Çukurova Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi, 32(1), ss. 23-29, Mart 2017
Çukurova University Journal of the Faculty of Engineering and Architecture, 32(1), pp. 23-29, March 2017

Daire Eksenli Yapı Elemanlarının Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ile Statik Analizi

Timuçin Alp ASLAN [*1], Ahmad Reshad NOORI [1] ve Beytullah TEMEL [1]

[1]*Çukurova Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü*

Geliş tarihi: 03.01.2017 *Kabul tarihi: 14.03.2017*

Öz

Bu çalışmada, geometrik özellikleri eksen boyunca değişen, düzlemi içinde ve düzlemine dik yüklü eğri eksenli çubukların statik yükler altında analizleri incelenmiştir. Analizlerde homojen, izotropik ve elastik malzemeler seçilmiştir. Bu tür yapı elemanlarının statik yükler altında davranışını idare eden temel denklemler özetlenmiş, kanonik formda elde edilen birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımlarının çözümleri Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile yapılmıştır. Düzlemsel yapı elemanlarının statik analizleri için genel amaçlı Fortran dillinde bilgisayar programları hazırlanmıştır. Hazırlanan bilgisayar programlarının kontrolü, literatürde mevcut değişik yöntemlerin sonuçları ve analitik çözümler ile karşılaştırılarak, literatür ile uyumlu ve etkin oldukları gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Eğri eksenli çubuklar, İki-noktalı sınır değer problemleri, Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi

Static Analysis of the Circular Structural Elements with the Complementary Functions Method

Abstract

In this study, in-plane loaded and perpendicularly loaded to plane curved rods with variable geometric properties along the axis subjected to static loads are theoretically investigated. The materials of the structural elements are assumed to be homogeneous, isotropic and elastic. The governing equations of such structural elements under static loads have been summarized. The obtained canonical form of the first order ordinary differential equations has been solved by Complementary Functions Method (CFM). For the suggested models, the computer programs with the static analysis of the planar curved structural elements are coded in Fortran. Verification of the computer programs are performed by comparing the results of the present methods with the other numerical methods and analytical solutions. The procedures have been proved to be highly accurate and efficient compared to various other numerical methods available in the literatures.

Keywords: Curved axis rods, Two-point boundary value problems, Complementary functions method

[*]Sorumlu (Corresponding author) yazar: Timuçin Alp ASLAN, *taslan@cu.edu.tr*

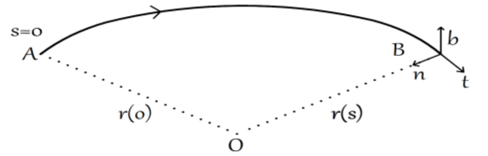
1. GİRİŞ

Bazı mühendislik problemlerinin iki noktalı sınır değer problemleri olarak etkin çözümlerinin araştırılması hala güncelliğini devam ettirmektedir. Bu tür problemlere; doğrusal ve eğrisel çubuk sistemleri gibi birçok yapı elemanları örnek olarak verilebilir. Çubuklar, günümüzde birçok mühendislik alanında; örneğin inşaat, makina, otomotiv gibi önemli endüstri kollarında yapısal eleman olarak kullanılmaktadır. Genellikle inşaat mühendisliğinde kemer, köprü ve merdivenler gibi eğri eksenli yapı elemanları olarak kullanılagelmektedir. Bu sebeptendir ki, yukarıda bahsedilen yapı elemanlarının statik yükler altında davranışının belirlenmesi önem arz etmektedir.

