Açıortay Teoremi ve Öklid Teoremi gibi teoremlere yer verilerek bu teoremlerle ilgili sorular ve bu teoremlerin kullanıldığı farklı türdeki geometri soruları çözülmüştür (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021). Diğer kitaplardan farklı olarak Kosinüs Teoremine, Pisagor Teoremine ve Thales Teoremine MK2'nin sözlük kısmında da yer verilmiştir (Ulualan, 2021). Matematik tarihi ile ilgili Pisagor, Öklid ve Thales gibi bilim insanlarının çalışmaları hakkında tarihsel ufak parçaların verildiği metinlerde de teorem kavramı geçirilmiştir (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021). Örneğin MK2'nin "Geometri" öğrenme alanı "Üçgenler" alt öğrenme alanına girişte tarihsel bilgiler verilirken Cahit Arf'ın Hasse-Arf Teoremini ispatladığından bahsedilmiştir (Ulualan, 2021).

Son bileşen olan *sonuç* kavramının tanımına üç kitapta da yer verilmemiş olmasına rağmen MK1 ve MK2'de ispat tanımı yapılırken yukarıda yer verildiği gibi sonuç kavramı geçmektedir. Önermeleri ispatlarken matematiksel kural, özellik, aksiyom, sonuç ve tanımların kullanıldığına yer verilerek aksiyomatik sistemin bileşenlerinden biri olan sonuç kavramı cümle içerisinde geçirilmiştir (Ayık, 2021; Ulualan, 2021). MK3'de ise mantık kavramının tanımı yapılırken "mantık bir veya daha fazla yargıdan sonuç adı verilen bir yargının elde edilmesi işlemidir" ifadesine yer verilmiş olup bu ifadede sonucun bir yargı olduğu belirtilmiştir (Gökbaş vd., 2022, s. 10). Sonuç kavramının tanımı verilmese de ders kitaplarında bazı matematiksel sonuçlara yer verilmiştir. Örneğin MK1'de "Üçgende herhangi iki köşeye ait dış açıortayların kesiştiği nokta D ise diğer köşeye ait iç açıortay da D noktasından geçer. Bu durumda 'Herhangi iki açıortayın kesiştiği noktaya diğer köşeden çizilen doğru parçası da açıortaydır.' sonucu elde edilir" ifadesiyle matematiksel bir sonuç elde edilmiştir (Ayık, 2021, s. 255). MK2'den bir örnek vermek gerekirse; kitapta $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ eşitliğinden kolayca elde edilen bazı matematiksel sonuçlara yer verilmiştir (Ulualan, 2021, s. 170). MK3'te ise pozitif iki tam sayının çarpımının, bu sayıların EBOB ve EKOK'larının çarpımına eşit olduğu sonucuna yer verilmiştir (Gökbaş vd., 2022, s. 100). Yine üç kitapta dinamik geometri yazılımları kullanılarak yapılan etkinliklerden öğrencilerin genellenebilir matematiksel sonuçlar elde etmesi amaçlanmıştır (Ayık, 2021; Gökbaş vd., 2022; Ulualan, 2021).

TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Araştırmanın sonuçlarına göre ders kitaplarında aksiyomatik sistemin bileşenlerinden bazılarının tanımlarına yer verilirken bazılarının tanımlarına yer verilmediği görülmektedir. Dane'nin (2008) çalışmasının sonuçlarına göre ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin tanım, varsayım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını kavrama düzeyleri yeterli değildir ve bunlarla ile ilgili onlar kavram yanılgılarına sahiptirler. Ayrıca Knuth'un (2002) çalışmasının sonuçları matematik öğretmenlerinin ispatı oluşturan şeyler hakkında yetersiz anlayışa sahip olduklarını ortaya koymuştur. Öğretmen adaylarının ve hatta öğretmenlerin dâhi kavram kargaşası yaşadıkları bu kavramların ortaöğretim öğrencileri için de öğrenilmesi güç kavramlar olduğu kolayca söylenebilir. Fakat kavramlar, matematik öğretimi açısından yadsınamaz bir öneme sahiptir (Gökkurt-Özdemir, Bayraktar & Yılmaz, 2017). Bu yüzden tüm işleyişi ve gelişimi aksiyomatik sistem içerisinde olan modern matematiğin öğretildiği matematik dersleri için ders kitaplarında aksiyomatik sistemin tüm bileşenlerinin eksiksiz olarak aksiyomatik yapıya ve hiyerarşik kavram yapısına uygun biçimde tanıtılması tavsiye edilebilir.

