EKONOMİK UYGULAMALAR İLE BİRLİKTE STABİLİTE TEOREMLERİ[x]

Paul Champsaur, Jaques Dreze
ve Claude Henry
Çev:Dr.Faruk Alpaslan[xx]

Son yıllarda stabilite analizleri iki yönde gelişme göstermiştir. Bu gelişmeler iktisadi uygulamalar için yararlı olmuştur. Söz konusu gelişmelerden birincisi; diferansiyel denklemlerin sağ-taraflarında ki açıklarla, diğeri ise; denklemlerin sağ-taraflarındaki çoklu değerlerle ilgilidir.

Bu bakalede (5 ve 6 ncı bölümlerde ve ekte) diferansiyel denklemlerin benzer şekilleri ve iktisadi problemlere uygulanma biçimleri ortaya konmaktadır. Burada açıklanan husus bir ekonomideki özel ve kamu malları ile ilgilidir. Makalede, bir fiyat bileşimi rehber alınarak ekonomide global bir denge içinde kaynaklar açısından kamu malları için kantitatif bir planlama prosedürünün nasıl yapılabileceği ve özel malların piyasaya nasıl etkili bir şekilde dağıtılacağı gösterilmeye çalışılmıştır. Planlama prosedürünün ayrı bir yerinde de modelde kullanılan ve tanımları yapılmış değişkenlerin yeniden düzenlenmesi ile ilgili olarak yarı-denge kurulmuş ve böylece model bir bütün halinde gösterimiştir (bölüm 4).

1.1. YAKIN ZAMANA KADAR STABİLİTE: Hemen hemen her zaman tanımlanabilen bir t zamanında, önce sürecin ilk durumu ele alınarak süreçteki değişmeler bazı çözüm metotları ile belirlenmiş ve böylece de ekonomilerde kantitatif süreçler üzerine bir çok çalışmalar yapılmıştır. (Bak, Mesela.,[29,sayfa.189 veya 30, sayfa. 618]), Diferansiyel denklem sistemleri ile belirlenmiş

(x) Paul, Champsaur.,Jacques, Dreze.,And Claude.Henry.: Stability Theorems With Economic Applications" Econometrica, Vol.45,March.1977,Num.2,p.p.273-294.

(xx) A.Ü.İşletme Fakültesi Üretim Yönetimi Bölü Asistanı.

süreçler için, bazı teoremlerin ispatları yapılmak suretiyle tek veya ardışık çözümler sağlanmaktadır. Bu işlemler yapılırken süreç için gerekli olan teoremler bazı metotlarla ispat edilir ve böylece Lipschitz şartını sağlayan (süreklilik esas olmak üzere) diferansiyel denklemlerin sağ-tarafları ile ilgili tek bir değerin bulunmasında çalışılır (Bak, Mesela.,[7]). Ne varki; ekonomide faiz yapısı ile ilgili olan bir çok dinamik süreçler için[1] yukarıda ifade edilen hususlar sınırlıdır. Walrasian Elyordamı metoduna benzer bir örnek alalım: Aşırı talebe bağlı olarak fiyat düzenlenmelerini de içine alarak tanımlanan tutarlı bir fonksiyon içinde i mallarına ait fiyat faktörleri sonludur. Fakat taleb negatif değildir. Her zaman böyle bir problemi açıkça tanımlamak mümkündür. Aşırı taleb fonksiyonu üzerinde yapılacak kısıtlayıcı bir hareketin maliyeti oldukça fazla olacaktır. Ayrıca, sırf bu duruma uygun düşecek iktisadi bakımdan pekte kolay ikna edici olmayan bir önerinin ileri sürülmesi, direkt olarak bizi tatmin etmeyen her hangi bir süreçle karşı karşıya getirebileceği gibi, arzu ettiğimiz neticeleri hiçe sayan bir yöntemlede karşılaşmamıza neden olabilir.

Diferansiyel denklem sistemleri ile tanımlanmış süreçler için çözümler elde etmek zor değildir, fakat denklemlerin sağ tarafları için özellikle tek değerli eşitlikler için ilk ve gerekli şart sürekli olmalarıdır. Keza, bu şekilde yapılan formülasyonların analizi diferansiyel denklem formülasyonlarından daha ağır değildir. Ama süreklilik olmadığında elde edilen sonuçlar pek sağlam olmamaktadır. Uzawa (29)ve Karlin'in (19) yaptığı gibi, Walrasian Elyordamı analizi üzerinde durulduğunu yeniden düşünelim. p fiyat düzenlemelerini kapsayan bir parametreyi tanımlasın ve p, $\varrho < \varrho_0$ için sadece ve sadece pozitif bir ϱ_0 ı göstersin. $\varrho = \varrho_0$ olunca süreç dengede olacaktır. Bu ise temel bir problemi doğuracaktır. Başka bir ifade ile, Malinvaud, "eğer ϱ nın değeri daha küçük seçilirse, fiyat düzenlemelerinin hızı yavaş seyredecek

---

(1) Veya tamamen daha farklı olanlarla ilgili olarak; Bak, Mesela., Moreau(24) ve kontrol teorisi üzerine Slemrod (28).

ve programlamada daha az sayıda iterasyon değişmeleri yapılacak ve böylece de sistem tatminden uzak olacaktır. Eğer ɛ nun değeri büyük seçilirse, p^1, p^2, p^3 fiyat vektörleri bir optimal vektör uzayından uzak olacaktır" demektedir.[20 sayfa,185]. Yani sürekli ve fakat yumuşak bir fiyat düzenlemelerinde ki iterasyonlar için reel fiyat taleb edilecektir.

Geçen beş yıl içinde, ekonomik uygulamalara yönelik yararlı stabilite analizleri yapılmıştır. Diferansiyel denklemler üzerine yapılan çalışmaların bir grubu eşitliklerin sağ-taraflarının süreksiz(çok değerli) olmaları durumlarını kapsadı. Bu yönde yapılan çalışmalar ekonomik problemlere direkt olarak uygulanmıştır. İkinci ve başka bir grub çalışmalar ise, oyun teorisi problemleri ile matematiksel programlama problemleri üzerine olmuştur. Bu makalede bir takım görüşlerin ışığı altında iktisadi problemlere uygulanan bazı modeller ve yukarıda açıklanan benzer çalışmalardan bir nebze bahsedilecektir. Daha önce ifade ettiğimiz Malinvaud'un görüşlerine ihtiyaç duyduğumuzdan dolayı makalemizi çokaşamalı süreçler üzerine bir deneme olarak sunduk.

1.2. Süreksiz diferansiyel denklemleri üzerine yapılan bazı çalışmalar kamu mallarının analizleri için kullanıldı. Malinvaud [21] ve Dreze ile Vallee Poussin [8]yaptıkları çalışmalarda MDP sürecine ihtiyaç duymuşlardır. Sürecin tanımının yeterliliği süreksiz diferansiyel denklemlerin sağ taraflarına bağlıdır (negatif miktar düzenlemeleri output sıfır alınarak giderilir). Böylesi yeterli olan bir süreçte tek bir şekilde çözüm sağlanır.[14]. Nazik ve tehlikeli bir nokta sürecin her türlü spesifik tartışmaya açık oluşudur.

Genellikle diferansiyel denklemlerde eşitliklerin sağ-tarafları çokdeğerlidir. Bu denklemlerle ilgili olarak hem maximal yeknasaklık(1) ve hemde üst yarı-sürekliIik Attouch ve Damlamian [2] tarafından daha genel teoremlerle ifade edilmiştir. Ekte bu teoremlerle ilgili bilgiler verilmiştir. Bütün bu teoremlerde açıklanan hususlar şunlardır: denklemlerin sağ-tarafları;üst yarı-

(1) Maximal yeknasaklığın daha iyi bir örneğini alt yarısürekli konveks fonksiyonların alt diferansiyelleri (kısmi diferansiyel) verir.

-sürekli, sık ve konveks çok değerli fonksiyonlarla, maximal yeknasaklı çok değerli fonksiyonların toplamlarıdır. Fiyat üzerindeki sınırlamalara ve düzenlemelere bağlı kalınarak bu teoremler standart Walrasian Elyordamı sürecine uygulanabilir. Fakat direkt olarak MDP sürecine uygulanamaz. Çünkü bu durumda süreksiz diferansiyel eşitliklerin sağ-tarafları maximal yeknasaklı ve çok değerli fonksiyonları kapsamayabilir.

Metod, MDP süreci için planlanmıştır. Zira, bu metot değişik birçok durumlar için faydalı olmuştur. Fiyata bağlı kalınmadan tanımlanmış olan Heal süreci([11] ve[12])üretken faktörlerin etkili bir şekilde dağıtımı için birçok firma açısından fayda sağlamıştır.

Kayda değer hipotezler altında (Bak,Ek.,) çözümün tek oluşu üzerinde hernekadar enteresan sonuçlar elde edilmiş isede, bu sonuçlar Fisher'inde yaptığı çalışma da olduğu gibi Walrasian Elyordamı analiz proseslerine uygulanabilmiştir.[10]. Bu makalede, düşünülen ve analizi yapılan diferansiyel sistemlerin tek bir sonucu kapsamasının genelleştirilemiyeceği hususu da anlatılmıştır.

Ne varki, her hangi bir ispata imkan veren şartlar altında, [O,T] zaman aralığını izleyen süreç ile ilgili yörüngeler seti(yörüngelerle ilgili birincil durumlar verildiğinde), sürekli fonksiyonlar uzayının alt setini teşkil etmektedir. Çokdeğerli fonksiyon diyelimki S_T, alternatif birincil durum nazari dikkate alındığı zaman, fonksiyon [O,T]zaman aralığında yörüngeler setinin bütünü ile beraber üst yarı-süreklilik göstermektedir. Burada ifade edilen iki özellik(altset-üst yarısüreklilik) Castaing ve Valadier'in [5] birlikte yaptıkları ve Valadier'in [31] yalnız başına yaptığı çalışmalarda elde edildiği gibi tatmin edici de olmuştur. Bu konu ile ilgili teoremler ekte verilmiştir. Tanım olarak denilebilirki; elde edilen yarı-satbilete bütünüyle yörüngelerin özelliklerini de içine alır. Henry[16] tarafından ispatı yapılmayan ve fakat oldukça gerekli olan bir teoremin genel ispatı yapılarak bölüm 6 da verilmiştir. Yukarıda tanımına çalışılan çokdeğerli fonksiyon S_T nin sıklık değeri ve üst yarı-sürekliliği bazı varsayımlara bağlıdır ve Lyapunov bir fonksiyondur. Lyapunov fonksiyon ise süreklidir, birbirine yaklaşan değerlerden bir limit değeri sonsuza giderken [0,T] zaman aralığı için ilk etapta belli sınırlamalar altında sadece ve sadece sonlu bir zaman aralığı süreci dengelemektedir.