Özbek [1], eğri eksenli çubukların statik davranışlarını incelemiştir. Deplasman ve kesit tesirlerini, birbirleriyle ardışık türevler ile ilk defa ifade ederek elde etmiştir. İnan [2], elastik çubukların genel teorisini incelemiş, buradan doğru, düzlemsel ve daire eksenli çubukların taşıma matrisini elde ederek, çözümlerde taşıma matrisi yöntemini uygulamıştır. Haktanır ve Kıral [3], ekseni düzleminde herhangi bir eğri olabilen, kesit geometrisi eksen boyunca değişebilen çubukların, düzlemi içinde veya düzlemine dik, çubuk ekseni boyunca değişken yükler altında, çubuk statiğini idare eden diferansiyel denklemlerin çözümünde Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY)'ni kullanmışlardır. Bayhan [4], daire eksenli düzlem çerçevelerin statik yükler altındaki davranışları Taşıma ve Rijitlik Matrisi yöntemi ile gerçekleştirmiştir. Daire eksenli elemanların eleman rijitlik matrisi ve eleman yük vektörleri Taşıma Matrisi yöntemiyle elde etmiştir. Haktanır [5], elastik ve izotrop malzemeye sahip düzlemsel çubukların statik davranışını TFY'ne dayalı rijitlik matrisi yöntemiyle incelemiştir. Elde ettiği denklemlerin çözümünde Runge-Kutta 4 (RK4) algoritmasını kullanmıştır. Bozkurt [6], eğri eksenli yapıların statik yükler altında eğilmesini hesaplamak için, (TFY'ni kullanmıştır. Çözümlerde Taylor algoritmasını kullanmıştır. Çalım [7], eğri eksenli çubuk sistemlerin statik yükler altındaki davranışlarını idare eden denklemleri, kanonik halde birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı halinde elde etmiştir. Bu denklemleri (RK4) algoritmasını kullanarak direk Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ve Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemine dayalı Rijitlik Matrisi yöntemi ile çözmüştür. Karaca [8], düzlemi içinde ve düzlemine dik yüklü daire eksenli çubukların statik ve dinamik analizlerini teorik olarak incelemiştir. Yapılan araştırmalar sonunda, eğri eksenli düzlemsel yapı elemanlarının statik yüklemeler altındaki çözümlerinin farklı yöntemlerle yapıldığına dair birçok çalışmaya rastlanmaktadır. Bu çalışmada geometrik özellikleri ve yükleri eksen boyunca değişen, düzlemi içinde veya düzlemine dik yüklü çubukların, davranışını idare eden diferansiyel denklemlerin çözümlerinde TFY kullanılmıştır. TFY, iki noktalı sınır değer problemlerini başlangıç değer problemine dönüştüren bir sayısal çözüm yöntemidir. Bu çalışmada başlangıç değer probleminin çözümleri için bu çalışmada 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmıştır. Önceki çalışmalarda, analizlerde (RK4) algoritması kullanılmıştır. Ele alınan çubuk malzemesi homojen, izotropik ve lineer elastiktir. Daire eksenli çubuklarda ara mesnet ve ara tekil yüklerin bulunduğu durumlarda, Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ile doğrudan çözümler kolaylıkla yapılamamaktadır. Bu nedenle, TFY ile eleman rijitlik matrisleri ve eleman yük vektörleri bulunarak, analizler rijitlik matrisi metodu ile yapılabilmektedir. Bu amaçla her bir durum için Fortran dilinde bilgisayar programları hazırlanmıştır. Hazırlanan programdan elde edilen sonuçlar, literatürde verilen analitik çözümler tablolar üzerinde karşılaştırılmıştır.

2. MATERYAL VE METOT

Çubuk ekseni olarak herhangi bir eğri düşünülecek olursa; böyle bir eğri:
$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ yer vektörü ile tarif edilir. (Şekil 1)



Şekil 1. Çubuk ekseni

Burada s eğri üzerinde başlangıç olarak seçilen bir A noktası ile B noktası arasındaki mesafeyi ifade eder, s seçilen doğrultuda pozitiftir. Eğri eksenli çubuklarda, eksene bağlı hareketli bir koordinat takımının (**t**, **n**, **b**) seçilmesi problemin tanımlanmasında kolaylık sağlamaktadır. Ayrıca her üç birim vektör de yer vektörüne bağlıdır.

Burada **t**, **n** ve **b** sırasıyla teğet, normal ve binormal birim vektörleri olarak tarif edilmektedir. **t** artan s yönünde, **n** teğet birim vektöre dik olup, yönü eğrilik merkezine doğrudur. **b,** binormal birim vektör olup, **t** ve **n** birim vektörlerinin oluşturdukları düzleme diktir. Bu şekilde tarif edilen; **t**, **n**, **b** birim vektörlerinin teşkil ettiği takım sağ el kuralına göre teşkil edilir ve aralarında Frenet formülleri denilen türevsel bağıntılar vardır.