Ders kitaplarında tanımlarına yer verilen kavramların tanım olma ölçütlerine uygun tanımlandıkları görülmektedir. Bazı kavramların ise tanımlarına yer verilmeden ders kitaplarında kullanıldığı görülmektedir. Ders kitaplarındaki bu tür kullanımların öğrencilerde çeşitli öğrenme güçlüklerine neden olabileceği düşünülebilir. Matematik eğitimi literatüründe öğrencilerin özellikle ispat ve ispatlamada çeşitli güçlüklere sahip olduğu vurgulanmaktadır (Baştürk, 2010; Moore, 1994; Stylianides, 2014; Weber, 2001). Bu yüzden ders kitaplarında kavramların bu tür kullanımlarından kaçınılmasının ispatla ilgili bazı öğrenci güçlüklerinin üstesinden gelmede fayda sağlayabileceği düşünülebilir. Benzer şekilde bazı kavramların tanımlarına kitapların sadece sözlük kısımlarında yer verilmiştir. Matematik dersi için öğrencilerin ders kitaplarındaki sözlük kısımlarını kullanma durumları ayrı bir araştırma konusu olarak düşünülebilir.

Van Hiele'nin (1986) geometrik düşünme düzeylerinden "çıkarım" ve "sistematik düşünme" düzeyleri öğrencilerin aksiyomatik yapı ve sistemleri kullanabildikleri düzeylerdir (Altun & Kırcal, 1999; Duatepe-Paksu, 2016; Van Hiele, 1986). Çıkarım düzeyinde öğrenciler bir aksiyomatik sistemde aksiyomatik yapıyı kullanarak teoremleri ispatlayabilirler (Altun & Kırcal, 1999; Van Hiele, 1986). Bir matematikçi gibi düşünmeyi gerektiren sistematik düşünme düzeyinde ise öğrenciler farklı aksiyomatik sistemleri karşılaştırabildikleri gibi farklı aksiyomatik sistemler içerisinde geçerli teoremlere ve sonuçlara ulaşabilirler (Duatepe-Paksu, 2016; Van Hiele, 1986). Dolayısıyla buradan hareketle söylenebilir ki; öğrencilerin ileri geometrik düşünme düzeylerine ulaşabilmeleri için aksiyomatik sistemleri ve bu sistemleri oluşturan bileşenleri tanımaları gerekmektedir.

Mevcut öğretim programlarındaki "Sayılar ve Cebir" öğrenme alanı "Mantık" alt öğrenme alanında öğrenciler için hedeflenen kazanımlardan birisi "Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar" şeklindedir (MEB, 2018a, s. 18; MEB, 2018b, s. 17). Bu yüzden ders kitaplarında aksiyomatik sistemin bu bileşenlerine yer verildiği görülmektedir. Ancak bir ders kitabının "Sayılar ve Cebir" öğrenme alanı "Mantık" alt öğrenme alanında ispat kavramının tanımına yer verilirken iki ders kitabında ispatlama kavramının tanımına yer verilmiştir. Literatürdeki bazı çalışmaların sonuçları katılımcıların ispat kavramının tanımını yapmada güçlükler yaşadıklarını ortaya koymaktadır (Çontay & Duatepe-Paksu, 2019; Köğce & Yıldız, 2011; Polat & Akgün, 2016). Ayrıca ispat ve ispatlama birbirlerinden farklı kavramlardır. Harel'e (2008) göre ispatlama bir süreç iken, ispat bu sürecin sonunda ortaya çıkan bilişsel bir üründür. Dolayısıyla ders kitaplarında ispat ve ispatlama kavramlarının tanımlarına ayrı ayrı yer verilip bu kavramların ilişkisine de ayrıca değinilmesinin öğrenciler için faydalı olabileceği düşünülebilir.

