MÜHENDİS BEYİNLER DERGİSİ | JOURNAL OF ENGINEER BRAINS

YIL | YEAR 2017

Bilim, Mühendislik ve Teknoloji Yayınları

ISSN: 2528 - 9802

Sayı | No: 2
Cilt | Volume: 1

Sylow Teoreminin Alterne Gruplar Üzerindeki Etkisi

Mushab Bedirhan ANDIZ [1]
Mathematics Research Center, Ankara
[1] bedirhanandiz94@gmail.com

Özet: *Bu Çalışmada Grup Teoride önemli rol oynayan Sylow Teoremlerinin p mertebeli alt gruplara uygulamalarını ve Permütasyon gruplarında uygulamalarını araştırdık. Çekirdek kavramını Sylow Teoremi ile zenginleştirip, Alterne grupların temel alt grupları üzerinde çalışmalar yaptık. Özellikle Sylow Teoremlerinin Permütasyon Gruplarına etkisi üzerinde durulmuştur.*

Anahtar Kelime: *Sylow Teoremi, Alterne Grup*

Practical Consequences of Sylow Theorems with Alterne Groups

Abstract: *The The earliest study of groups seems to have taken place in parallel threads around the world. It has been suggested that the convergence of all these developments into what formed a more uniform theory took place in 1870 and was the result of a book produced by C. Jordan called, Traité des substitutions et des équations algébriques. The following paper explores the theorems produced by Peter Sylow, a Norwegian mathematician, whose discoveries were too late to be included in the publication by Jordan. Sylow had proved his theorems as early as 1870, but he withheld them from publication for at least two years until Jordan, assured Sylow that the theorems were both new and signi can't. In 1872, Sylow published a 10-page paper presenting the theorems that now bear his name. The Sylow Theorems form a fundamental part of nite group theory and have very important applications in the classi cation of nite simple groups.*

Two key mathematicians play a role in this paper alongside Sylow, as a result of their in uence on Sylow's development of his theory. The rst being Lagrange, whose Theorem states that the order of a subgroup must always divide the order of the group itself. The corollary to Lagrange's Theorem does not in fact hold true for all groups. That is there may not exist a subgroup whose order is a divisor of the main groups order. The sim- plest example of this is the Alternative Group, A4, of order 12, which has no subgroup of order 6. The Sylow's Theorems provide a partial converse to this problem. Cauchy proved that for every prime p that divides the order of a infinite, abelian group, there is an element of order p that exists in the group. Cauchy's Theorem was a direct inspiration for the theorems which Sylow developed, which were later shown to hold true for any finite group. Sylow's original proof operated within a subgroup of the symmetric group, just as Cauchy's had.

Keywords: *Sylow Theorems, Alterne Group*

GİRİŞ

Bu Çalışmada Grup Teoride önemli rol oynayan Sylow Teoremlerinin p mertebeli alt gruplara uygulamalarını ve Permütasyon gruplarında uygulamalarını araştırdık. Çekirdek kavramını Sylow Teoremi ile zenginleştirip, Alterne grupların temel alt grupları üzerinde çalışmalar yaptık. Özellikle Sylow Teoremlerinin Permütasyon Gruplarına etkisi üzerinde durulmuştur.

Sonuç 1: $n_p = 1$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul G'nin ilgili Sylow p -altgrubunun normal olmasıdır.

Kanıt: H, G grubunun bir Sylow - p alt grubu olsun. Burada $n_p = 1$ G'nin içindeki eşlenik sayısı olarak karşımıza çıkacaktır.

$n_p = 1$ ise bu durumda eşlenik $xHx^{-1} = H,\ \forall x \in G$ biçiminde olacaktır. Sağdan x ile çarparsak,

Sayı | No: 2
Cilt | Volume: 1
ISSN: 2528 - 9802

$xH = Hx,\ \forall x \in G$ olacaktır. Bu durumun varlığı ise $H < G$ olmasının kendisidir.

Sonuç 2: G'nin tüm Sylow p-alt grupları G grubu içinde normal ise bu şu anlama gelecektir; $|G|$'nin her asal böleninin $n_p = 1$ şartına uygunluğudur. Dolayısıyla G grubu normal Sylow p-altgruplarının direkt çarpımı biçiminde yazılacaktır.