Temelde bazı hipotezlerin ışığı altında diferansiyel denklemlerin stabilite teoremleri bölüm 6 da gösterilmiş ve ispatları yapılmıştır. Tıpkı Zangwill'in [32] teoremlerinin ispatlanarak genelleştirilmesi gibi. Bölüm 6 da çok değerli fonksiyonlar düşünülür, diyelimki A, bu fonksiyonda t+1 süresinin çözüm seti tüm t zamanı çözüm setleri ile birleşiyorsa-çakışıyorsa- t+1 üst yarı-süreklidir ve sıktır. Daha açık bir ifade ile söylemek gerekirse, bu çokdeğerli A fonksiyonu daha önceden tanımı yapılan S_T fonksiyonunun bir benzeridir.(x)

Üst yarı-süreklilik ve sık-değerlilik, yarı-stabiletenin tesisedilmesinde bir Lyapunov fonksiyonu ile beraber tanımlanmıştır. Burada yapılan ispatın can alıcı noktası süreklilik varsayımları ve tek değerli fonksiyonların sınırlayıcı şartları altında Uzawa'nın kullanmış olduğu metoda yöneliktir. Gerek Lyapunov fonksiyonu ve gerekse Uzawa'nın geliştirdiği metod aynı sonucu verir. Başka bir yaklaşım ise, bir vektörel Lyapunov fonksiyonunun çekirdeğini kullanarak Maschler ve Peleg [23] in gösterdikleri çözüm teknikleridir.

1.3. Bölüm 5(teori) ve bölüm 6(stabilite) bazı matematiksel formülasyonların ekonomik problemlere uygulanmaları ile ilgilidir. Bu bölümlerde gösterilen formüller bölüm 2, 3, 4 deki materyallardan bağımsızdır. Bölüm 2, 3, ve 4 tam tersine kendi içinde sınırlıdır da. Ayrıca teorem 6.1. ve 6.2. den de temelde farklı değildir.

Bölüm 2 de ekonomik bir model gösterilmiştir. Bu bölümde ekonomi hem özel ve hemde kamu malları ile tanımlanır (keyfi olarak seçilen sonlu sayılarla). İfadeleri basitleştirmek için -ekonominin tüm üretken sahalarında <u>merkeziyetçilik olmadan</u>- sadece <u>ekonominin</u>

(x) Gerçekten, teorem 6.2. teorem 6.1. in benzer bir sonucu olacaktır, doğrusal fonksiyonlarla ilgili t+1 ve t nin çözümlerinin birbirine bağlı olduğu bilinmektedir.

toplam üretim setlerini tanımlamaktayız. Diğer taraftan, fayda fonksiyonu ile üretimin ayrıştırılabilirliği (farklılaştırılabilirlik) ve konveksliliği yönünden standart varsayımlara giriş yaptık.

Bölüm 3 de ayrıştırılabilir (farklılaştırılabilir) kamu malları ve özel mallar üzerine yararlı bir optimizasyonun ekonomi için nasıl bir hayali-denge (Pareto Optimumu) meydana getirileceği gösterirdi. Bu itibarla ayrı ayrı optimizasyon teknikleri yeterli olabilecektir. Diyelimki, Özel mallar için Walrasian Elyordamı metodu ve kamu malları için MDP süreci. Malinvaud [22] tarafından yapılan analizde global bir denge içinde daha üst düzeydeki süreç görünümü ile mevzii bir stabiliteye yönelik durum belirlenmektedir. Keza, Bölüm 3 de izlenen yaklaşımla fiyat rehber alınarak özel ve kamu malları için gerekli çözüm, ispatlar yapılmaktadır. Bu bölümde işaret edilen 2 problem şudur: Birisi özel malların piyasaya tahsisi diğeri ise kamu malları için yapılacak bir kantitatif planlama prosedürüdür. Konumuzu ferdi davranış biçimleri ve tercihleri etrafında topladık. "Hür-Sürücü Problemi" diye adlandırılan probleme değinmedik.

Bölüm 4 de başka bir boşluğu doldurur, MDP sürecinin diferansiyel denklemler formülasyonuna bir giriş yapılarak bu girişin başlangıcında hızlı düzenlemelerle ilgili olarak yapılan temel açıklamalar için değişken bir birimin kullanılma biçimi gösterilir. Kesikli formülasyon, Lyapunov fonksiyonunun tam monotonik olma durumu ile tutarlı kalmak kaydı ile seçilen sabit bir düzenleme biriminin kullanılması suretiyle elde edilir (verilen uygun bir set sınırı ve bu set sınırının sonlu zaman aralığı için uygun oluşu). Uygun seçilmiş bir ünitenin ıslahı uzunca bir iş değildir, ünite iki eşit parçaya bölünür ve işlem bu şekilde tamamlanır. Tamamlanan işlem tekrardan başka bir şey değildir. İşlemin sonunda keyfi olarak seçilen bir birimle yapılan düzenlemeler yeniden mütalâa edilir. Böylece sürecin yarı dengesi kurulmuş olur. Bir eşitlikte eğer birbirini izleyen çözümlerin bir limit noktası yoksa, böylesi noktaların oluşturduğu setlerin yakınlarında bir limit noktası vardır ve sabit bir düzenleme ünitesi de (isteğe bağlı seçilmiş ve fakat pozitif) bulmak mümkündür. Ne varki, sürecin bir bütün olarak çözümü için sonsuz zaman boyutunda bir limit noktasının muhakkak varolduğu unutulmamalıdır. Limit noktalarının farklılıkları en sonunda sabit bir ünitenin düzenlenmesi ile sadece sonlu zaman boyutu için uygunluk sağlıyacağı bilinmelidir.

2. ÖZEL VE KAMU MALLARI İLE İLGİLİ BİR EKONOMİ

2.1. Dreze ve de la Vallée Poussin [8] in yaptıkları gibi sadece tek bir notasyon kullanılmaktadır. Varsayalımki, bir ekonomide n adet tüketici $(i=1,\ldots,n)$ m adet kamu malları $(k=1,\ldots,m$ e giderken) ve L adet özel mallar $(h=1,\ldots,$ L giderken) vardır.

$X \in R^m_+$ toplam özel malları ve $(x,y^i) \in R^{m+L}_+$ i tüketicilerinin tüketimini göstersin. İ sayıdaki tüketicilerin tercihleri önceden yaptıkları ön tercihleri toplamı Z_i tüketim seti R^{m+L}_+ şeklinde gösterirsin. Burada $P \subset R^{1+m}_+$ gibi bir üretim seti mevcuttur; P tüm yığınlar setidir, Tüketim ve üretim değişmeleri bu P seti içinde olacaktır, ayrıca verilen teknik bilgi ile ekonominin birincil kaynaklarını da bu P seti içine alacaktır. Nevarki, böylesine bir olayın vuku bulunuşunu açıkça takdim edemeyiz.

Tek bir kaynak tahsisi z, $(x,y^1,\ldots,y^n)$ vektörünün (n+1) inci değeridir. Öyleki $x \in R^m_+$ ve bütün i ler $y^i \in R^L_+$ dır.

Eğer $(x,y) \in P$ ki burada $y=\sum_{i=1}^{n} y^i$ ise, z nin tahsisi uygundur. z nin bu şekilde seçilmesi ile tüm dağıtım setlerini elde etmek mümkündür. Özel mallarda kararlaştırıldığı gibi (h=1) alınan tek bir tahsis tek işaretli ve değeri ise bire eşit olacak şekilde seçilir.

Tanım: 2.1. Bir ekonomide eğer z tahsisi uygun bir biçimde seçilmiş ise diğer tahsisler ($\bar{z}$) uygun değildir, her i için $(\bar{x}, y^{-i}) \succ (x, y^{i})$ dir. Özel ve kamu malları ile ilgili bu ekonomide fiyat sistemi negatif olamaz (n.m+1), her özel mal h için i tüketicileri açısından (p=1 ile) belirli bir P_h fiyatı $(q^1, \ldots, q^n, p)$ ve kamu malları için ferdileştirilmiş $q^i = (q_1^i, \ldots, q_m^i)$ vektörü vardır.

Tanım:2.2. Kamu ve özel mallarla ilgili bu ekonomide hayali bir denge için bir fiyat sistemi $(\bar{q}^1, \ldots, \ldots \bar{q}^n, \bar{p})$ ve uygun bir kaynak tahsisi $(\bar{x}, y^{-1}, \ldots, y^{-n})$ alınarak;

(1) $\forall (x, y) \in P$, $\bar{p}.\bar{y} + \bar{q}.x \geq \bar{p}.y + \bar{q}.x$ ve burada $\bar{q} = \sum_{i=1}^{n} q^{-i}$

(2) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $(x, y^i) \in R_+^{m+1}$ ve $(x, y^i) \succsim_i (\bar{x}, y^{-i})$

$\Rightarrow \bar{p}.y^i + q^{-i}.x \geq \bar{p}.y^{-i} + q^{-i}.x$ bağıntıları kurulabilir.

Yukarıda tanımı verilen hususlar bölüm 2, 3, ve 4 de kullanılmaktadır. Özellikle, varsayımların bir bütün olarak ifade edilmeleri için her duruma uygun düşen önerme ve teoremler anlatılmalıdır (her ne kadar az hipotezleri ifade etmek uygun düşerse de).

Hipotez:1. P sık bir Konveks settir. Burada konkav ve sürekli değişebilir bir fonksiyon;

$f: R_+^m \times R_+^{L-1} \rightarrow R$ vardır ve öyleki,

(3) $(x, y) \in P \Leftrightarrow (x, y) \in R_+^{L+m}$ ve $y_1 \leq f(x, y_2, \ldots, y_L)$,

(4) $0 < f(0, 0, \ldots, 0)$,

(5) Tüm yönleri ile yapılan ispatlarda f artan bir fonksiyon olarak alınmamaktadır.

Hipotez:2. Her i için bir yarı konkav ve sürekli değişebilir bir fayda fonksiyonu $R_{+}^{L+m} \rightarrow R$ gösterilebilir.

(6) Tüm yönleri ele alınarak yapılan fonksiyonel ilişkilerde u^i azalan bir fonksiyon değildir.

(7) u^i, bir birim özel mal tüketildiğinde kesinlikle artan bir fonksiyon olmaktadır.
(zira, $\partial u^i/\partial y^i > 0$).

(8)Ayrıca, $y_1^i = 0 \Rightarrow \partial u^i/\partial y_h^i = 0$ (h=2,.......,L) ve

$\partial u^i / \partial x_h = 0$ (k=1,.......,m) dir.

Hipotez 2 nin bir tüketim yığınını gösterdiğini kaydedelim. Bu taktirde $(x,y^i) \in R_T^{L+M}$, yani $y_1^i = 0$ diğer tüm tüketim yığınlarında asla tercih edilemez. Kolaylık olsun diye tanım 2.1. de bir Pareto Optimali için seçilmiştir. Tanımdaki değişkenler bire eşittir, 1 ve 2 nolu hipotezlerin ışığı altında da fayda fonksiyonu yarı-konkavdır.