Kavram öğretiminde farklı analojilerin, öğrenim ve öğretim stratejilerinin (Tessmer, Wilson & Driscoll, 1990), metaforların (Lakoff & Johnson, 1980), kavram haritalarının (Novak, Gowin & Johansen, 1983) ve kelime ilişkilendirme testlerinin (Deese, 1962; Shavelson, 1972) kullanıldığı bilinmektedir. Örneğin Dinçer ve Yılmaz'a göre (2021) pek çok soyut kavram içeren matematik dersinde öğrencilerin güçlük yaşadıkları kavramların öğretimleri için analojilerden faydalanılması anlamlı öğrenme için katkı sağlayabilir. Ayrıca öğretim programlarında öğretilmeye çalışılan kavramların yaşama yakınlık ilkesi gereği günlük yaşamla ilişkisi kurulmalı ve transfer ilkesi gereği diğer disiplinlerde kullanılmalıdır (Dane, 2008). Aksiyomatik sistemin bileşenleri için de tüm bunların ders kitaplarına daha fazla yansıtılması bu kavramların öğrenimine katkı sağlayabilir.

Stylianides'in (2014) ifade ettiği gibi akıl yürütme ve ispat bağlamında ders kitapları yeterince araştırılmamıştır. Literatür taramasından görüldüğü üzere bu bağlamda ülkemizde yapılan çalışmaların sayısı da yeterli değildir. Özellikle ispatlama sürecinde önemli bir yere sahip olan aksiyomatik sistemin bileşenlerinin ders kitaplarında incelendiği çalışmalara daha ağırlık verilmesi önerilebilir. Yine farklı ülkelerin ders kitaplarında bu bileşenlere nasıl yer verildiği karşılaştırmalı olarak incelenebilir.

Ders kitaplarında bazı teoremlerin ispatlarına yer verildiği görülmektedir. Önceki öğretim programı (MEB, 2013) "Sayılar ve Cebir" öğrenme alanı "Mantık" alt öğrenme alanında tümevarım ile ispat yöntemi, doğrudan ispat yöntemi, çelişki ile ispat yöntemi, aksine örnek verme yöntemi gibi ispat yöntemlerine yer verilmiştir. Ancak mevcut öğretim programında (MEB, 2018a) bunlara yer verilmediği görülmektedir. Mevcut ders kitaplarında ispat yöntemleri tanıtılmadan bazı teoremlerin ispatlarına yer verilmektedir. İspat yapma Bloom taksonomisinin en üst düzey bilişsel alan becerilerine karşılık gelmektedir (Bloom, Englehart, Furst, Hill & Krathwohl, 1956). Bu yüzden bu araştırmanın sonuçlarının da ötesinde öğretim programlarında dolayısıyla ders kitaplarında ispat yöntemlerine ve daha fazla ispat etkinliklerine yer verilmesi de önerilebilir.

KAYNAKÇA

Altun, M., & Kırcal, H. (1999). 3-7 yaş çocuklarında geometrik düşünmenin gelişimi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *6*(6), 71-79. https://dergipark.org.tr/en/pub/pauefd/issue/11137/133232 (Erişim Tarihi: 30.05.2023).

Ayık, G. (Ed.). (2021). *Ortaöğretim matematik 9 ders kitabı*. Ankara: Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Barker-Plummer, D., Barwise, J., Etchemendy, J., Liu, A., Murray, M., & Pease, E. (2011). *Language, proof, and logic* (2nd ed.). Stanford, CA, USA: CSLI Publications.

Baştürk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students' conceptions of mathematical proofs and proving. *Educational Studies*, *36*(3), 283-298. https://doi.org/10.1080/03055690903424964

Beck, M., & Geoghegan, R. (2010). *The art of proof: Basic training for deeper mathematics*. New York, NY, USA: Springer Science + Business Media.

