





Düzce Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi

Araştırma Makalesi

Bazı Genelleştirilmiş Sabit Çember Sonuçları Üzerine

 Nihal TAŞ^{a,*},  Özlem MORALI KIZANLIK^b

^a Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir, TÜRKİYE

^b Matematik Bölümü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir, TÜRKİYE

* Sorumlu yazarın e-posta adresi: nihaltas@balikesir.edu.tr

DOI: <https://doi.org/10.29130/dubited.1258967>

Öz

Bu çalışmada, son zamanlarda üzerinde çalışılan bir açık problem olan “sabit çember problemi” için yeni sonuçlar araştırmaya çalışacağız. Bunun içinde literatürde var olan bazı bilinen daralma koşullarından esinleneceğiz. Bu anlamda, metrik uzaylar üzerinde JS-Ciric tipinde x_0 -daralma, JS-Hardy Rojers tipinde x_0 -daralma, JS-Reich tipinde x_0 -daralma ve JS-Chatterjea tipinde x_0 -daralma kavramlarını tanımlayacağız. Bu yeni daralma koşulları ile bazı sabit çember teoremleri ve sabit disk sonuçları elde edeceğiz. Son bölümde de, elde edilen teorik sonuçları gerçekleyen bazı örnekler vereceğiz.

Anahtar Kelimeler: Metrik uzay, Sabit çember, Sabit disk

On Some Generalized Fixed Circle Results

ABSTRACT

In this study, we try to search for new results for the “fixed circle problem”, which is an open problem that has been studied recently. In this we inspire by some known contractive conditions that exist in the literature. In this sense, we define the concepts of JS-Ciric type x_0 -contraction, JS-Hardy Rojers type x_0 -contraction, JS-Reich type x_0 -contraction and JS-Chatterjea type x_0 -contraction on metric spaces. With these new contraction conditions, we obtain some fixed circle theorems and fixed disc results. In the last section, we give some examples that demonstrate the theoretical results obtained.

Keywords: Metric space, Fixed circle, Fixed disc

I. GİRİŞ

Sabit nokta nedir?

$X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde $T : X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$Tx = x$$

olacak şekilde bir $x \in X$ noktası varsa bu x noktasına T fonksiyonunun bir sabit noktası denir.

Sabit nokta kavramı, sabit nokta teorisi altında sıkça çalışılan bir konu haline gelmiştir. Sabit nokta teoremleri, genel olarak belirli koşullar altında verilen bir fonksiyonun sabit noktasının varlığını ve tekliğini garanti etmede yardımcı olmaktadır. Fakat öyle fonksiyon örnekleri vardır ki sabit noktası olmasına rağmen literatürde var olan sabit nokta teoremlerinin koşullarını sağlamaz. Bu durumda da, yeni sabit nokta teoremlerinin araştırılması yeni bir çalışma konusu olarak karşımıza gelmektedir. Yeni teoremler araştırılırken, kullanılan yöntemlerden biri ele alınan daralma koşulunun genelleştirilmesidir. Bu anlamda Ćirić tipinde [1,2], Hardy-Rogers tipinde [3], Reich tipinde [4] ve Chatterjea tipinde [5] daralma koşulları tanımlanmış ve bu koşullar yardımıyla çeşitli sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

Bazı fonksiyon örnekleri de ele alındığında sabit nokta sayısının birden fazla olduğu görülmüştür. Örneğin, $X = \mathbb{R}$ ve $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için

$$Tx = x^2 + x - 9$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda, T fonksiyonunun $x_1 = -3$ ve $x_2 = 3$ gibi iki sabit noktası vardır.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi, bir fonksiyonun sabit nokta sayısı birden fazla olduğu durumda bu sabit noktaların geometrik özelliklerinin araştırılması “sabit çember problemi” olarak karşımıza çıkmıştır [6].

Peki sabit çember nedir?

(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. x_0 merkezli r yarıçaplı çember

$$C_{x_0, r} = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer her $x \in C_{x_0, r}$ için $Tx = x$ ise bu durumda $C_{x_0, r}$ çemberi T fonksiyonunun bir sabit çemberidir [6].