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \chi\,\mathbf{n}\,, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \tau\mathbf{b} - \chi\,\mathbf{t}\,, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau\mathbf{n} \tag{1}$$

Burada χ, eğrilik olup daima pozitiftir. τ, tabii burulmayı ifade eder ve uzay eğrilerinde sıfırdan farklı, düzlemsel eğriler için sıfırdır. $\tau = 0$ olan eğrilere doğru denilmektedir. Daire için ise, $\chi = \text{sabittir}$.

Statik halde denge, bünye ve uygunluk denklemlerinden elde edilen ifadeler aşağıda verilmektedir.

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \tag{2}$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \mathbf{m} = \mathbf{0} \tag{3}$$

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - [D]^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{4}$$

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega} - [C]^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{0} \tag{5}$$

Burada hesaplanması gereken iç kuvvetler, **T** ve **M** ile; yer değiştirme ve dönme, **U** ve **Ω** olmak üzere dört vektörel büyüklük vardır. Hesaplarda kolaylık sağlaması bakımından skaler denklemlerle işlem yapılması uygun olacaktır. Eksen takımı olarak (**t**, **n**, **b**) hareketli takımı alınmış olup, bu vektörel ifadeler sözü edilen hareketli takıma aktarılmıştır. Hesaplarda serbest değişken s yerine ϕ ifadesi kullanılmıştır. Aralarında $ds = rd\phi$ bağıntısı vardır. Eğrilik ise, $\chi = 1/r$ şeklinde tarif edilir. Böylece eğri eksenli çubukların statik yükler altındaki davranışı idare eden genel denklemler vektörel formda elde edilmiş ve sonra sayısal çözüm yapılacağından, denklemler hareketli takıma aktarılmıştır. Denklemlerin, düzlemi içinde ve düzlemine dik yüklü olmak üzere, altışar adet iki gruba ayrılması hesaplamalarda büyük kolaylık sağlayacaktır.

2.1. Düzlemi İçinde Yüklü Hal için Kanonik Denklemler

Bu grupta kanonik halde,

$$\begin{aligned}
\frac{dU_t}{d\phi} &= U_n + r\frac{T_t}{C_{tt}} \\
\frac{dU_n}{d\phi} &= -U_t + r\Omega_b + r\frac{T_n}{C_{nn}} \\
\frac{d\Omega_b}{d\phi} &= r\frac{M_b}{D_{bb}} \\
\frac{dT_t}{d\phi} &= T_n - rp_t \\
\frac{dT_n}{d\phi} &= -T_t - rp_n \\
\frac{dM_b}{d\phi} &= -rT_n - rm_b
\end{aligned} \tag{6}$$

şeklinde düzlemi içinde yüklü hal için 6 adet olarak elde edilir.

2.2. Düzlemine Dik Yüklü Hal için Kanonik Denklemler

Bu gruptaki kanonik denklemler ise,

$$\begin{aligned}
\frac{dU_b}{d\phi} &= -r\Omega_n + r\frac{T_b}{C_{bb}} \\
\frac{d\Omega_t}{d\phi} &= \Omega_n + r\frac{M_t}{D_{tt}} \\
\frac{d\Omega_n}{d\phi} &= -\Omega_t + r\frac{M_n}{D_{nn}} \\
\frac{dT_b}{d\phi} &= -rp_b \\
\frac{dM_t}{d\phi} &= M_n - rm_t \\
\frac{d\,M_n}{d\phi} &= -M_t + rT_b - rm_n
\end{aligned} \tag{7}$$

şeklinde düzlemine dik yüklü hal için 6 adet denklem olarak yer almaktadır.