Bieda, K. N., Ji, X., Drwencke, J., & Picard, A. (2014). Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research*, *64*, 71-80. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.06.005

Bloch, E. D. (2011). *Proofs and fundamentals: A first course in abstract mathematics* (2nd ed.). New York, NY, USA: Springer Science + Business Media.

Bloom, B. S. (Ed.), Englehart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals*. *Handbook I: Cognitive domain*. New York: David McKay.

Campbell, C. M. (2012). *Introduction to advanced mathematics: A guide to understanding proofs*. Boston, MA, USA: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Can, C., & Clark, K. M. (2020). "Because you're exploring this huge abstract jungle…": One student's evolving conceptions of axiomatic structure in mathematics. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(3), em0610. https://doi.org/10.29333/iejme/8566

Christensen, T. M., & Brumfield, K. A. (2010). Phenomenological designs: The philosophy of phenomenological research. In C. J. Sheperis, J. S. Young, & M. H. Daniels (Eds.), *Counseling research: Quantitative, qualitative, and mixed methods* (pp. 135-150). Boston, MA: Pearson.

Cihan, F. (2019). *Matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarımı* (Doktora tezi, Tez No: 570220). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul. https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/

Creswell, J. W. (2014). *Araştırma deseni: Nitel, nicel ve karma yöntem yaklaşımları*. (S. B. Demir, Çev.). (4.baskıdan çeviri). Ankara: Eğiten Kitap.

Çakıroğlu, E. (2013). Matematik kavramlarının tanımlanması. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır & A. Delice (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (1. Bölüm, s. 1-13). Ankara: Pegem Akademi.

Çontay, E. G., & Duatepe-Paksu, A. (2019). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşleri. *Sınırsız Eğitim ve Araştırma Dergisi*, *4*(1), 64-89. https://doi.org/10.29250/sead.485430

Dane, A. (2008). İlköğretim matematik 3. sınıf öğrencilerinin tanım, aksiyom ve teorem kavramlarını anlama düzeyleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *16*(2), 495-506. https://dergipark.org.tr/tr/pub/kefdergi/issue/49100/626540 adresinden 20.02.2023 tarihinde erişildi.

Dede, Y. (2013). Matematikte ispat: Önemi, çeşitleri ve tarihsel gelişimi. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır & A. Delice (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (2. Bölüm, s. 14-34). Ankara: Pegem Akademi.

Deese, J. (1962). On the structure of associative meaning. *Psychological Review, 69*(3), 161-175. https://doi.org/10.1037/h0045842

Dinçer, B., & Yılmaz, S. (2021). Matematik dersinde procept (nesne/süreç) teorisi üzerine yarı deneysel bir çalışma. *Trakya Eğitim Dergisi*, *11*(2), 943-952. https://doi.org/10.24315/tred.750458

Doğan, M. F. (2019). Sekizinci sınıf matematik ders kitabındaki matematiksel akıl yürütme ve ispatı öğrenme olanakları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *20*(2), 601-618. https://doi.org/10.17679/inuefd.527243

Duatepe-Paksu, A. (2016). Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri. E. Bingölbali, S. Arslan & İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (Bölüm 16, s. 266-275). Ankara: Pegem Akademi.

Eğitim Bilişim Ağı [EBA]. (t.y.). *Ders kitapları*. https://www.eba.gov.tr/ (Erişim Tarihi: 27/10/2022).

Euclid. (2013). *Öklid'in öğelerinin 13 kitabından birinci kitap*. (Ö. Öztürk & D. Pierce, Çev.). California, USA. (Orijinal çalışma: Euclidis elementa, volume I of Euclidis Opera Omnia. Teubner. Edidit et Latine interpretatvs est I. L. Heiberg, 1883). İstanbul: Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Matematik Bölümü.

Feil, T., & Krone, J. (2003). *Essential discrete mathematics for computer science*. Upper Saddle River, New Jersey, USA: Pearson Education, Inc.