Sabit çember kavramı benzer şekilde sabit disk kavramına genelleştirilmiştir:

x_0 merkezli r yarıçaplı disk

$$D_{x_0, r} = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer her $x \in D_{x_0, r}$ için $Tx = x$ ise bu durumda $D_{x_0, r}$ diski T fonksiyonunun bir sabit diskidir [7].

Bu problem çerçevesinde, literatürde değişik yaklaşımlar ile farklı sabit çember ve sabit disk sonuçları elde edilmiştir. Örneğin, bu probleme ilk çözüm Özgür ve Taş tarafından Caristi eşitsizliğinden yararlanılarak elde edilmiştir [6]. Daha sonra Özgür tarafından sabit disk kavramı tanıtılıp, simülasyon fonksiyonları yardımıyla bazı sabit disk sonuçları verilmiştir [7]. Taş, Özgür ve Mlaiki 2018 yılında Wardowski tekniği yardımıyla bilinen daralma koşullarından esinlenilerek yeni sabit çember sonuçları ispatlamışlardır [8]. Özgür ve Taş 2018 yılında yardımcı bir fonksiyon ailesi yardımıyla yeni sabit çember teoremleri elde etmişlerdir ve ayrıca sabit çember üzerinde süreksizlik durumlarını da incelemişlerdir [9]. Bisht ve Özgür 2020 yılında $\varepsilon - \delta$ daralma koşulu kavramını kullanarak sabit çember problemine yeni sonuçlar elde etmişler ve sınır ağlarına da bir uygulama vermişlerdir [10]. Çelik ve Özgür 2020 yılında farklı teknikler ile literatüre yeni sabit çember sonuçları kazandırmışlardır [11]. Taş ve Özgür 2020 yılında S -metrik uzaylar üzerinde sabit çember problemine yeni sonuçlar verip, literatürde var olan bazı sabit çember sonuçlarını genellemişlerdir [12]. Özgür ve Taş 2021 yılında Pata Zamfirescu tipinde sabit disk sonuçları elde edip, proximal anlamda bir uygulama vermişlerdir [13]. Roy ve Saha 2022 yılında genelleştirilmiş JS-daralma koşulu yardımıyla sabit çember problemine bir uygulama elde etmişlerdir [14]. Mlaiki ve arkadaşları tarafından 2022 yılında çeşitli ortak sabit çember problemleri de elde edilmiştir [15]. Kaplan ve arkadaşları 2022 yılında yeni bir yardımcı fonksiyon ailesi yardımıyla bu probleme yeni sonuçlar kazandırmışlardır [16]. 2023 yılında da bu problem bulanık esnek küme yardımıyla da çalışılmaya başlanmıştır [17, 18].

Biz de bu çalışmada, metrik uzaylar üzerinde [8] numaralı kaynakta elde edilen sabit çember sonuçlarını JS-daralma koşulu teknikleri [14,19-21] ile birleştirerek yeni sabit çember teoremleri ispatlayacağız. Elde edilen bu sabit çember teoremleri yardımıyla da sabit disk sonuçları vereceğiz. En son olarak, elde edilen teorik sonuçları destekleyen örnekler sunacağız.

II. ANA SONUÇLAR

Bu bölümde bazı sabit çember sonuçları elde edeceğiz. Bunun için de aşağıdaki şekilde tanımlı Ψ ailesini kullanacağız:

Ψ ailesi aşağıdaki koşulları sağlayan $\psi : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonlarının sınıfıdır.

- i) ψ artan bir fonksiyondur.
- ii) $\psi(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$.

Yeni sabit çember sonucu elde etmek için aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.1. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $q, r, s, t \in [0, 1)$ ve $q + r + s + t < 1$ olmak üzere

$$d(Tx, x) > 0 \Rightarrow \psi(d(Tx, x)) \leq \psi(d(x, x_0))^q \psi(d(x, Tx))^r \psi(d(x_0, Tx_0))^s \psi \left[\frac{d(x, Tx_0) + d(x_0, Tx)}{2} \right]^t$$

olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $\psi \in \Psi$ varsa, T fonksiyonuna JS-Ciric tipinde x_0 -daralma denir.