NOTASYON:

$$\Psi_h = - \frac{\partial f}{\partial y_h} \qquad (h=2,\ldots,L)$$

$$\gamma_k(z) = - \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (k=1,\ldots,m)$$

$$\pi_h^i(z) = \frac{\partial u^i}{\partial y_h^i} \Big/ \frac{\partial u^i}{\partial y_1^i}, \qquad (h=2,\ldots,L\ ;i=1,\ldots n)$$

$$\pi_k^i(z) = \frac{\partial u^i}{\partial x_k} \Big/ \frac{\partial u^i}{\partial y_1^i} \qquad (k=1,\ldots,m;\ i=1,\ldots,n)$$

$\Psi_h(z)[\Psi_k(z)$ ye bağlı olarak] h özel malların marjinal maliyetidir.(k da kamu malları için) Benzer şekilde $\pi_h^i(z)[\pi_k^i(z)$ ye bağlı olarak] h özel mallar ile i tüketicileri için marjinal ikame haddidir. Tüm bunlar sayısaldır (zira, kullanılmış olan k ve h genel notosyonu gösterir ve böylece karşılıkta doğmaz).

Şimdi biz bu durumda bu görüş ve tanımlarla donatılmış olan yanönerme ve bu önermelerin tabii sonuçlarını izlemek zorundayız (verilecek ispatlar standart değildir).

YANÖNERME:2.1. Kaynak tahsisi z bir Pareto Optimali ise, tek bir fiyat sistemi vardır ve ayrıca her çift $(z, q^1, \ldots q^n)$ yalancı dengededir.

YANÖNERME:2.2. Bir yalanca dengede her bir tahsis bir Pareto Optimalidir.

YANÖNERME:2.3. Çift$(z,(p,q^1,\ldots q^n))$ de z en uygun tahsistir. Bu nedenle de $\Psi_i, y_1^i > 0$ ve $(p,q^1,\ldots,q^n)$ bir fiyat sistemidir ve ayrıca aşağıdaki ilişkiler mevcutsa bir yalancı denge vardır.

(9) $\Psi_h(z) \geqq P_h$ ve $y_h > 0 \Rightarrow \Psi_h(z) = P_h$ $\quad (h=2,\ldots,L)$ bütün i ler için

$\Psi_k(z) \geqq q_k$ ve $x_k > 0 \Rightarrow \Psi_k(z) = q_k$ $\quad (k=1,\ldots,m)$ bütün i ler için

(10) $\pi_h^i(z) \leqq P_{h_i}$ ve $y_h^i > 0 \Rightarrow \pi_h^i(z) = P_h$ $\quad (h=2,\ldots,L)$

$\pi_k^i(z) \leqq q_k^i$ ve $x_k > 0 \Rightarrow \pi_k^i(z) = q_k^i$ $\quad (k=1,\ldots,m)$

Böylece 2.1., 2.2., ve 2.3. yan önermeleri açıkça gösterilmiş oldu.

YARDIMCI ÖNERME:2.1. Aşağıdaki bağıntılar mevcutsa bütün i ler için uygun bir z tahsisi vardır ve $\forall_i, y^i_1 > 0$ Bir Pareto Optimalidir.

(11) $\pi^i_h(z) \leq \gamma_h(z)$ ve $y^i_h > 0 \Rightarrow \pi^i_h(z) = \gamma_h(z)$ (h=2... ..., L)

(12) $\sum_{i=1}^{n} \pi^i_k(z) \leq \gamma_k(z)$ ve $x_k > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \pi^i_k(z) = \gamma_k(z)$

(k=1,......,m)

2.2. Hazırladığımız düzen içinde daha sonraki bölümlerde sadece özel mallar için yararlı bir modelden bahsettik ve sadece özel malları sayısal aldık. Verilen uygun bir z tahsisi ile "Özel Malların Alternatifleri" nin setlerini tanımlamaya çalıştık. $Y(\bar{z})$ yoluyla;

$Y(\bar{z}) = \{z \in Z \mid x = \bar{x}\}$ ve "Özel Malların Nisbi Optimali" nin seti olarak $E(\bar{z})$ yoluyla;

$E(\bar{z}) = \{z \in Y(\bar{z}) \mid \forall_i, (x, y^i) \succsim_i (\bar{x}, y^{-i})$ ve

$\nexists \hat{z} \in Y(\bar{z})$ ile, $\forall_i (\hat{x}, \hat{y}^i) \succ_i (x, y^i)$ eşitliklerini yazdık.

$Y(\bar{z})$ kamu malları verilen bir üretim miktarı $\bar{x}$ ile tutarlıdır ve alternatif tahsisler setidir (aynı şekilde özel mallar içinde söylenebilir). $E(\bar{z})$, $Y(\bar{z})$ nin alt setidir, $\bar{z}$ rasyonel ferdi tahsislerle ve $Y(\bar{z})$ de Pareto Optimali ile ilgilidir. $Y(\bar{z})$ özel mallarla ilgili bir ekonomi için verilen sabit bir $\bar{x}$ seviyesinde muhafaza edilen x miktarıyla elde edilir. Ayrıca, $E(\bar{z})$ eğer $\forall_i, y_i^{-i} > 0$ ise sıktır. Bu nedenlede $E(\bar{Z})$ nin her elemanı 2.1. yardımcı önermesinde verilen (11) şartını tatmin eder.

Alınan uygun bir $\bar{z}$ tahsisini "Özel Malların Alternatifler Seti" ile tanımlayabiliriz; $X(\bar{z})$ ye bağlı kalmak kaydı ile,

$X(\bar{z}) = \{ z \in Z \mid y_h^i = y_h^{-i} \quad i=1,\ldots\ldots,n \quad h=2,\ldots\ldots, L \}$

ve "Kamu Mallarının Nisbi Optimal Seti" tanımından hareketle,

$F(\bar{z}) = \{ z \in X(\bar{z}) \mid \forall_i, \ (x,y^i) \succsim_i (\bar{x},y^{-i})$ ve

$\nexists \hat{z} \in X(\bar{z})$ ile $\forall_i, \ (\hat{x},\hat{y}^i) \succ_i (x,y^i)$

yazılabilir.

$X(\bar{z})$ alternatif tahsislerin altsetidir. Ayrıca tutarlı ve verilen bir üretim seviyesi ile özel mallar için bireysel tüketim miktarlarını kapsar.

$F(\bar{z})$, $X(\bar{z})$ nin altsetidir, $\bar{z}$ rasyonel bireysel tahsislerle ve $X(\bar{z})$ de Pareto Optimali ile ilgilidir. $X(\bar{z})$, n kamu malları ile ekonomi için uygun tahsisler setini oluşturur. Verilen sabit bir y_h^{-i}, $i=1,\ldots\ldots,n$; $h=2,\ldots\ldots$, L seviyesinde muhafaza edilen y_h^i miktarı tek bir özel malı gösterir ve ayrıca $F(\bar{z})$ de, eğer $\forall_i, y_i^{-i} > 0$ ise $F(\bar{z})$ sıktır ve bu fonksiyonun bütün birimleri 2.1. yardımcı önermesinde gösterilen(12) şartını tatmin eder. Bu son cümlemizi son ve sondan bir evvelki cümlelerimizle açıklamıştık.

YARDIMCI ÖNERME 2.2. Eğer $\forall_i, y_i^i > 0$ ve $\bar{z} \in E(\bar{z}) \cap F(\bar{z})$ ise $\bar{z}$ Pareto Optimalidir.

3. ÖZEL ve KAMU MALLARI İLE İLGİLİ BİR EKONOMİ İÇİN GLOBAL STABİLİTE TEOREMİ

Z nin bütün birimlerinin daima Pareto Optimali olabileceğini gösterip, süreç içinde alacağımız Q ile ardışık uygun tahsislerin $(z_0, z_1, z_2, \ldots\ldots z_{q-1}, z_q)$ limit noktasını aşağıdaki gibi tanımlamaya çalışacağız.

SÜREÇ Q: Birinci aşama: $\forall_i, y_j^i > 0$ olmak üzere Z içinde seçilen z_0,

İkinci aşama: Eğer q tam sayılı değilse $E(z_{q-1})$ içinde seçilen z_q,

Eğer q tamsayılı ise $F(z_{q-1})$ içinde seçilen z_q, alındığı zaman Q için seçimler seti $\{z_0, z_1, z_2, \ldots\ldots z_{q-1}, z_q\}$ bir yörünge olacaktır.

Hipotez 2 nin ve F(z) ile E(Z) altsetlerinin tanımlarının sonucu gibi, düşünülen her bir tahsis tam sayıların pozitif miktarlarına tekabül eder.

TEOREM:3.1. Q daki tüm yörüngelerin limit noktaları veya tek bir limit noktası bir Pareto Optimalidir.

Teorem 3.1. in ispatı bir yanönerme yardımı ile yapılır. Bu teorem ayrıca teorem 6.2.nin uygulanmasına açıkça izin verir. Yanönermeyi ispat etmeden teorem 3.1. i standart saydık.

YANÖNERME:3.1.E(.) ve F(.) çokdeğerli fonksiyonlarında Z nin altsetleri sık ve üst yarı-süreklidir.

TEOREM 3.1. in İSPATI: Konumuz açısından düzenlediğimiz teorem 6.2. de bölünemez q için $A(Z)_q = F \circ E(Z_q)$ gibi bir fonksiyonu tanımladık. Çünkü, E ve F sık setler üzerinde tanımlanmış yarı sürekli çok değerli fonksiyonlardır. Onların bu durumuna karşın A da çokdeğerli ve yarı süreklidir.(Bak,Mesela.,Berge'de [13] teorem 1).

Altıncı bölümde aldığımız q, q/2 ye eşittir.

Sonuç olarak $V(z)=\sum_i u^i(z)$ eşitliğini yazabiliriz. Çünkü V süreklidir ve Z de sıktır. Keza, V, $\{z_q\}$ ardışık düzeninde azalan bir fonksiyon değildir. Burada mevcut sonlu bir $\bar{V}=\lim_{q\to\infty} V(z_q)$ ilişkisi de vardır.

Teorem 6.2. nin uygulanması sonucu $Z \in A(z)$ elde edilir, $V(z')=V(z)$ eşitliğinde bulunan z', A(z) içinde de bulunur. $z' \in A(z)$ gibi her i için $u^i(z') \geq u^i(z)$ bağıntısının varolduğunu bilmekteyiz. Bütün eşitlikler $V(z')=V(z)$ eşitliğinden izlenebilir. Yani, $u^i(z')=u^i(z)$ tüm iler için. Şimdi bu durumda $z \in F(z'')$, $z' \in A(\bar{z})$ ile $z'' \in E(z)$ nin değerleri fonksiyona katılmıştır. Bu durumu $\forall_i=1,\ldots,n$, $u^i(z'')=u^i(z)=u^i(z')$ eşitliği izler. Zira, $z'' \in E(\bar{z}'')\cap F(z'')$ dir. Böylece yardımcı önerme 2.2.nin yardımı ile z'' Pareto Optimali kılınır. Zaten z, tüm i ler için z'' den farklı bir şey değildir. Ayrıca $z \in E(z)\cap F(z)$ dir. Bu yüzden $z \in A(z)$ dir.