Forster, N. (1995). The analysis of company documentation. In C. Cassell & G. Symon (Eds.), *Qualitative methods in organizational research: A practical guide* (pp. 147-166). Sage Publications, Inc.

Fujita, T., & Jones, K. (2014). Reasoning-and-proving in geometry in school mathematics textbooks in Japan. *International Journal of Educational Research*, *64*, 81-91. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.09.014

Garnier, R., & Taylor, J. (2009). *Discrete mathematics: Proofs, structures, and applications* (3rd ed.). Boca Raton, FL, USA: CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC.

Gossett, E. (2009). *Discrete mathematics with proof* (2nd ed.). New Jersey, USA: John Wiley & Sons.

Gökbaş, H., Kaleci, F., Mutluoğlu, A., & Ballı, B. (2022). *Ortaöğretim 9. sınıf matematik ders kitabı*. Ankara: Pasifik Yayınları.

Gökkurt-Özdemir, B., Bayraktar, R., & Yılmaz, M. (2017). Sınıf ve matematik öğretmenlerinin kavram yanılgılarına ilişkin açıklamaları. *Trakya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *7*(2), 284-305. https://doi.org/10.24315/trkefd.284301

Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Educational Communication and Technology Journal*, *29*(2), 75-91. https://doi.org/10.1007/BF02766777

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1981). *Effective evaluation: Improving the usefulness of evaluation results through responsive and naturalistic approaches.* San Francisco: Jossey-Bass.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1982). Epistemological and methodological bases of naturalistic inquiry. *Educational Communication and Technology Journal*, *30*(4), 233-252. https://doi.org/10.1007/BF02765185

Hale, M. (2003). *Essentials of mathematics: Introduction to theory, proof, and the professional culture*. USA: The Mathematical Association of America.

Hammack, R. (2013). *Book of proof* (3rd ed.). Publisher: Author. https://www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof/Main.pdf adresinden 27.11.2022 tarihinde erişildi.

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: Focus on proving. *ZDM - International Journal of Mathematics Education*, *40*(3), 487-500. https://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0104-1

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Mcmillan.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Karakuş, F., & Korkutan, E. (2021). Ortaokul matematik ders kitaplarında geometri ve ölçme konularına yönelik yapılan ispatların muhakeme ve ispat analitik çerçevesi kapsamında incelenmesi. *Manisa Celal Bayar Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *9*(1), 1-16. https://doi.org/10.52826/mcbuefd.840090

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teacher's conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 379-405. https://doi.org/10.2307/4149959

Köğce, D., & Yıldız, C. (2011). A comparision of freshman and senior mathematics student teachers' views of proof concept. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *15*, 1266-1270. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.03.274

Krantz, S. G. (2011). *The proof is in the pudding: The changing nature of mathematical proof*. New York, NY, USA: Springer Science + Business Media.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: The University of Chicago Press.

Lay, S. R. (2014). *Analysis with an introduction to proof* (5th ed.). New York, NY, USA: Pearson Education Limited.

McCrory, R., & Stylianides, A. J. (2014). Reasoning-and-proving in mathematics textbooks for prospective elementary teachers. *International Journal of Educational Research*, *64*, 119-131. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.09.003

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA, US: Sage Publications, Inc.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı Yayınları. http://ttkb.meb.gov.tr/www/ogretim-programlari/icerik/72 adresinden 08.01.2017 tarihinde erişildi.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018a). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı Yayınları. http://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=343 adresinden 27.01.2019 tarihinde erişildi.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018b). *Ortaöğretim fen lisesi matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı Yayınları. http://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=340 adresinden 27.01.2019 tarihinde erişildi.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB] Ders Kitapları ve Eğitim Araçları Yönetmeliği (2021, 14 Ekim). *Resmî Gazete* (Sayı: 31628). https://www.resmigazete.gov.tr/eskiler/2021/10/20211014-1.htm adresinden 27.10.2022 tarihinde erişildi.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 249-266. https://doi.org/10.1007/BF01273731

Nicholson, N. R. (2019). *A transition to proof: An introduction to advanced mathematics*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, Taylor & Francis Group.