Önerme 2.2. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu $x_0 \in X$ ile bir JS-Ciric tipinde x_0 -daralma olsun. Bu durumda $x_0 = Tx_0$ dır.

İspat. Tersine $x_0 \neq Tx_0$ olsun. Bu durumda, hipotezden

$$\begin{aligned}
\psi(d(Tx_0, x_0)) &\leq \psi(d(x_0, x_0))^q \psi(d(x_0, Tx_0))^r \psi(d(x_0, Tx_0))^s \psi\left[\frac{d(x_0, Tx_0) + d(x_0, Tx_0)}{2}\right]^t \\
&= \psi(0)^q \psi(d(x_0, Tx_0))^r \psi(d(x_0, Tx_0))^s \psi(d(x_0, Tx_0))^t \\
&= \psi(d(x_0, Tx_0))^{r+s+t}
\end{aligned}$$

elde edilir. $r + s + t < 1$ olduğundan,

$$\psi(d(x_0, Tx_0)) = 1$$

olur ve ψ fonksiyonunun tanımından $d(x_0, Tx_0) = 0$ dır, yani $Tx_0 = x_0$ elde edilir. \square

Teorem 2.3. (X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu $x_0 \in X$ ile JS-Ciric tipinde x_0 -daralma olsun ve r sayısı

$$r = \inf \{d(Tx, x) : x \neq Tx\}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $x \in C_{x_0, r}$ için $d(Tx, x_0) = r$ ise bu durumda, T fonksiyonu $C_{x_0, r}$ çemberini sabit bırakır.

İspat. Aşağıdaki durumları dikkate alalım:

Durum1: $r = 0$ olsun. O halde $C_{x_0, r} = \{x_0\}$ olur ve Önerme 2.2 den $C_{x_0, r}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

Durum2: $r > 0$ ve $x \in C_{x_0, r}$ noktası $d(x, Tx) > 0$ olacak şekilde bir nokta olsun. Hipotezden,

$$\begin{aligned}
\psi(d(Tx, x)) &\leq \psi(d(x, x_0))^q \psi(d(x, Tx))^r \psi(d(x_0, Tx_0))^s \psi\left[\frac{d(x, Tx_0) + d(x_0, Tx)}{2}\right]^t \\
&= \psi(r)^q \psi(d(x, Tx))^r \psi(0)^s \psi(r)^t \\
&\leq \psi(d(x, Tx))^q \psi(d(x, Tx))^r \psi(d(x, Tx))^t \\
&= \psi(d(x, Tx))^{q+r+t}
\end{aligned}$$

elde edilir. $q + r + t < 1$ olduğundan $\psi(d(x, Tx)) = 1$ olur ve ψ fonksiyonunun tanımından $d(x, Tx) = 0$, yani $Tx = x$ elde edilir. Sonuç olarak, $C_{x_0, r}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir. \square

Sonuç 2.4. (X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu $x_0 \in X$ ile JS-Ciric tipinde x_0 -daralma ve r sayısı Teorem 2.3 deki gibi tanımlı olsun. Eğer $x \in D_{x_0, r}$ için $d(Tx, x_0) \leq r$ ise bu durumda, T fonksiyonu $D_{x_0, r}$ diskini sabit bırakır.

İspat. Teorem 2.3 ün ispatına benzer şekilde kolayca görülür. \square

Tanım 2.5. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $k \in [0, 1)$ ve $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta < 1$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta > 0$ olmak üzere

$$d(Tx, x) > 0 \Rightarrow \psi(d(Tx, x)) \leq \psi[\alpha d(x, x_0) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(x, Tx_0) + \delta d(x, Tx_0) + \eta d(x_0, Tx)]^k$$

olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $\psi \in \Psi$ varsa, T fonksiyonuna JS-Hardy Rojers tipinde x_0 -daralma denir.

Önerme 2.6. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu $x_0 \in X$ ile bir JS-Hardy Rojers tipinde x_0 -daralma olsun. Bu durumda $x_0 = Tx_0$ dır.