2.3. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ile Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Birinci mertebeden 6 adet diferansiyel denklem,

$$\frac{d\{\mathbf{Y}(\phi)\}}{d\phi} = [\mathbf{A}(\phi)]_{6x6}[\mathbf{Y}(\phi)]_{6x1} + [\mathbf{F}(\phi)]_{6x1} \quad (8)$$

şeklinde olsun. Burada ϕ bağımsız değişken, $\{\mathbf{Y}\}$ bilinmeyen bağımlı değişkenleri içeren kolon matris, $[\mathbf{A}]$ diferansiyel geçiş matrisi, $\{\mathbf{F}\}$ yüklemeyi içeren kolon matristir. Düzlem içinde yüklü daire eksenli çubuklar için durum vektörünün elemanları

$$\mathbf{Y}(\phi) = \{U_t(\phi), U_n(\phi), \Omega_b(\phi), T_t(\phi), T_n(\phi), M_b(\phi)\}^T \quad (9)$$

olarak tanımlanmaktadır. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi, başlangıç şartları yardımıyla (8) denkleminin çözümüne dayanmaktadır. TFY ile sınır değer problemi başlangıç değer problemine indirgenmektedir. Denklemin genel çözümü ise,

$$\{\mathbf{Y}(\phi)\} = \sum_{m=1}^{6} C_m \left(\mathbf{U}^{(m)}(\phi)\right) + \{\mathbf{V}(\phi)\} \quad (10)$$

şeklindedir. $\mathbf{U}^{(m)}(\phi)$ m'inci bileşenine 1, diğerlerine sıfır değeri verilerek elde edilen homojen çözümdür. $\mathbf{V}(\phi)$ ise, başlangıç şartları sıfır alınarak elde edilen özel çözümdür. Burada C_m integrasyon sabiti sınır şartlarından elde edilmektedir.

2.4. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemine Dayalı Rijitlik Matrisinin Hesaplanması

Eleman denklemi aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$\{\mathbf{p}\} = [\mathbf{k}]\{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{f}\} \quad (11)$$

Her düğümde üç serbestlik derecesi olmak üzere, bunun ikisi deplasman birisi dönmedir. Elemanın başlangıç düğümü i, diğer ucu j düğümü olmak üzere eleman deplasman ve eleman uç kuvvetleri:

$$\{\mathbf{d}\} = \left\{U_t(\phi_i), U_n(\phi_i), \Omega_b(\phi_i), U_t\left(\phi_j\right), U_n\left(\phi_j\right), \Omega_b\left(\phi_j\right)\right\}^T$$

$$\{\mathbf{p}\} = \{T_t(\phi_i), T_n(\phi_i), M_b(\phi_i), T_t(\phi_j), T_n(\phi_j), M_b(\phi_j)\}^T \quad (12)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Eleman rijitlik matrisini hesaplamak için (8) ifadesindeki eleman uç deplasmanlarına sırasıyla birim deplasman uygulanır. Bu işlem 6 kez tekrarlanır. Ankastrelik uç kuvvetleri ise, bütün uç deplasmanları sıfıra eşitleyerek (8) denkleminin çözümünden hesaplanmaktadır.

$$\{\mathbf{f}\}=\{-T_t(\phi_i), -T_n(\phi_i), -M_b(\phi_i), T_t(\phi_j), T_n(\phi_j), M_b(\phi_j)\}^T \quad (13)$$

Eleman koordinatlarında elde edilen bu denklemlerden sistem koordinatlarına geçmek için aşağıdaki transformasyon işlemi uygulanmalıdır.

$$[\mathbf{k}'] = [\mathbf{T}]^T\,[\mathbf{k}]\,[\mathbf{T}];[\mathbf{f}'] = [\mathbf{T}]^T\,[\mathbf{f}] \quad (14)$$

Burada T transformasyon matrisi olup eğri eksenli düzlemsel çubuklar için aşağıda verilmektedir. Çubuğun i ve j uçları için dönüşüm matrisleri:

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{t}_i} & 0 \\ \underline{0} & \underline{\mathbf{t}_j} \end{bmatrix},\quad \underline{\mathbf{t}_i} = \begin{bmatrix} Cos\phi_i & -Sin\phi_i & 0 \\ Sin\phi_i & Cos\phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{t}_j} = \begin{bmatrix} Cos\phi_j & -Sin\phi_j & 0 \\ Sin\phi_j & Cos\phi_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