Norum, K. E. (2008). Artifact analysis. In L. M. Given (Ed.), *The Sage Encyclopedia of qualitative research methods* (Vol 1, pp. 23-25). Los Angeles, CA, USA: Sage Publications, Inc.

Novak, J. D., Gowin D. B., & Johansen, G. T. (1983). The use concept mapping and knowledge vee mapping with junior high school science students. *Science Education*, *67*(5), 625-645. https://doi.org/10.1002/sce.3730670511

Otten, S., Gilbertson, N. J., Males, L. M., & Clark, D. L. (2014). The mathematical nature of reasoning-and-proving opportunities in geometry textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(1), 51-79. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.857802

Otten, S., Males, L. M., & Gilbertson, N. J. (2014). The introduction of proof in secondary geometry textbooks. *International Journal of Educational Research*, *64*, 107-118. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.08.006

Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* (3. baskıdan çeviri) (M. Bütün & S. B. Demir, Çev. Haz.). Ankara: Pegem Akademi.

Plumpton, C., Perry, R. L., & Shipton, E. (1984). *Proof*. London, UK: Macmillan Education Limited.

Polat, K., & Akgün, L. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat kavramına ve ispat yapmanın zorluklarına yönelik görüşleri. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 43, 423-438. https://dx.doi.org/10.9761/jasss3219

Roberts, C. E. (2015). *Introduction to mathematical proofs: A transition to advanced mathematics* (2nd ed.). Boca Raton, FL, USA: CRC Press, Taylor & Francis Group.

Rossi, R. J. (2006). *Theorems, corollaries, lemmas, and methods of proof*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Shavelson, R. J. (1972). Some aspects of the correspondence between content structure and cognitive structure in physics instruction. *Journal of Educational Psychology*, *63*(3), 225-234. https://doi.org/10.1037/h0032652

Stefanowicz, A. (2014). *Proofs and mathematical reasoning*. Birmingham, UK: University of Birmingham.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(4), 258-288. https://doi.org/10.1080/10986060903253954

Stylianides, G. J. (2014). Textbook analyses on reasoning-and-proving: Significance and methodological challenges. *International Journal of Educational Research*, *64*, 63-70. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.01.002

Sundstrom, T. (2014). *Mathematical reasoning: Writing and proof*. California, USA: Pearson Education.

Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı [TTKB]. (2018). *2018 Talim ve Terbiye Kurulu kararları (99 Sayılı Karar)*. https://ttkb.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2020_02/21170711_fihrist_2018.pdf adresinden 28.11.2022 tarihinde erişildi.

Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı [TTKB]. (2019). *2019 Talim ve Terbiye Kurulu kararları (8 Sayılı Karar)*. https://ttkb.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2020_02/21170711_fihrist_2019.pdf adresinden 28.11.2022 tarihinde erişildi.

Taylor, J., & Garnier, R. (2014). *Understanding mathematical proof*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, Taylor & Francis Group.

Tessmer, M., Wilson, B., & Driscoll, M. (1990). A new model of concept teaching and learning. *Educational Technology Research and Development, 38(1),* 45-53. https://doi.org/10.1007/BF02298247

Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(3), 253-295. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.3.0253

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Favuel & J. Van Manen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 201-240). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ulualan, E. (Ed.). (2021). *Ortaöğretim fen lisesi matematik 9 ders kitabı*. Ankara: Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Van Hiele, P. M (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, Florida: Academic Press, Inc.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 101-119. https://dx.doi.org/10.1023/A:1015535614355

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (10. baskı). Ankara: Seçkin Yayınevi.

Zeybek, Z., Üstün, A., & Birol, A. (2018). Matematiksel ispatların ortaokul matematik ders kitaplarındaki yeri. *İlköğretim Online*, *17*(3), 1317-1335. https://dx.doi.org/10.17051/ilkonline.2018.466349

.