İspat. Tersine $x_0 \neq Tx_0$ olsun. Bu durumda, hipotezden

$$\begin{aligned} \psi(d(Tx_0, x_0)) &\leq \psi[\alpha d(x_0, x_0) + \beta d(x_0, Tx_0) + \gamma d(x_0, Tx_0) + \delta d(x_0, Tx_0) + \eta d(x_0, Tx_0)]^k \\ &= \psi[0 + \beta d(x_0, Tx_0) + 0 + 0 + \eta d(x_0, Tx_0)]^k \\ &= \psi[(\beta + \eta)d(x_0, Tx_0)]^k \\ &< \psi[d(x_0, Tx_0)]^k \end{aligned}$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir. O halde $Tx_0 = x_0$ olmalıdır. \square

Teorem 2.7. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu $x_0 \in X$ ile bir JS-Hardy Rojers tipinde x_0 -daralma ve r sayısı Teorem 2.3 deki gibi tanımlı olsun. Eğer $x \in C_{x_0, r}$ için $d(Tx, x_0) = r$ ise bu durumda T fonksiyonu $C_{x_0, r}$ çemberini sabit bırakır.

İspat. Aşağıdaki durumları dikkate alalım.

Durum 1: $r = 0$ olsun. O halde $C_{x_0, r} = \{x_0\}$ olur ve Önerme 2.6 dan $C_{x_0, r}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

Durum 2: $r > 0$ ve $x \in C_{x_0, r}$ noktası $d(Tx, x) > 0$ olacak şekilde bir nokta olsun. Hipotezden,

$$\begin{aligned} \psi(d(Tx, x)) &\leq \psi[\alpha d(x, x_0) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(x, Tx_0) + \delta d(x, Tx_0) + \eta d(x_0, Tx)]^k \\ &= \psi[\alpha r + \beta d(x, Tx) + \gamma r + \delta r + \eta r]^k \\ &< \psi[(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta)d(x, Tx)]^k \\ &< \psi[d(x, Tx)]^k \end{aligned}$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir. O halde $Tx = x$ olmalıdır. Sonuç olarak $C_{x_0, r}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

Sonuç 2.8. (X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu $x_0 \in X$ ile JS-Hardy Rojers tipinde x_0 - daralma ve r sayısı Teorem 2.3 deki gibi tanımlı olsun. Eğer $x \in D_{x_0, r}$ için $d(Tx, x_0) \leq r$ ise bu durumda, T fonksiyonu $D_{x_0, r}$ diskini sabit bırakır.

İspat. Teorem 2.7 nin ispatına benzer şekilde kolayca görülür. \square

Tanım 2.9. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $k \in [0, 1)$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ve $\alpha + \beta + \gamma < 1$ olmak üzere

$$d(Tx, x) > 0 \Rightarrow \psi(d(Tx, x)) \leq \psi[\alpha d(x, x_0) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(x_0, Tx_0)]^k$$

olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $\psi \in \Psi$ varsa T fonksiyonuna JS-Reich tipinde x_0 -daralma denir.

Önerme 2.10. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu $x_0 \in X$ ile bir JS-Reich tipinde x_0 - daralma olsun. Bu durumda $x_0 = Tx_0$ dır.

İspat. Tersine $x_0 \neq Tx_0$ olsun. Bu durumda hipotezden

$$\begin{aligned} \psi(d(Tx_0, x_0)) &\leq \psi[\alpha d(x_0, x_0) + \beta d(x_0, Tx_0) + \gamma d(x_0, Tx_0)]^k \\ &= \psi[\alpha 0 + \beta d(x_0, Tx_0) + \gamma d(x_0, Tx_0)]^k \\ &= \psi[(\beta + \gamma)d(x_0, Tx_0)]^k \\ &< \psi[d(x_0, Tx_0)]^k \end{aligned}$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir. O halde $Tx_0 = x_0$ olmalıdır. \square

Teorem 2.11. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu $x_0 \in X$ ile bir JS-Reich tipinde x_0 - daralma ve r sayısı Teorem 2.3 deki gibi tanımlı olsun. Bu durumda, T fonksiyonu $C_{x_0, r}$ çemberini sabit bırakır.