Teorem 3.1. in yardımı ile hiyerarşik olarak dinamik süreçlerin neyi içerdiği gösterilebilir. Gerçekten birisi yapılan işleme uygun olarak rakip bir başka denge içinde aşamaların bölünebilirliğini düşünebilir(özel mallarla ilgili ekonomiler için sabit olarak muhafaza edilen x_{q-1} i göstererek). Süreçteki bütün dengeler Walrasian Elyordamı metoduna uygun olarak tezahür edebilir. Stabilite özellikleri açısından bu konuda yapılan çalışmalar literatürde oldukça fazladır. Ayrıca, birisi de MDP sürecine bağlı kalarak aşamaların bölünemezliğini düşünebilir (sabit i=1,....,n h=2,...., L için bireysel rasyonellik içerisinde yalancı dengenin oluşabileceğini ileri sürebilir).

Tüm bu yaklaşımların gerektiğine Malinvaud[22] değinmektedir ve realist bir planlama sürecinde kamu malları miktarlarının belirlenmesi ve özel malların tahsisi için bir fiyat mekanizmasının gerektiğini söylemektedir. Hatta, süreçle ilgili olarak Malinvaud'un [22] yaptığı çalışma bizim global denge yaklaşımımıza benzemez. Yine, Malinvaud modeli kesikli terimlerle formüle edebilmiştir. Bu konu ile ilgili olarak açıklanacak hususlar bölüm 4 de toplanmıştır.

4. BİR MDP PROSEDÜRÜNDEKİ KESİKLİ TANIMLAMA

4.1. Bu bölümde diğer sayısal değerlemelerden hareketle özel malların tahsisleri sayısal olarak alınacak ($\bar{y}_h^i$ $i=1,....,n$; $h=2,....,L$) ve değişen kamu mallarının üretimi ise sabit kabul edilecektir. Her hangi bir tahsisin değişen birimlerini yeniden tanımlamaya çalışalım. z gibi isimlendirilmiş bir programlama incelenecektir. Sayılar için 1 endeksini (h=1) unutacağız. Böylece y^i, i tüketicilerine ait tüketimin sayısal miktarını gösterecektir. Özel malların $h=2,....,L$ miktarını unutsak bile, fayda ve üretim fonksiyonlarında miktarların sabit olacağını kabul edeceğiz. Bu nedenle, hipotez 2 yi tatmin eden bir fayda fonksiyonu $U^i:R^{m+L}\rightarrow R$ ve her i ler için hipotez 1'i tatmin eden $f:R_+^m\rightarrow R$ gibi bir üretim fonksiyonu alacağız.

$\sum_i^n =1$, $y^i \leq f(x)$ ise, $Z \in R_+^{m+n}$ gibi bir programlama yerindedir. ve uygun programların seti z dir. Z bölüm 2 de tanımlanmış olup $X(\bar{z})$ nin setidir. Z konvekstir ve Pareto Optimal programları için yanönerme 2.1. in yardımı ile elde edilen fonksiyon sıklığının benzer bir şeklidir. Yani, $\forall_i$, $y^i > 0$ ile bir program z için yardımcı önerme

2.1. deki bağlantılara bağlı olarak (12) şartına uyan pareto Optimali;

(12) $\forall k=1,\ldots\ldots,m \ , \ \sum_{i=1}^{n} \pi_k^i(z) \leq \Upsilon_k(z)$ ve

$x_k > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \pi_k^i(z) = \Upsilon_k(z)$ dir.

Bu şekilde kamu mallarının nasıl yeniden tanzim edileceğini gösterdik. Sürekli MDP prosedürü, marjinal ikame oranı fonksiyonundan (ödemede marjinal eğim) ve aşağıdaki diferansiyel eşitliklere uyan marjinal maliyet $\Upsilon_k(z)$ fonksiyonundan elde edilir. $\forall k=1,\ldots,m, \alpha_k > 0$ olmak üzere;

(13)

$$\frac{dx_k}{dt} = \begin{cases} \max \ 0, \{\alpha_k \cdot \sum_{i=1}^{n} \pi_k^i - \Upsilon_k\} & x_k=0 \ \text{için} \\ \alpha_k (\sum_{i=1}^{n} \pi_k^i - \Upsilon_k) & x_k \ 0 \ \text{için} \end{cases}$$

dir. Ardışık y^i, $i=1,\ldots\ldots$, n aşağıdaki diferansiyel denklemlere bağlı olarak elde edilir.

(14)

$$\frac{dy^i}{dt} = -\sum_{k=1}^{m} \pi_k^i \frac{dx_t}{dt} + \delta^i \sum_{k=1}^{m} \frac{dx_t}{dt} \left(\sum_{k=1}^{m} \pi_k^i - \Upsilon_k \right)$$

ki burada $\forall_i = 1,\ldots\ldots,n \ \delta^i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \delta^i = 1$ dir.

Diferansiyel denklemlerin temel kesikli bir tanımı olabilecek; $x_k(t+1) - x_k(t) = \alpha_k (\sum_{i=1}^{n} \pi_k^i(z(t)) - \Upsilon_k(z(t)))$ eşitliğinde $x_k(t)$ nin değeri minimumdur. Bu nevi süreçlerde .

kesikli diferansiyel denklemlerin tanımlarından hareket etmek kaydı ile geleneksel birtakım güçlükleri yenerek stabileteyi sağlayabileceğimizi bekleyemeyiz. Sürekli yaklaşım elde etmek için, Pareto Optimal programları doğrultusunda arzulanan garantili stabilite ile yeterli derecede düşük(öncelikle bazı seviyeler bilinmeli) düzenlemelerin seçimine duyulan ihtiyaç arasında bazı temel şartların yerine getirilmesi gerekir. Kesikli bir prosedür direkt olarak π_k^i (z) ve γ_k(z) nin türevlerinden daha çok gerçek bilgi üzerine oturtulmalıdır. Varsayalımki, a > 0 iken (burada a düzenleme birimidir) k kamu malları miktarının arttığı iddia ediliyor. Bu pek tabii bazı sorunları doğurabilir: Kamu mallarının miktarlarının artmasına karşılık maliyetlerdeki artış ne kadar olacaktır? Tüketicilerin ödemeyi kabul edecekleri miktar ne kadar olacaktır? Bu ve benzeri sorulara verilecek cevap, tatmin edici ve iyi bir şekilde tanımlanmış kesikli bir prosedürün açıklanmasına bağlıdır.

Öncelikle bu temel bilgilerin ışığı altında değişkenlerin tanımlarını ele alalım. Her i=1,...., n için ve her çift $(z,\tilde{x}) \in R_+^{m+n} \times R_+^m$ ile $g^i(z,\tilde{x}) \in$ $[0,+\infty]$yi birleştirip,

$$g^i(z,\tilde{x}) = \min \; y^i \; , \; \tilde{y}^i \in V^i(z,\tilde{x})$$

gösterebiliriz.

Eğer $V^i(z,\tilde{x})$ kapalı bir set ise, $V^i=(z,\tilde{x}) = \{$

$\tilde{Y}^i \in R^+ | u^i(\tilde{x},\tilde{y}^i) \geq u^i(x,y^i)\}$ boş değildir ve,

$g^i(z,\tilde{x})= +\infty$ dır. Diğer taraftan her $z \in Z$ için fonksiyon $g^i(z,.) : R_+^m \rightarrow [0,+\infty]$ konvekstir. Her çift için $(z,a) \in R_+^{m+n} \times R_+$, da a > 0 dır.

$\pi_k^{i+}(z,a)=g^i(z,x)-g^i(z,x^+)$ ve

$\gamma_k^+(z,a)=f(x)-f(x^+)$ dır. Burada

$$\begin{cases} x_k^+ = x_{k'}, & K'=k \\ x_k^+ = x_k + a & \end{cases}$$ dır.

$\pi_k^{i-}(z,a) g^i(z,x^-) - g^i(z,x)$ ve

$\gamma_k^-(z,a) = f(x^-) - f(x)$ ki burada

$$\begin{cases} x_k^- = x_{k'}, & k'=k \\ x_k^- = \max\{0, x_k - a\} & \end{cases}$$

yazabiliriz.

Kayden;

(15) Eğer $x_k = 0$ ise $\pi_k^{i-}(z,a) = \gamma_k^-(z,a) = \gamma_k^-(z,a) = 0$

" $y^i = 0$ ise $\pi_k^+(z,a) = 0$ her k için

" $x_k \geq a$ ise $\begin{cases} \pi_k^{i-}(z,a) \geq \pi_k^+(z,a) \geq 0 \\ +\infty > \gamma_k^+(z,a) \geq \gamma_k^-(z,a) \geq 0 \end{cases}$

dır. g^i nin konveks ve f in konkav oluşundan dolayı; $1/a\ \pi_k^{i+}(z,a)$ ve $1/a\ \gamma_k^-(z,a)$ yazılırsa burada a nın artmıyacağı açıkça görülebilir. Eğer $1/a\ \pi_k^{i-}(z,a)$ ve $1/a\ \gamma_k^+(z,a)$ yazılırsa a nın azalmayacağı ve bu nedenledirki, birisi;

$$\pi_k^{i+}(z,0) = \lim_{a\to o} 1/a \ \pi_k^{i+}(z,a),$$

$$\pi_k^{i-}(z,0) = \lim_{a\to o} 1/a \ \pi_k^{i-}(z,a),$$

$$\gamma_k^{+}(z,0) = \lim_{a\to o} 1/a \ \gamma_k^{+}(z,a) \text{ ve}$$

$$\gamma_k^{-}(z,0) = \lim_{a\to o} 1/a \ \gamma_k^{-}(z,a)$$

bağıntılarını yazabilir. U^i fonksiyonunun ayrıştırılabilirliği ve f fonksiyonunun tanımı;

$$\gamma_k^{+}(z,a) = \gamma_k(z) = -\partial f / \partial x_k ,$$

fonksiyonu ile yapılır. Gerekli olan şartlar ise,

Eğer $x_k > 0$, $\gamma_k^{-}(z,0) = \gamma_k^{+}(z,0)$

" $y^i > 0$, $\pi_k^{i+}(z,0) = \pi_k^{i}(z) = \partial u^i / \partial x_k : \partial u^i / \partial y^i$

" $x_k > 0$ ve $y^i > 0$ ise, $\pi_k^{i-}(z,0) = \pi_k^{i+}(z,0)$ dir.

Tanımlanmış $b_k^{+}(z,a)$ yı alalım;

Eğer $a > 0$ ise $b_k^{+}(z,a) = 1/a\left[\sum_{i=1}^{n} \pi_k^{i+}(z,a) - \gamma_k^{+}(z,a)\right]$,

" $a=0$ ise $b_k^{+}(z,a) = \sum_{i=1}^{n} \pi_k^{i+}(z,0) - \gamma_k^{+}(z,0)$ olur.