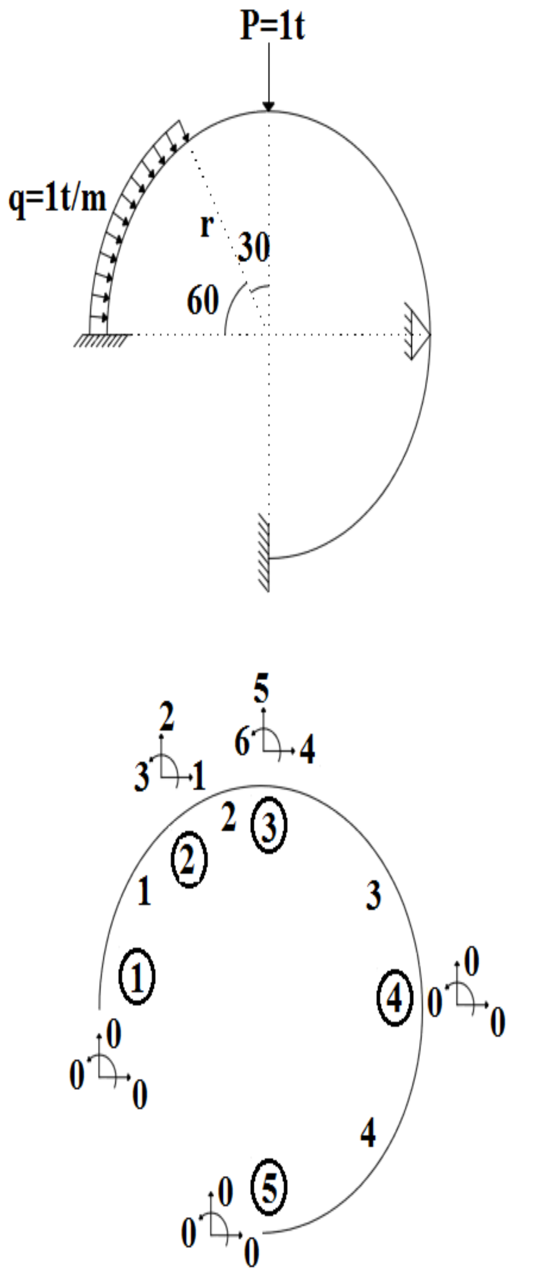
Bu şekilde sistem koordinatlarında elde edilen eleman matrislerinin uygun bileşenleri kullanılarak, kodlama tekniği ile sistem rijitlik matrisi ve sistem yük vektörü oluşturulmaktadır.

Düzlemine dik yüklü daire eksenli çubuklar için de işlemler benzer şekilde yapılmaktadır.

3. SAYISAL UYGULAMALAR

Örnek 1: Düzlemi içinde yüklü daire eksenli çubuk

Düzlemi içinde yüklü daire eksenli çubuk problemi göz önüne alınmaktadır (Şekil 2). Daire eksenli kirişe, $q_n = 1\ \mathrm{t/m}$ yayılı ve P= 1 t şiddetinde tekil yük uygulanmıştır. Geometrik ve malzeme özellikleri: atalet momenti I_b= 1/12 m^4, yarıçap r=10m, elastisite modülü E=1×10^6 t/m^2, poisson oranı v=0,3 ve $A = 1\ \mathrm{m}^2$ olarak verilmiştir. Bulunan sonuçlar Çizelge 1'de verilmektedir. Ayrıca ANSYS [9] programı yardımıyla, 90 adet doğru eksenli elaman kullanılarak bulunan kesit tesirleri Çizelge 1'de karşılaştırılmıştır.