İspat. Aşağıdaki durumları dikkate alalım:

Durum 1: $r = 0$ olsun. O halde $C_{x_0, r} = \{x_0\}$ olur ve Önerme 2.10 dan $C_{x_0, r}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

Durum 2: $r > 0$ ve $x \in C_{x_0, r}$ noktası $d(Tx, x) > 0$ olacak şekilde bir nokta olsun. Hipotezden,

$$\begin{aligned} \psi(d(Tx, x)) &\leq \psi[\alpha d(x, x_0) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(x_0, Tx_0)]^k \\ &= \psi[\alpha r + \beta d(x, Tx) + \gamma r]^k \\ &< \psi[(\alpha + \beta + \gamma)d(x, Tx)]^k \\ &< \psi[d(x, Tx)]^k \end{aligned}$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir. O halde $Tx = x$ olmalıdır. Sonuç olarak $C_{x_0, r}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

Sonuç 2.12. (X, d) bir metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu $x_0 \in X$ ile JS-Reich tipinde x_0 -daralma ve r sayısı Teorem 2.3 deki gibi tanımlı olsun. Bu durumda, T fonksiyonu $D_{x_0, r}$ diskini sabit bırakır.

İspat. Teorem 2.11 in ispatına benzer şekilde kolayca görülür. \square

Tanım 2.13. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $k \in [0, 1)$ ve $\eta \in (0, 1)$ olmak üzere

$$d(Tx, x) > 0 \Rightarrow \psi(d(Tx, x)) \leq \psi \left[\eta(d(x, Tx_0) + d(x_0, Tx)) \right]^k$$

olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $\psi \in \Psi$ varsa, T fonksiyonuna JS-Chatterjea tipinde x_0 -daralma denir.

Önerme 2.14. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu $x_0 \in X$ ile bir JS-Chatterjea tipinde x_0 -daralma olsun. Bu durumda $x_0 = Tx_0$ dir.

İspat. Tersine $x_0 \neq Tx_0$ olsun. Bu durumda, hipotezden

$$\begin{aligned} \psi(d(Tx_0, x_0)) &\leq \psi \left[\eta(d(x_0, Tx_0) + d(x_0, Tx_0)) \right]^k \\ &= \psi \left[2\eta d(x_0, Tx_0) \right]^k \\ &< \psi \left[d(x_0, Tx_0) \right]^k \end{aligned}$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir. O halde $Tx_0 = x_0$ olmalıdır. \square

Teorem 2.15. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu $x_0 \in X$ ile bir JS-Chatterjea tipinde x_0 -daralma ve r sayısı Teorem 2.3 deki gibi tanımlı olsun. Eğer $x \in C_{x_0, r}$ için $d(Tx, x_0) = r$ ise bu durumda T fonksiyonu $C_{x_0, r}$ çemberini sabit bırakır.

İspat. Aşağıdaki durumları dikkate alalım.

Durum 1: $r = 0$ olsun. O halde $C_{x_0, r} = \{x_0\}$ olur ve Önerme 2.14 den $C_{x_0, r}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

Durum 2: $r > 0$ ve $x \in C_{x_0, r}$ noktası $d(Tx, x) > 0$ olacak şekilde bir nokta olsun. Hipotezden,

$$\begin{aligned}
\psi(d(x, Tx)) &\leq \psi[\eta(d(x, Tx_0) + d(x_0, Tx))]^k \\
&= \psi[\eta(r+r)]^k \\
&= \psi[2\eta(r)]^k \\
&< \psi[2\eta d(x, Tx)]^k \\
&< \psi[d(x, Tx)]^k
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir. O Halde $Tx = x$ olmalıdır. Sonuç olarak $C_{x_0, r}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir. \square

Sonuç 2.16. (X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu $x_0 \in X$ ile JS-Chatterjea tipinde x_0 - daralma ve r sayısı Teorem 2.3 deki gibi tanımlı olsun. Eğer $x \in D_{x_0, r}$ için $d(Tx, x_0) \leq r$ ise bu durumda, T fonksiyonu $D_{x_0, r}$ diskini sabit bırakır.

İspat. Teorem 2.15 in ispatına benzer şekilde kolayca görülür. \square

III. ÖRNEKLER

Bu bölümde ikinci bölümde verilen teorik sonuçlara bazı örnekler verilecektir.