Benzer şekilde b_k^{-} yı alalım;

Eğer $a > 0$ ise $b_k^{-}(z,a) = 1/a\left[\gamma_k^{-}(z,a) - \sum_{i=1}^{n} \pi_k^{i}(z,a)\right]$,

" $a=0$ ise $b_k^{-}(z,a) = \gamma_k^{-}(z,0) - \sum_{i=1}^{n} \pi_k^{i-}(z,0)$ dır.

Bu iki ifadeye bağlı olarak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz,

$$B(z,a) = \sum_{k=1}^{m} \max \{ 0, b_k^+ (z,a) , b_k^- (z,a)\}$$

Kaydedelimki $B(z, \cdot):R_+ \to R_T$ fonksiyonu artmıyor. Bu taktirde yardımcı önerme 2.1. deki (12) şartı $B(z,0)=0$ a eşit olacaktır. Bu nedenle bize göre $\forall_i$, $y^i > 0$ ise bir uygun program z, $B(z,o)=0$ olmak kaydı ile Pareto Optimalidir.

YANÖNERME: 4,1. $B:R_+^{n+m} \times R_+$ fonksiyonu alt yarı-süreklidir.

İSPAT: Fonksiyon $\gamma_k^+ : R_+^{m+n} \times R_+ \to R_+$ süreklidir. $y^i > 0$ iken fonksiyon $\pi_k^{i+} : R_+^{m+n} \times R_+ \to R_+$ her (z,a) noktasında süreklidir. Zira eğer $y^i=0$ ve $\pi_k^{i+}(z,a)=0$ ise, fonksiyon π_k^{i+} alt yarı-süreklidir ve keza fonksiyon $b_k^+:R_+^{m+n} \times R_+ \to R$ de alt yarı-süreklidir. $x_k > 0$ iken fonksiyon $\gamma_k^- : R_+^{m+n} \times R_+ \to R_+$ bütün noktalarda süreklidir. $x_k > 0$ iken fonksiyon $\pi_k^{i-} : R_+^{m+n} \times R_+ \to [0, +\infty]$da bütün noktalarda sürekli ve sonludur. Bu nedenle $x_k > 0$ iken fonksiyon $b_k^- = \gamma_k^- - \sum_{i=1}^{n} \pi_k^{i-}$ süreklidir ve negatif (azalan) değildir.

Zira, $\gamma_k = 0$ ve $b_k^-(z,a) = 0$ ise fonksiyon $(z,a) \in R_+^{m+n}$ X R_+ fonksiyonu tüm noktalarla çakışır. Bu fonksiyon ve $b_k^-(z,a)$ nin maksimumu alt yarı-süreklidir. Bu ve buna benzer fonksiyonlar için yapılan bu nevi tanımlar birbirini izlemektedir.

4.2. Şimdi kesikli bir prosüdürü tanımlayabiliriz: Merkezi birimler merkezi olmayan birimlere $a^t > 0$ birim düzenlemeleri ile uygun programların $z^t \in Z$ gösterge bileşimlerini veri olarak gönderir $(t \in \{0,1,\ldots\})$. Kontrol merkezi her bir i den kamu malı k nın üretiminde a^t miktarındaki artış için ödemeyi kabul edeceği maksimum(ters yönde minimum) özel mal miktarı $\pi_k^{i+}(z^t,a^t)$ yi sorar (ters yönde $\pi_k^{i-}(z^t,a^t)$), aynı şekilde k kamu malları için de a^t miktarındaki artıştan doğan ilave maliyet $\gamma_k^+(z^t,a^t)$ - ters yönde $\gamma_k^-(z^t,a^t)$- yi sorar ve böylecede $b_k^+(z^t,a^t)$ ve $b_k^-(z^t,a^t)$ nin kriter değerini merkezi hesaplama birimine bahşeder. Eğer $B_k(z^t,a^t) = 0$ ise merkezi birim önceden gösterilen z^t programını değişmez ama birim düzeltme a^t azalmış olur. Eğer $B(z^t,a^t) > 0$ ise, merkezi birim a^t miktarına bağlı kalarak kamu mallarının üretimin artmasından veya azalmasından etkilenir. Kamu mallarının çoğu kez iyi bir şekilde seçilmelerinin gerektiği iddia edilir. Bu nevi seçimler toplam maliyet için mümkündür (aksi halde maliyetlerdeki azalışın yeniden dağıtımı gerekir). Hal böyle olunca tüm tüketicilerin faydaları artacaktır. Çok dikkatli bir şekilde süreç $t(z^t, a^t)$ verisi alınarak tüm göstergelerle birleştirilir, göstergeler (z^{t+1}, a^{t+1}) için t+1 döneminde uygun değerlerin tümü (z^t, a^t) gibi bir değerler setidir. Burada zımmen ifade edilen iki durumu birbirinden ayrıştırabiliriz.

Durum:1. $B(z^t, a^t)=0$ ve sonra $\psi(z^t, a^t)$ sadece bir birim için düzenlenir:

$$z^{t+1}=z^t \ , \quad a^{t+1}=a^t/2$$

Durum:2. $B(z^t, a^t)>0$ ve sonra aşağıdaki altsetlerin en-azından biri boş değildir.

$$M^+=\{ k \in \{1,........,m\} \mid b_k^+ (z^t, a^t)>0 \}$$

$$M^-=\{ k \in \{1,........,m\} \mid b_k^- (z^t, a^t)>0 \}$$

Gerçekten (15) bu şartları bağlamak için kullanılabilir. Fonksiyon $b_k^+(z, .): R_+ \rightarrow R$ veya $b_k^-(z,.):R_+ \rightarrow R$ artmamaktadır. $M^+ \cap M^- = \emptyset$dır ve eğer;

i) $a=a^t$, ii) $\exists k \in M^+ \cup M^-$ ise $B(\bar{z},a) \in \psi(z^t, a^t)$ dir, öyleki, $x_{k'}=x_k^t$, , $k' \neq k$ ve eğer $k \in M^+$, $x_k=x_k^t+a^t$ ise;

$y^i = y^{it} - \pi_k^{i+t}(z^t, a^t) + \delta^i a^t b_k^+ (z^t, a^t)$ dir. Yine eğer

$k \in M^-$, $x_k=\max\{0, \ x_k^t - a^t\}$ ise,

$y^i=y^{it}+\pi_k^{i-}(z^t, a^t)+\delta^i a^t b_k^-(z^t, a^t)$ dir. Burada $\sum_{i=1}^{n} \delta^i=1$ ve $\forall i=1,.......,n$, $\delta^i \geq 0$ dır.

Birbirine benzer (13) ve (14) nolu denklemlerle klasik MDP sürecine esas olacak programların yeniden tanımlanması gerekmektedir. Kayden,

i) $y^{it} > x^{it}$ ve $(z,a) \in \psi(z^t, a^t) \Rightarrow z \in Z$

ii) $(z,a) \in \psi(z^t, a^t)$ ve $B(z^t, a^t) > 0 \Rightarrow \forall_i = 1, \ldots, n$

$u^i(y^i, x) \geq u^i(y^{it}, x^t)$ bağıntılarından enaz biri eşitsizliktir. Her sonsuz seride $\{(z^t, a^t) \mid t=0,1,\ldots\}$

aşağıdaki özellikler vardır.

i) Başlangıç noktası (z^o, a^o) alındığı zaman $z^o \in Z$, $y^{io} > 0$, $\forall_i$, , ve $a^o > 0$ dır,

ii) Her bir $(z^{t+1}, a^{t+1}) \in \psi(z^t, a^t)$ kesikli prosedür yardımı ile elde edilen "kabul edilebilir ardışık sistem"i tanımlamak mümkündür. ψ nın tanımı bellidir ve $B(z^t, a^t)$ gibi kesikli ve pozitiftir, bu nedenle de tüketicilerin faydalarını artıracak biçimde herhangibir program değiştirilebilir. Fakat, bir düzenleme ünitesinin verilen $a^t > 0$ değeri sadece sonlu zaman serilerinde sınırlandırılmış Z setini oluşturabilir. Bu durumu aşağıdaki yanönerme ile gösterelim.

YANÖNERME: 4.2. Herbir kabul edilebilir ardışık set $\{(z^t, a^t) \mid t=0,1,\ldots\}$ için $B(z^r, a^r)=0$ eşitliğinde sonlu tam bir r sayısı mevcuttur.

4.3. yanönermesinin izlenmesi ile stabilite sonuçlarının geçerliliğini ispat etmek mümkündür.

TEOREM:4.1. Hipotez 1 ve 2 nin ışığı altında ardışık çokdeğerli fonksiyonlarda bütün limit noktaları pareto optimal programı olarak kabul edilebilir.

İSPAT: $\{(z^t, a^t) \mid t=0,1,\ldots\}$ şeklindeki bir serinin kabul edildiğini düşünelim; böyle olunca fayda düzeyi seri boyunca azalmayacaktır,

$\forall_i = 1,\ldots,n$ ise, $\bar{u}_1 = \lim_{t\to+\infty} u_1(z^t)$ yi tanımlayabiliriz. Bir diğer yolla da yan önerme 4.2 yardımı ile $\lim_{t\to+\infty} a^t=0$ yazmak mümkündür. Alınan bir $\bar{z}$, $\{z^t \mid t=0,1,\ldots\}$ dizisinin limit noktaları setini belirtsin. $\bar{Z}$ boş değildir ve sıktır. Zira, Z sıktır. Ayrıca, $\forall z \in Z$, $\forall_i=1,\ldots,n$, $u_i(z)=\bar{u}_i$ fonksiyonu süreklidir.

Her $z \in \bar{Z}$ için yapılan ispat Pareto Optimalini sağlar. Varsayalımki, $z \in \bar{Z}$ de bazı değerler Pareto Optimali değildir. Böyle olunca $z \in \bar{Z}$ de Pareto Optimali olmaz ve $\forall z \in \bar{Z}$, $B(z,0) > 0$ yazılabilecektir. Zira; $B: Z \times R_+ \to R_+$ alt yarı-süreklidir, fonksiyon $B(.\,,0): Z \to R_+$ de $\bar{Z}$ seti sıklığının infimumu araştırılır (Bak, Berge [3, bölüm., 4, bölüm., 8]). Halbuki, $\exists \delta > 0$ iken $\forall z \in \bar{Z}$, $B(z,0) > \delta$ dır.

Alt yarı süreklilik ilkesi ile yeniden gerçek bir sayı $\varepsilon > 0$ bulunur. Öyleki, $0 \geq a < \varepsilon$ ve $d(z,\bar{Z}) < \varepsilon \Rightarrow B(z,a) > \frac{\delta}{2}$ dir. Burada $d(z,\bar{Z})$ program z ile sık $\bar{Z}$ seti arasındaki uzaklıktır. Bu nedenle $\{z^t \mid t=0,1,\ldots\}$ dizisinin limit noktalarının seti $\bar{Z}$ dir ve $\bar{Z}$ sıktır. T_1 gibi tam bir sayı da vardır. Öyleki, $\forall \geq T_1$, $d(z^t,\bar{Z}) < \varepsilon$ dir.