Şekil 2. Düzlemi içinde yüklü daire eksenli çubuk ve kodlama durumu

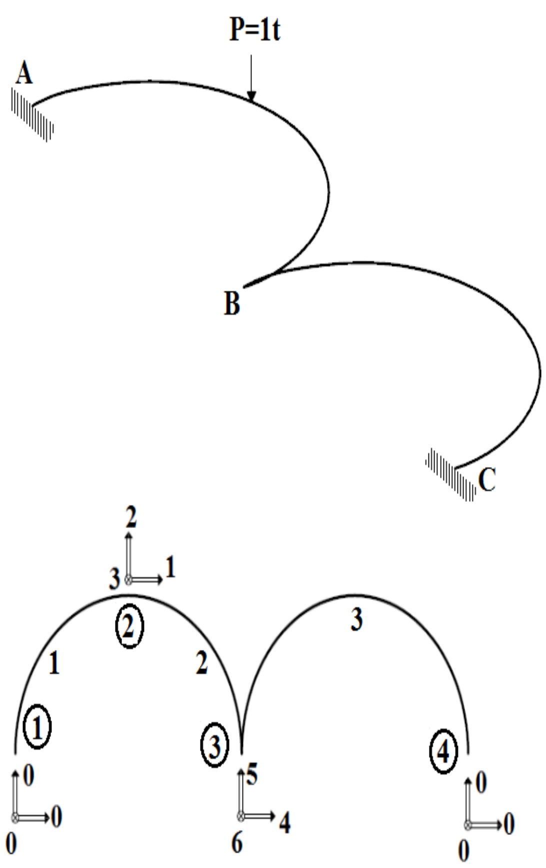
Çizelge 1. Düzlemi içinde yüklü daire eksenli çubukların uç kuvvetleri

Eleman No	Kesit Tesirleri	Bu çalışma	Bayhan [4] Taşıma Matrisi	ANSYS [9] (90 Eleman)
1	T_{ti}	4,318	4,318	4,32
	T_{ni}	-6,203	-6,203	-6,204
	M_{bi}	-19,052	-19,052	-19,07
	T_{tj}	-1,787	-1,787	-1,788
	T_{nj}	-1,819	-1,819	-1,814
	M_{bj}	-6,262	-6,262	-6,26
2	T_{ti}	1,787	1,787	1,788
	T_{ni}	1,819	1,819	1,814
	M_{bi}	6,262	6,262	6,26
	T_{tj}	-2,457	-2,457	-2,456
	T_{nj}	-0,682	-0,682	-0,68
	M_{bj}	0,438	0,438	0,428
3	T_{ti}	2,457	2,457	2,456
	T_{ni}	1,682	1,682	1,68
	M_{bi}	-0,438	-0,438	-0,428
	T_{tj}	-1,682	-1,682	-1,68
	T_{nj}	2,457	2,457	2,456
	M_{bj}	-7,316	-7,316	-7,333
4	T_{ti}	1,174	1,174	1,207
	T_{ni}	1,675	1,675	1,7
	M_{bi}	7,316	7,316	7,333
	T_{ij}	-1,675	-1,675	-1,7
	T_{nj}	1,174	1,174	1,207
	M_{bj}	-2,309	-2,309	-2,398

Çizelge 1'de görüldüğü gibi, bu çalışma da elde edilen sonuçlar, ANSYS ve literatürde verilen sonuçlar ile uyum içerisindedir.

Örnek 2: Düzlemine dik yüklü iki açıklıklı daire eksenli çubuk

İki yarım daireden oluşan iki ucu ankastre düzlemine dik yüklü daire eksenli çubuk problemi ele alınmaktadır (Şekil 3). Daire eksenli kirişe, P = 1 t şiddetinde tekil yük uygulanmıştır. Geometrik ve malzeme özellikleri: atalet momentleri I_n=1/12 m^4, I_t=0,141m^4, yarıçap r=10 m, elastisite modülü E=1×10^6 t/m^2, Poisson oranı ν=0,3 ve $A = 1\ m^2$ olarak verilmiştir Bulunan sonuçlar, Bayhan [4] ve ANSYS programı yardımıyla 100 adet doğru eksenli elaman kullanılarak bulunan kesit tesirleri Çizelge 2'de kıyaslanmıştır.



Şekil 3. Düzlemine dik yüklü iki açıklıklı daire eksenli çubuk ve kodlama durumu

Bu problem Çizelge 2 üzerinde literatür ile karşılaştırılmıştır. Ancak literatürde verilen burulma atalet momenti değeri, I_t =0,208 m^4 hatalı verilmiş olup, bu hatalı atalet momenti için literatür ile karşılaştırılmış ve uyum içerisinde oldukları görülmüştür. Ayrıca, doğru burulma atalet momenti, I_t =0,141 m^4 değeri için problem tekrar çözülmüş ve ANSYS ile uyum içinde olduğu görülmüştür.