Örnek 3.1. $X = \square$ alışımlı metrik uzay ve $T : \square \rightarrow \square$ fonksiyonu her $x \in \square$ için

$$Tx = \begin{cases} 3 & , \quad x = 2 \\ x & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu duruda T fonksiyonu $x_0 = 0$ ve her $x \in \square$ için

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \\ 2 & , \quad x = 1 \\ 25 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\psi : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu ile JS-Ciric x_0 -daralmadır. Gerçekten, $x = 2$ için

$$d(3, 2) = 1, \quad d(2, 0) = 2, \quad d(0, 0) = 0, \quad d(0, 3) = 3$$

ve $s = 0, r = 0, q = \frac{1}{4}, t = \frac{1}{4}$ seçilirse

$$\psi(1) \leq \psi(2)^q \psi(1)^r \psi(0)^s \psi\left(\frac{2+3}{2}\right)^t \Rightarrow 2 \leq 25^q \cdot 2^r \cdot 1^s \cdot 25^t = 25^{q+t} = \sqrt{25} = 5$$

elde edilir. Ayrıca

$$r = \inf \{d(Tx, x) : x \neq Tx\} = 1$$

olduğundan $C_{0,1} = \{-1,1\}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

Örnek 3.2. $X = \mathbb{R}$ alışılmış metrik uzay ve $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için

$$Tx = \begin{cases} 9 & , \quad x = 8 \\ x & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T fonksiyonu $x_0 = 0$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \\ 2 & , \quad x = 1 \\ 25 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\psi : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu ile JS-Hardy Rojers tipinde x_0 -daralmadır. Gerçekten, $x = 8$ için

$$d(8,0) = 8, d(8,9) = 1, d(0,9) = 9$$

ve $\alpha = \frac{1}{8}0, \gamma = \frac{1}{8}, \delta = \frac{1}{8}, \beta = \frac{1}{2}, \eta = \frac{1}{18}$ seçilirse

$$\psi(1) \leq \psi(4)^k = \psi(4)^{\frac{1}{2}} = \psi(2) = 25$$

elde edilir. Ayrıca

$$r = \inf \{d(Tx, x) : x \neq Tx\} = 1$$

olduğundan $C_{0,1} = \{-1,1\}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

Örnek 3.3. $X = \mathbb{R}$ alışılmış metrik uzay ve $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için

$$Tx = \begin{cases} 5 & , \quad x = 4 \\ x & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T fonksiyonu $x_0 = 0$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \\ 2 & , \quad x = 1 \\ 25 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\psi : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu ile JS-Reich tipinde x_0 -daralmadır. Gerçekten, $x = 4$ için

$$d(4, 0) = 4, d(4, 5) = 1, d(0, 0) = 0$$

ve $\alpha = \frac{1}{8}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{8}$ seçilirse

$$\psi(1) \leq \psi(1)^{\frac{1}{2}} = \psi(1)$$

elde edilir. Ayrıca

$$r = \inf \{d(Tx, x) : x \neq Tx\} = 1$$

olduğundan $C_{0,1} = \{-1, 1\}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

Örnek 3.4. $X = \square$ alışılmış metrik uzay ve $T : \square \rightarrow \square$ fonksiyonu her $x \in \square$ için

$$Tx = \begin{cases} 13 & , \quad x = 12 \\ x & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T fonksiyonu $x_0 = 0$ ve her $x \in \square$ için

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \\ 2 & , \quad x = 1 \\ 25 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\psi : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu ile JS-Chatterjea tipinde x_0 -daralmadır. Gerçekten, $x = 12$ için

$$d(12, 0) = 12, d(0, 13) = 13$$

ve $\eta = \frac{1}{5}, k = \frac{1}{2}$ seçilirse

$$\psi(1) \leq \psi(\sqrt{5}) = 25$$

elde edilir. Ayrıca

$$r = \inf \{d(Tx, x) : x \neq Tx\} = 1$$

olduğundan $C_{0,1} = \{-1, 1\}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