Böylece $\lim_{t\to+\infty} a^t=0$ olur. T_2 gibi tam bir sayı varsa, $\forall z T_2$, $a^t < \varepsilon$ dir. Zira, $\forall_{t=} \max\{T_1, T_2\}$, $B(z^t,a^t) > \delta/2$ dir. Bu ifade 4.2. yanönermesi ile sınırlıdır, $\{(Z^{T+t'}, A^{T+t'}) \mid t'=0,1,\ldots\}$ dizisini kabul edebiliriz.

Bu dizi teorem 6.2. nin ispatında öne sürülen delillerden farklı olarak sürecin işleyişini sağlaması açısından kayda değerdir. Teorem 6.2. nin uygulamasında olduğu gibi bizim kesikli prosedürlerin stabilitesinde ispatladığımız hususlar her ne kadar muğlak görünüyor isede, çokdeğerli fonksiyonların her zaman üst yarı-sürekli olmadığı gözden uzak tutulmamalıdır. Klasik MDP sürecinin stabilitesi teorem 4.1. in ispatında kullanılan (Bak, Ek., Champsaur [6]) delillere benzer delillerin kullanımı ile ispatlanabilir.

Diferansiyel özellik gösteren varsayımlar olmadanda kesikli prosedürü tanımlamak mümkündür. Yanönerme 4. 1 ve 4.2. diferansiyel özelliklere bakılmadan konveks fonksiyonların özellikleri kullanılarak ispatlanabilir. Diferansiyel özellik olmaksızın devamlılık göstermeyen B(z,0)=0 eşitliği program z de bir Parate Optimalidir. Ekonomik görüş açısından ardışık ve tamamlayıcı 2 kamu mallarının tüketiminin arttığını kabul edelim, fakat herhangi bir kamu malının tek başına arttığını değil,Bizim prosedürümüzde bu ihtimalin ispatı yapılmaz ve sadece bu ihtimalin pek te kuvvetli olamayacağı gösterilir.

Bu bölümde diğer planlama prosedürlerine uygulanabilecek metotlar gösterirdi, Heal'in [11] ve[12] yöntemine benzer biçimde Henry ve Zylberberg de [17] bu metotlara işaret etmiştir.

5. DİFERANSİYEL DENKLEMLERDEKİ MEVCUT YAKLAŞIMLAR

m+n -vektör($x_1, \ldots, x_m$ $y_1^1, \ldots, y^n$)- için Z yi kullanıyorsak, MDP sürecinde tanımlanan (13) ve(14) diferansiyel denklemleri sistemi;

(16) . dz/dt =g(z) şeklinde olacaktır.

Burada Z nin kapalı bir konveks set $C \subset R^p$ (p=m+n) olduğu unutulmamalı ve g(z) C nin sınırları üzerinde sürekli olamaz. Metodu[x], süreksiz olan prosedürlerde aşağıdaki aşamaları izlemek kaydı ile geçerli kılabiliriz;

i) R^P, g ye yönelirken izleyeceğiniz yol: $\forall z \in R^P$, $g(z)=g(\bar{z})$ ki, $\bar{z}$, C üzerinde bulunan z nin ortogonal projeksiyonunu yaz,

ii) g(z) nin kapsamında bulunan R^P nin sık alt konveks bir seti olan R^P içindeki bütün Z noktalarının G ye karşın gelen minimal üst yarı-sürekli G(z) imajını kur, En sonunda R^P içindeki B yi tanımla ve;

$$Z \in \varepsilon B = \{ Z' \mid \|z', z\| \leq \varepsilon \},$$

$$g(z+\varepsilon B) = \bigcup_{z' \in Z+B} g(z').$$

$g(z+\varepsilon B)$, $g(z'+\varepsilon B)$ nin kapalı konveks şeklidir. Daha sonra da $G(z) \bigcup_{\varepsilon \in]0,+\infty[} \hat{g}(z+\varepsilon B)$ yi al.

iii) Attouch-Damlamian [2] teoremini sisteme uygula. Böylece

(17) $dz/dt \in G(z)$

bağıntısını yaz.

Konu için yapılan yaklaşımlar bu düşünceler altında anlatılır. C deki z^o için enaz bir fonksiyon $Z: [0, +\infty] \to C$: Z(t) vardır ve,

a) $\forall T \in]0, +\infty[$, z, [0,T] aralığında mutlak bir değerdir ve süreklidir, b) $Z(0)=z^o$, c) daima $[0, +\infty[$, $(d/dt)Z(t) \in G(z(t))$ içinde her t için süreklilik vardır.

(x) Bu metod, $(d/dt) \in g(z)$ şeklindeki bir sisteme uygulanmış olabilir, öyleki, g(z) çokdeğerlidir ve her zaman üst yarı-sürekli değildir (Bak, Henry [15 ve 16]).

Bu özelliklerin bir bölümünü (sıklık,üstyarı-süreklilik) G süreçlerinde izleyebiliriz. Attouch-damlamian teoremi gibi pozitif bir sayının varlığını ortaya koyar, öyleki, bu pozitif sayı $z \quad R^p$ şartını da tatmin eder. Bu nedenlede;

$$(18) \quad \sup_{W \in G(z)} \|w\| \leq \alpha(1+ \quad \|z\| \quad)$$

bağıntısı daima mevcuttur. Yukarıdaki düşünceler altında (16) nın çözümü olarak (17) nin çözümlerini yap ve göster,

(iv) $[0, +\infty[$, $(d/dt)z(t)=g\,[z(t)]$ içindeki tüm t ler için (c) deki bağıntıyı (iv) ifadesinin ışığı altında

(iii) (c) de yerine koy,

(v) Açıklanan düşüncelerin ışığı altında (16) nın çözümünü yapmış olsan bile $[0, +\infty[$,$/(d/dt)z(t)=g(z(t))$ içindeki her t için eşitliğin sağ tarafından hareketle d^+/dt türevini al. Eğer (v) deki işleme (i) aşamaları ile bağlanmışsa, bazı çözümleri elde etmek için metod (16) ve (17) nolu denklemler sistemlere uygulanır. Yani (16) için Castaing ve Valadier'in [5] kurduğu ve yine Valadier'in [31] (17) nolu denklem için tertip ettiği sistemin çözümleri yapılır.

(vi) z^o dan başlayarak $[o,T]$ aralığında (16) nolu sistemin bütün çözüm setleri $\forall T \in]0, +\infty[$ ve $z^o \in C$ alınarak, $S_t(z^o)$ ı bul. Bu nedenlede $S_T(z^o)$, $C_u([0,T];R^P)$ nin sık bir altseti olup, benzer şekildeki serilerden hareketle R^P fonksiyonunda $[0,T]$ aralığı içinde sürekli fonksiyonların uzayı bulunmuş olur. Ayrıca $S_T:D \varnothing C_u([0,T];R^P:z^o \rightarrow S_t(z^o)$ içinde C ye karşın gelen her D sıkalt-seti için

$S_T: D \subset C_u([0,T]; R^p): z^o \to S_t(z^o)$ üst yarı-süreklidir.

MDP prosedüründe (v) deki i aşamaları gerçekten yerine getirilmiştir. İktisat teorisinde de karşılaşılan diğer birçok dinamik süreçlerde bu durumlar sahneye konmuştur. (i) ve (ii) aşamaları hiç problem doğurmaz. Onlar (iii) aşaması ile ilgilidir, (18) şartında da hatırlandığı üzere C nin sık bir alt seti bulunduğu zaman sistemin çözümü sağlanmış olur. İktisatta toplam değişken kaynakların sınırsızlığı nedeni ile veya fiyat vektörlerinin uygun bir biçimde normalleştirilmesi gibi bir çok durumlarla karşı karşıya kalmaktayız. Aşama (iv) de her spesifik model için bir tek özel durumla karşılanabilir. MDP prosedürü için aşama (v) Henry [14] tarafından yapılmıştır. Heal Prosedürü içinde Hori [18] yapmıştır.

6. GENEL STABİLİTE TEOREMLERİ

İlkönce diferansiyel denklem yaklaşımları için bir stabilite problemi düşünelim, Problemle ilgili genel çatı ise aşağıdaki gibi olsun:

E, R^p nin kapalı bir altsetidir; L ise R^p nin altsetleri ve E nin tüm noktaları arasında kurulan çok değerli fonksiyondur. E içinde bir z noktası vardır, L(z) R^p nin boş olmayan bir altsetidir;

(19) $\quad dz/dt \in L(z)$

bağıntısı tanımlanabilen dinamik süreçte (P) diferansiyel denklemlerin çok değerli fonksiyonudur (sistemidir). (16) bağıntısı (19) bağıntısının özel bir durumudur.

$0 \in L(z)$ olmak üzere E de bulunan herhangi bir $\bar{z}$ noktasını P nin dengesi olarak kabul edeceğiz ve P nin yörüngesi (19) nolu bağıntının çözümünde vardır ve $[0, +\infty[$ aralığındadır diyeceğiz. L nin yapılan tanımında eğer sadece bir yörünge varsa, bu yörünge aynı zamanda E içinde de bulunur. Bir z^o gibi nokta alındığını düşünelim ve z^o dan başlayan bir yörünge $z(z^o; .)$ olsun.

Bu notasyonun anlamı şudur; t zamanında yukarıda ifade edilen yörünge $z(z^o;.)$ nin bütün noktaları içinden geçer ve hiç şüphesiz $z(z^o;0)=z^o$ dır. $z(z^o;.)$ yörüngesinin limit noktasını t zaman serisinde araştıracağız. Burada $\bar{z}$ gibi bir nokta vardır, $t^n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ ve $z(z^o;t^n) \underset{n\to+\infty}{\to} \bar{z}$ dir. Bu nedenle de E kapalıdır. E içinde $\bar{z}$ bir noktadır. Bir yörüngenin limit noktası dengede ise o zaman P nin yarı stabıl olduğu söylenir. P için Lyapunov bir fonksiyon E den V ye sürekli bir fonksiyondur, R de;

i) E içindeki z^o gibi bir nokta için $t \to +\infty$ giderken yörünge $z(z^o;.)$ ve fonksiyon $V(z;.)\colon [0,+\infty[\to R\colon t\to V(z^o;t)=V(z(z^o;t))$ vardır,

ii) $T\in]0,+\infty[$ ve $z(z^o;.)$ gibi bir yörünge mevcutsa, o zaman $V(z^o;.)$ fonksiyon yörüngesi $[0,T]$ aralığındadır. ve bu nedenle de z^o, P nin dengesidir. Alınan $S_T(z^o)$, z^o dan başlayan bütün yörüngelerin setini belirtir, fakat $[0,T]$ aralığı ile sınırlandırılmıştır. Keza, alınan $S_T(.)$, $E\to\emptyset\ C_u([0,T];E)\colon z^o\to S_T(z^o)$ da çok değerli fonksiyonları belirtir. Bu yüzden aşağıdaki teoremden bahsedeceğiz.