Çizelge 2. Düzlemine dik yüklü iki açıklıklı daire eksenli çubukların uç kuvvetleri

Eleman No	Kesit Tesirleri	Bu Çalışma TFY ile I_t=0,141 m^4	ANSYS [9] (100 Eleman) I_t=0,141 m^4	Bayhan [4] Taşıma Matrisi I_t=0,208 m^4	Bu Çalışma TFY ile I_t=0,208 m^4
1.	M_{ti}	-4,531	-4,728	-4,543	-4,544
	M_{ni}	7,933	8,34	7,869	7,869
	T_{bi}	-0,806	-0,816	-0,807	-0,807
	M_{tj}	0,128	0,196	0,199	0,199
	M_{nj}	3,530	3,44	3,522	3,524
	T_{bj}	0,806	0,816	0,807	0,807
2.	M_{ti}	-0,128	-0,196	-0,199	-0,199
	M_{ni}	-3,530	-3,44	-3,524	-3,524
	T_{bi}	0,194	0,184	0,193	0,193
	M_{tj}	1,592	1,589	1,592	1,592
	M_{nj}	-2,067	-1,660	-2,131	-2,131
	T_{bj}	-0,194	-0,184	-0,193	-0,193
3.	M_{ti}	1,592	1,589	1,592	1,592
	M_{ni}	-2,067	-1,66	-2,131	-2,131
	T_{bi}	0,194	0,184	0,193	0,193
	M_{tj}	-2,286	-2,09	-2,273	-2,273
	M_{nj}	-2,067	-1,66	-2,131	-2,131
	T_{bj}	-0,194	-0,184	-0,193	-0,193

4. SONUÇLAR

Eğri eksenli çubukların statik davranışı için denge denklemleri, bünye denklemleri ve uygunluk şartlarından dört adet vektörel denklem elde edilmiş ve sonra sayısal çözüm yapılabilmesi bakımından denklemler hareketli takıma aktarılmıştır. Denklemlerin, düzlemi içinde ve düzlemine dik yüklü olmak üzere, altışar adet iki gruba ayrılması hesaplamalarda büyük kolaylık sağlamaktadır. Eksenel ve kayma deformasyonu etkileri de dikkate alınarak yapılan çözümler için

Fortran dilinde bilgisayar programları hazırlanmıştır. Hazırlanan programdan elde edilen sonuçlar, literatürde verilen analitik çözümler ile tablolar üzerinde karşılaştırılmış ve sonuçların uyum içerisinde olduğu görülmüştür.

5. TEŞEKKÜR

Bu çalışma Çukurova Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından desteklenmiştir (FBA-2016-6007).

6. KAYNAKLAR

1. Özbek, T., 1963. Bulletin of Technical University of İstanbul, vol. 15.
2. İnan, M., 1966. Elastik Çubukların Genel Teorisi, Berksoy Matbaası, İstanbul, 179s.
3. Haktanır, V., Kıral E., 1991. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yönteminin Düzlemsel Çubukların Statiğine Doğrudan Uygulanması, Ç.Ü. Müh. Mim. Fak. Dergisi, Adana, 2, 155-167.
4. Bayhan, S., 1993. Daire Eksenli Düzlemsel Çubukların Taşıma ve Rijitlik Matrisi ile Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana. 193s.
5. Haktanır, V., 1994. A New Method for the Element Stiffness Matrix of Arbitrary Planar Bars, 4, 679-691.
6. Bozkurt, M., 1995. Silindirik Tonozlar Daire ve Helisel Eksenli Taşıyıcı Sistemlerin Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ile Analizi -Mathematica Uygulamaları-, Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana. 213s.
7. Çalım, F. F., 1996. Eğri Eksenli Çubuk Sistemler ve Silindirik Tonoz Yapıların Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu ve Rijitlik Yöntemi ile Statik Analizi. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana. 166 s.
8. Karaca, N., 2014. Düzlemsel Çubukların Taşıma ve Rijitlik Matrisi Metodu ile Statik ve Dinamik Analizi Yüksek Lisans Tezi, Mustafa Kemal Üniversitesi, Hatay. 67s.
9. ANSYS, 2013, Inc Release 15.0, Canonsburg, PA.