IV. KAYNAKLAR

- [1] L. B. Ćirić, “A generalization of Banach’s contraction principle,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 45, no. 2, pp. 267—273, 1974.
- [2] L. B. Ćirić, “Generalized contractions and fixed-point theorems,” *Publications de L’Institut Matheematique*, vol. 12, no. 26, pp. 19—26, 1971.
- [3] G. E. Hardy, and T. D. Rogers, “A generalization of a fixed point theorem of Reich”, *Canadian Mathematical Bulletin*, vol. 6, pp. 201—206, 1973.
- [4] S. Reich, “Some remarks concerning contraction mappings,” *Canadian Mathematical Bulletin*, vol. 14, pp. 121—124, 1971.
- [5] S. K. Chatterjea, “Fixed-point theorems,” *Comptes Rendus de l’Academie Bulgare des Sciences*, vol. 25, pp. 727—730, 1972.
- [6] N. Y. Özgür, and N. Taş, “Some fixed-circle theorems on metric spaces,” *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, vol. 42, no. 4, pp. 1433—1449, 2019.
- [7] N. Y. Özgür, “Fixed-disc results via simulation functions,” *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 43, no. 6, pp. 2794—2805, 2019.
- [8] N., Taş, N. Y. Özgür, and N. Mlaiki, “New types of Fc-contractions and the fixed-circle problem,” *Mathematics*, vol. 6, pp. 188, 2018.
- [9] N. Y. Özgür, and N. Taş, “Some fixed-circle theorems and discontinuity at fixed circle,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 1926, no. 1, pp. 020048, 2018.
- [10] R. K. Bisht, and N. Özgür, “Geometric properties of discontinuous fixed point set of $\varepsilon - \delta$ contractions and applications to neural networks,” *Aequationes Mathematicae*, vol. 94, no. 5, pp. 847—863, 2020.
- [11] U. Çelik, and N. Özgür, “On the fixed-circle problem,” *Facta Universitatis-Series Mathematics and Informatics*, vol. 35, no. 5, pp. 1273—1290, 2020.
- [12] N. Taş, and N. Özgür, “On the geometry of fixed points for self-mappings on S-metric spaces,” *Communications de la Faculté des Sciences de l’Université d’Ankara. Séries A1. Mathematics and Statistics*, vol. 69, no. 2, pp. 1184—1192, 2020.
- [13] N. Özgür, and N. Taş, “Pata Zamfirescu type fixed-disc results with a proximal application,” *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, vol. 44, no. 4, pp. 2049—2061, 2021.
- [14] K. Roy, and M. Saha, “Fixed point theorems for a class of extended JS contraction mappings over a generalized metric space with an application to fixed circle problem,” *Proyecciones Journal of Mathematics*, vol. 41, no. 6, pp. 1551—1572, 2022.
- [15] N. Mlaiki, N. Taş, E. Kaplan, S. S. Aiadi, and A. K. Souayah, “Some common fixed-circle results on metric spaces,” *Axioms*, vol. 11, pp. 454, 2022.
- [16] E. Kaplan, N. Mlaiki, N. Taş, S. Haque, and A. K. Souayah, “Some fixed-circle results with different auxiliary functions,” *Journal of Function Spaces*, vol. 2022, 7 pages, Article ID 2775733, 2022.

- [17] D. Gopal, J. M. Moreno, and N. Özgür, “On fixed figure problems in fuzzy metric spaces,” *Kybernetika*, vol. 59, no. 1, pp. 110—129, 2023.
- [18] E. Kaplan, “New fixed-circle results on fuzzy metric spaces with an application to dynamic market equilibrium,” *Mathematica Moravica*, vol. 27, no. 1, pp. 73—83, 2023.
- [19] N. Hussain, V. Parvaneh, B. Samet, and C. Vetro, “Some fixed point theorems for generalized contractive mappings in complete metric spaces”, *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2015, pp. 185, 2015.
- [20] M. Jleli, and B. Samet, “A new generalization of the Banach contraction principle”, *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2014, Article ID 38, 2014.
- [21] M. Jleli, E. Karapınar, and B. Samet, “Further generalizations of the Banach contraction principle”, *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2014, Article ID 439, 2014.