TEOREM:6.1. Eğer P için bir Lyapunov fonksiyon var ise, E içindeki tüm z^o lar için $C_u([0,T];E)$ sık olmak kaydı ile $S_t(z^o)$ boş değildir ve $S_T(.)$ de üst yarı sürekli ise, P yarı stabıldır.

$S_T(.)$ için ifade ettiğimiz bu şartlar bölüm 5 de (vi).nci aşamada gösterilmiştir.

İSPAT: $z(z^o;.)$ gibi bir yörüngenin limit noktası olarak $\bar{z}$ yi alalım. P nin dengesinin $\bar{z}$ olduğunu ispat edebiliriz. $\{t^q \mid q=0,1,2,\ldots\}$ gibi bir zaman serisinin varlığı bilinmektedir. Bu yüzden;

$\bar{z} = \lim_{q \to +\infty} z(z^o;t)$ eşitliği yazılabilir. Lyapunov fonksiyonu özelliğinden yararlanarak,

$V(\bar{z}) = \text{Lim}_{t \to +\infty} v(z^o;t)$ yazabiliriz.

(19) nolu sistem bağimsızdır; zira, her q için fonksiyon $z(z^q; .)$ şöyle tanımlanır: $[0, +\infty[$ açıklığında bütün t ler için $z(z^q;t)=z(z^o;t^q+t)$, z^q dan başlayan bir yörüngedir. $S_t(.)$ üzerine kurulan tüm varsayımlardan hareketle $\bigcup_q S_T(z^q)$ nun $C_u([0,T]:E)$ nin sık bir altseti olduğu izlenir. Zira, tüm yörüngelerin $[0,T]$ aralığında sınırlandırılmaları $z(z^q;.)$ nin sık altsetine bağlıdır ve bu yüzden $C_u([0,T];E)$, $z(z^{qk}; .)$ nın bir ölçüsüdür. $[0,T]$ aralığında uniforma yönelişi ifade eden fonksiyon $z(\bar{z}; .)$ dir. $S_T(.)$ nin üst yarı-sürekliliği esas alınarak $S_T(.)$ yi $\bar{z}$ den başlayan yörünge olarak almak doğru olur.

Sonuç olarak $[0,T]$ aralığında her t için birisi; $z(\bar{z};t) = \lim_{k \to +\infty} z(z^{qk};t) \text{Lim}_{k \to +\infty} z(z^o;t^{qk}+t)$ eşitliğin varlığından söz edebilir. Bu itibarla, $v(\bar{z};t)=V(z(\bar{z};t))$ $= \text{Lim}_{k \to +\infty} V(z(z^o;t^{qk}+t)) = \text{Lim}_{k \to +\infty} v(z^o;t^{qk}+t) = V(\bar{z}) = V(\bar{z};0)$ bağıntısını yazabilir. Burada V, P nin Lyapunov fonksiyonudur, $\bar{z}$ ninde dengede olduğuna işaret eder.

Teorem 6.1. kullanılarak MDP prosedüründe stabilite nasıl sağlanabilir?

Bölüm 5 ve aşama (vi) de bu durum açıklandı. Teorem 6.1 in uygulandığı durumlarda MDP prosedürü bir lyapunov fonksiyonuna delil olarak yeterli görülmektedir. $i \in \{1, \ldots\ldots, n\}$ için $\delta^i > 0$ dır, u^i de bir Lyapunov fonksiyondur. Gerçekten MDP prosedürü için her bir yörünge boyunca aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$d^{+}/dt\ (u^{i}(z(t))=\sum_{k=1}^{m}(\partial u^{i}/\partial x_{k})\ (d^{+}/dt(x_{k}(t))\ +$$

$$(\partial u^{i}/\partial y^{i})(d^{+}/dt)(y^{i}(t))=\delta^{i}\sum_{k=1}^{m}(d^{+}/d^{t})(x_{k}(t))^{2}\partial u^{i}/\partial y^{i}$$

Her $t \in [0, +\infty[$; $(d^{+}/dt)u^{i}(z(t))$ için tam pozitiflik vardır. Zira, $u^{i}(z(t))$ eğer prosedürün $z(t)$ gibi bir değeri varsa artar. MDP prosedüründe elde edilen sonuçlar süreci yarı dengeli kılar, bu durum ise ekonomide yeterince açıklığa kavuşturulmuştur. Yardımcı önerme 2.1. de buna işaret eder. MDP prosedürünün her bir dengesi bir Pareto Optimalidir. Eğer u^{i}, i=1,...., n fonksiyonu tam yarı konkav ise MDP prosedürü dengededir ve asla yarı dengeli kalmaz.(x)

6.2. Şimdi diferansiyel denklemleri yaklaşımları için düşünülen bazı stabilite teoremlerini ele alalım. Önce R^{p} nin kapalı altseti olan E yi Alalım; A, R^{p} nin sık altseti ve E nin noktaları arasında çok değerli bir fonksiyon ise; E içindeki bir nokta z olsun. Bu taktirde $A(z)$, R^{p} nin sık altsetinde boş olmayacaktır. $z^{n+1} \in A(z^{n})$ gibi dinamik bir süreç P yi tanımlamaya yetecektir (kesikli olarak).

(x) Aksi yönde, bir yörenge ile farklı iki limit noktasının olduğunu varsayalım. Bunlar $\bar{z}$ ve $\bar{\bar{z}}$ olsun. Teorem 6.1. e göre MDP sürecindeki bu noktalar dengededir. Zira, onların her ikisi de her $i \in \{1,....,n\}$ için $u^{i}(\bar{z})=U^{i}(\bar{\bar{z}})$ eşitliği ile bir Pareto Optimalidir. Fakat, hipotez 1 e göre $\frac{\bar{z}+\bar{\bar{z}})}{2}$ olması gerekir. Diğer bir yolla, u^{i} nin tam yarı-konkavlığı $u^{i}(\frac{(\bar{z}+\bar{\bar{z}})}{2}) > u^{i}(\bar{z})$ yi sağlar. Gerçekten her $i \in \{1,....,n\}$ için bu sınınlama $\bar{\bar{z}}$ nin Pareto Optimali olması ile mümkündür.

E çindeki bir $\bar{z}$ noktasını P nin dengesi kılacağız. $\bar{z} \in A(\bar{z})$ ve P nin yörüngesi sonsuz $\{z^n \in E \mid h=0,1,2,\ldots\}$ gibi bir set olsun. Bu nedenle n gibi bir tamsayı çin $z^{n+1} \in A(z^n)$ dir. P yarı-stabıl olarak tüm yörüngelerin limit noktalarının dengede olduğunu söyler.

P için bir Lyapunov fonksiyon E den V ye sürekli bir fonksiyondur. Öyleki;

i) Yörüngeler için $\{z^n \mid n=0,1,\ldots\}$, $\{V(z^n) \mid n=0,1,\ldots\}$ gibi bir dizi ve tek bir limit noktası vardır,

ii) Eğer E içinde bir nokta z ise $z' \in A(z)$ ilişkisi vardır ve $V(z')=V(z)$ dir. Bu nedenle z, P nin dengesidir.

TEOREM:6.2. P için eğer bir Lyapunov fonksiyonu mevcutsa ve A da üst yarı-sürekli ise, P yarı-stabıldır. Bu teoremin ifadesi açıktır ve Zangwill'inde (32) ifade ettiği gibi bölüm 4 de gösterildiği şekilde genel bir teoremdir. P kesikli dinamik süreçler için teorem 6.1.den yararlanmak suretiyle hesaplanır. E de z^o gibi bir nokta olsa, düşünelimki, $A(z^o)$ teorem 6.2. deki gibi tanımlanıyor; o zaman teorem 6.1 in kullanılmasıyla hesaplanan P, E içindeki tüm noktaların seti olur. Biri z^o dan başlayarak bir yörünge üzerinde bir zaman birimini araştırabilir. Yani, set olarak;

$$\{z' \in E \mid \exists\, z(z^o;.) \in S_{T=1}(z^o) \text{ ile } z(z^o;1)=z'\}$$

yazılabilir. Bu düşünce teorem 6.2 ye açıktır (teorem 6.2. ye ters düşmez). Teorem 6.1 gibi teorem 6.2. de aynı yolla ispatlanır. Her ikisinin ispatı birbirine benzer. $\{z^q \mid q=0,1,2,\ldots\}$ yörüngesinde $\bar{z}$ gibi bir limit nokta alalım; $\{z^q \mid k=0,1,2,\ldots\}$ dizisi mevcuttu ve böylece de, $\bar{z} = \lim_{k \to +\infty} z^{qk}$ ve

$$V(\bar{z}) = \lim_{k \to +\infty} V(z^{qk}) = \lim_{k \to +\infty} V(z^{qk+1})$$

eşitliği yazılır. Çünkü E içindeki bütün z ler için A(z) sıktır ve A üst yarı-süreklidir. $\{z^{qk+1} \mid k=0,1,2,\ldots\}$ dizisinden seçilecek bir başka dizi almak mümkündür. $A(\bar{z})$ içinde $\bar{\bar{z}}$ gibi bir nokta alınabilir. Bu nedenle teorem 6.2. $V(\bar{\bar{z}}) = \lim_{k \to +\infty} V(z^{qk+1}) = V(\bar{z})$

şeklinde ifade edilebilir.

EK

Boş olmayan R^p setinden çok değerli bir fonksiyon olan yarı sürekli bir G fonksiyonu alalım. Altsetleri sık ve konveks olan R^p de α gibi pozitif bir sayı mevcuttur(Mesela $G: R^p \to \emptyset R^p : z \to G(z)$, G(z) ile sık ve konveks). Eğer $\forall z \in R^p$ ise,

(A.1) $\sup_{w \in g(z)} \|w\| \leq \alpha \, (1 + \|z\|)$ dir. Diferansiyel

denklemler sistemi düşünüldüğü zaman;

(A.2) $dz/dt \in G(z)$,

ve $S_T(z^o)$ ile tanımlanan, ki $z^o \in R^p$ dir, (A.2) sisteminin tüm çözüm setleri z^o dan başlamak ve $T > 0$ olmak şartı ile $[0,T]$ aralığı üzerindeki çözümlere bağlıdır. Buradaki çözüm kelimesi aşağıdaki düşünceleri doğurabilir;

A fonksiyonu $z: [0,T] \to R^p : t \to z(t)$ şeklinde ise ve eğer $[0,T]$ aralığında da sürekli bir mutlak değer varsa ve yine eğer söz konusu aralık içinde daima her t için $dz/dt \in G(z(t))$ bağıntısı sağlanıyor ise A(z) nin çözümü $[0,T]$ aralığındadır. Bu itibarla aşağıdaki ifadeleri vermek gerekmektedir.

TEOREM:A.1. (Castaing-Valadier): $T > 0$ olmak üzere;
i) $\forall z^o \in R^p$ ise, $S_T(z^o)$, $C_u([o,T];R^p)$ içinde sıktır ve boş değildir, R^p yi kapsayan $[0,T]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayı uniform bir seriye benzer biçimde uzanır.

ii) $\forall A \subset R^p$ ise, bir sıklık vardır ve fonksiyon $S_T: A \to \emptyset C_u([0,T]; R^p): z^o \to S_T(z^o)$ üst yarı-süreklidir.

S O N U Ç : Bu kabul edilebilir varsayımlar altında, Teorem A.1 doğruluğunu ve geçerliliğini korur. R^p ayrılabilir Banach uzayı metodunda kullanılırsa (A.2) sistemi bağımsız kalamaz, yani $G(t,z)$, G den bağımsız olamaz.

TANIM : A.1. C, R^p nin kapalı konveks alt seti olsun ve A boş olmayan C setinde ikame edilsin, bu taktirde R^p nin konveks ve kapalı altsetleri şöyle yazılabilir(Mesela $A: C \to \emptyset R^p: z \to A(z)$, A(z) konveks ve kapalı olmak kaydı ile);

(A.3) $\forall z_1 \in C$, $\forall z_2 \in C$, $\forall y_1 \in A(z_1)$, $\forall y_2 \in A(z_2)$,

$$(y_1 - y_2 \ , \ z_1 - z_2) \geq 0.$$

Yukarıdaki bağıntılarda $(y_1-y_2 \ , \ z_1-z_2)$ skalar üretim çarpanını gösterir. Bu itibarla A monotondur.

T A N I M : A.2. A maximal monoton, A yerine ikame edilen B monoton değilse, A nın grafiği ile B nin grafiği (R^{2p} nin bir altseti) birbiriyle çakışır.

Ö R N E K: Alt yarı-sürekli konveks fonksiyon olarak $\emptyset : C \to R : z \to \emptyset(z)$ alalım. Bu fonksiyonun kismi diferansiyeli bir maximal monotondur. Zira, ikame edilen fonksiyon $\partial\emptyset : C \to \emptyset R^p$ (Bak, Brezis [4]) dur. Burada maximal monoton A, G gibi tanımlanmıştır, diferansiyel denklemler sistemi düşünüldüğü zaman;

(A.4) $\partial z/\partial t \in G(z) - A(z)$ dir.

C içinde alınan bir z^o noktası $z: [0, +\infty[\to R^p : t \to z(t)$ fonksiyonu olmak üzere

(A.4) sistemi içinde tanımlanacak ve çözümü aranacaktır. Eğer;

(i) $[0, +\infty[$ nın her sık altseti üzerinde mutlak sürekli bir sayı varsa,

(ii) $[0, +\infty[$ içinde daima her t için $d/dt\, z(t) \in G(z(t)) - A(z(t))$ bağıntısı mevcutsa,

(iii) $z(0)=z^o$ ise,

aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

TEOREM:A.2.(Attouch-Damlamian): C içinde alınan bir nokta için z^o dan başlamak kaydı ile (A.4) sistemi içinde enaz bir çözüm vardır. Eğer G sürekli bir fonksiyon ise (öyleki, tekdeğerli) (A.4) sisteminde her z için aranacak çözümde aşağıdaki özellik vardır;

$[0, +\infty[$ de her t için,

(A.5) $d^+/dt(z/t) = [G(z't)) - A(z(t))]^{min}$

Yukarıdaki ifadede, d^+/dt eşitliğin sağ tarafının türevini ve $[G(z(t)) - A(z(t))]^{min}$, $G(z(t)) - A(z(t))$ üzerindeki z(t) nin ortogonal projeksiyonunu gösterir.

S O N U Ç : Kabul edilen hipotezler altında, teorem A2 ve A3 yardımı ile $G(t,z)$ ve G nin birbirine benzerliği hatırlanır. Bu iki fonksiyonun yayılmaları $A(t, z)$ ve A gibi uzunca değildir (Bak, [25] ve [26]). Bununla beraber, R^+ fonksiyonunun ikame edilmesi genellikle ayrılabilir Hilbert uzayında olabilmektedir. Sadece $A, \partial\emptyset$, $\emptyset$ fonksiyonları konveks ve alt yarı-sürekli fonksiyonları temsil eder. Ekonomik uygulamalar açısından duyarlı ve önemli olan teorem A3 ün yardımcı önermesini elde etmek için bazı notasyonlara ihtiyacımız vardır: $\delta(.|C)$ fonksiyonu C nin gösterge fonksiyonunu; $N_C(z)$ de z noktasında C conisini, $\pi_C(z)$ de z noktasında C nin destekleyici conisini ($N_C(z)$ nin kutbu), $\pi_C(z)G(z)$ projeksiyonu $\pi_C(z)$ konisi üzerindeki $G(z)$ nin projeksiyonunu gösterir.

YARDIMCI ÖNERME: A3. Eğer G sürekli bir fonksiyon ise, diferansiyel denklemler sistemi;

(A.6) $dz^+/dt = \text{Proj}\ \pi_C(z)G(z)$ dir,

ve bu eşitlikte enaz bir çözüm vardır ($[0, +\infty[$ aralığında her t için) C içinde bu aralıkta seçilen z^0 gibi bir noktadan başlanarak çözüm sağlanır.

İSPAT: z^0 başlayan bir çözüm sistemini düşünelim, o zaman;

(A5') $dz/dt \in G(z) - \partial\delta(z|C)$ yazılabilir.

Teorem A3 den, z,o şeklinde bulunur ki, $\forall t \in [0, +\infty[$ olmak üzere;

$d^+/dt\ z(t) = [G(z(t)) - \quad (z(t)) | C]^{min} = [G(z(t)) - N_C(z(t))]^{min}$ olacaktır. Zira, $N_C(z(t))$ içinde $n(t)$ gibi bir vektör vardır, bu nedenle de;

$d/dt\ z(t) = G(z(t)) - n(t)$ ve

$d^+/dt\ z(t) - n(t) = 0$ dır.

Burada $\pi_C(z(t))G(z(t))$ projeksiyonu için tüm şartlar mevcuttur. $C=R^p_+$ olduğu zaman yardımcı önerme A3 bütünüyle Walrasian Elyordamı metoduna uygulanabilir, özellikle Henry [13]bu durumu ispat ederek göstermiştir. G için Lipschitzian metodunda tek bir çözüm vardır. Keza, bu özelliği Fisher'de [10] göstermiştir.

KAYNAKLAR

(1) **ARROW K.J., AND F.H.HAHN: General Competitive Analysis. San Francisco:Holden-Day,1971.**

(2) ATTOUCH H., AND A.DAMLAMIAN:"On Multivalued Evolution Eguations In Hilbert Spaces,"Israel Journal of Mathematics, 12(1972),373-390.

(3) BERGE,C.: Espaces Topologiques, Fonctions Multivoques. Paris:Dunod, 1966.

(4) BREZIS, H.: Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert. Amsterdam: North-Hollad,1973.

(5) CASTAING, C., AND M.VALADIER:"Equations Différentielles Multivoques dans les Espaces Localement Convexes," Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, 16(1969),3-16.

(6) CHAMPSAUR,P.: "Neutrality of Planning Procedures in an Economy with Public Good,"Review of Economic Studies, 43(1976 ,293-299).

(7) CODDINGTON,E.A.,AND N.LEVINSON: Theory of Ordinary Differantial Equations. Newyork: McGraw-Hill, 1955.

(8) DREZE , J.H., AND D.DE LA VALLE POUSSIN: "A Tâtonnement Process for Public Goods,"Review of Economic Studies, 38 (1971), 133-150.

(9) FISHER, F.M.: "On Price Adjustment without an Auctioneer, " Review of Economic Studies,(1972), 1-16.

(10) _____: " A Non- Tâtonnement Model with Production and Consumption, "Econometrica 44(1976),907-938.

(11) HEAL,G.M.: " Planning without Prices."Review of Economic Studies, 36(1969), 347-362.

(12) _____: The Theory of Economic Planning. Amsterdam: NortH,Holland,1973.

(13) HENRY,CL.: "Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side in Mathematical Economics, Part 2, " Laboratoire d'Econometrie de I'Ecole Polytechnique, Paris, 1970.

(14) _____: "Differential Equations with Discontinuous Rigth-Hand Side for Planning Procedures, "Journal of Economic Theory, 4(1972), 545-557.

(15) _____: " An Existence Theorem for a Class of Differential Equations with Multivalued Rigth-Hand Side," Journal of Mathematical Analysis and Applications, 41(1973),178-186.

(16) _____: " Problémes d'Existence et de Stabilitè pour des Processus Dynamiques Considèrès en Èconomie Mathèmatique, " Comptes Rendus de L'Acadèmie des Sciences de Paris,278,Sèrie A (1974), 97-100.

(17) HENRY,CL., AND A. ZYLBERBERG: "Planning Algorithms to Deal with Increasing Returns,"Laboratoire d'Econometrie de I'Ecole Polytechnique,Paris, 1975; to appear in the Review of Economic Studies.

(18) HORI,H.: "The Structure of the Equilibrium Points of Heal's Process, "Review of Economic Studies, 42(1975), 457-467.

(19) KARLIN, S.: Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics (2 vol.) Reading, Pa:Addison-Wesley, 1959.

(20) MALINVAUD,E.: "Decentralized Procedures for Planning, "in Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning, ed.by E.Malinvaud and M.O.L. Bacharach, London:Macmillan, 1967.

(21) ____: " Procedures for the Determination of a Program of Collective Consumption," European Economic Review, 2(1970-1971), 187-217.

(22) ____: " Prices for Individual Consumption,Quantity Indicators for Collective Consumption,"Review of Economic Studies, 39(1972),385-406.

(23) MASCHLER, M., AND B.PELEG: "Stable Sets and Stable Points of set Valued Dynamic Systems,"The Hebrew University, Research Memorandum,1974.

(24) MOREAU,J.J.:"Sur les Lois de Frottement, de Plasticitè et de Viscositè."Comptes Rendus de L'Acadèmie des Sciences de Paris,271,Sèrie A(1970),608-611.

(25)____:"Râfle par un Convexe Variable, lère Partie,"Montpellier, Sèminaire d'Analyse Convexe, Expose no. 15.1971.

(26)____:"Râfle par un Convexe Variable, 2ème Partie,"Montpellier, Sèminaire d'Analyse Convexe, Exposè no.3.1972.

(27) ROCKAFELLAR, R.T.:Convex Analysis. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1970.

(28) SLEMROD, M.:An Application of Maximal Dissipative Sets in Control Theory,"1972; to appear in Journal of Functional Analysis.

(29) UZAWA, H.:"Walras' Tâtonnement in the Theory of Exchange, "Review of Economic Studies,27(1959-1960).182-194.

(30)_____:"The Stability of Dynamic Processes,"Econometrica, 29(1961),617-631.

(31) VALADIER, M.:"Existence Globale poru les Èquations Diffèrentielles Multivoques", "Comptes Rendus de I'Acadèmie des Sciences de Paris, 272,Sèrie A(1971), 474-477.

(32) ZANGWILL, W. I.:Non-Linear Programming:A Unified Approach. Englewood Cliffs, N.J.:Prentice-Hall, 1969.