Kanıt: Birbirinden farklı p ve q asalları için $|G| = p^a q^b$ olduğunu ve buradaki $a, b \in \mathbb{N}$ olduğunu unutmayalım. Ayrıca, $n_p = 1 = n_q$ olsun. Bu durumda G grubunun normal bir Sylow - p alt grubunun olduğunu biliyoruz. Bu alt gruplara sırasıyla P ve Q olsun. Langrange Teoremine göre,

$$|P \cap G||P^a = |P|\ ve\ |P \cap Q||q^b = |Q|$$

olduğundan ve $P, Q \lhd G$ olduğundan $|P \cap G| = 1$ elde ederiz. Bu durumda P ve Q'nun bir direkt çarpım olduğu görülmüş olur. Ayrıca P ile Q çarpımının mertebesi G'nin mertebesine eşit olacaktır. Yani;

$$|PQ| = |P||Q| = p^a q^b = |G|$$

Bu tür gruplara **nilpotent** gruplar denir. Bu tür gruplar için iki önerme verelim.

Önerme - 1: G bir grup olsun ve $A \subset G$ için $N_G(A) \leq G$ olup (burada $N_G(A)$ ifadesinin G grubunun normalleyicisi olduğunu unutmayalım) eşleniklerinin sayısı $|G: N_G(A)|$'dır.

Not: Burada G grubunun normalleyicisi $N_G(A) = \{g \in G: gA = Ag\}$ biçiminde gösterilir. Bu noktada bir önerme ile devam edebiliriz.

Önerme - 2: G grubu için eğer P gibi bir Sylow p-alt grubu için $n_p = |G: N_G(P)|$ her zaman doğrudur. Önermelerin sonuçlarını birleştirirsek bir G grubu için, $n_p | s$ olur.

İspat: n_p ile gösterdiğimiz G'nin P ile ifade ettiğimiz Sylow p-alt gruplarının eşlenik sayısı olduğunu biliyoruz. O halde, $n_p = |G: N_G(P)|$ olduğundan, $n_p | p^a s$ elde edilir. Dikkat edilmesi gereken ise $n_p \equiv 1 mod\ p$ olmasından dolayı, $n_p | s$ durumunu gerekli kılacaktır.

Bu duruma birkaç örnek verebiliriz. Özellikle grubun mertebesi ile ilgili olarak verilen bir grubun Sylow p- altgruplarının nasıl araştırıldığını görelim.

Örnek: Mertebesi 245 olan bir grubun abelyan olduğunu gösterelim. Grubun mertebesinin asal çarpanlar biçiminde yazalım. Bu durumda grubun abelyan olduğunu gösterebiliriz.

$|G| = 7^2 5$ Biçiminde olacaktır. Dikkat ederseniz asal bölenlerinden G'nin mertebesi 49 olan H gibi normal bir sylow 7- altgrubu olduğunu görürüz. Ayrıca aynı biçimde G'nin mertebesi 5 olan Q gibi bir normal Sylow - 5 alt grubu olduğunu da bilebiliriz. Şimdi bu grupların H ve Q'nun direkt çarpımlarının G'ye izomorf olduğunu yazarsak,

$G \cong H \times Q$ olduğunu kolaylıkla anlayabiliriz. H ve Q grubunun mertebelerinden abelyan oldukları bundan dolayı direkt çarpım olan grubun da abelyan olduğu açıktır.

2p Mertebeli Gruplar İçin Bir Uygulama

p bir tek asal sayı olmak üzere $|G| = 2p$ olsun. Sylow teoremlerini sırasıyla 2 ve p sayılarına uygulayıp birkaç sonuç çıkaralım. Bu durumda Sylow p -alt gruplarının sayısı olacak olan n_p değeri 2p'yi bölecektir. Dolayısıyla n_p değeri 1, 2, n, 2p sayılarından birine eşit olmalıdır. Yukarıda belirttiğimiz $|P| = p$ olduğundan grup devirli bir grup olacaktır. Dolayısıyla G grubunun en az bir tane Sylow - 2 altgrubunun olduğu açıktır. Dolayısıyla $y \in G$ için $|y| = 2$ olacaktır. Bu durumda grubun elemanları, $\{1, x, \ldots, x^{p-1}, y, yx, \ldots yx^{p-1}\}$ kümesi ile tanımlanacaktır. Elemanı bu şekilde olan gruplar ise **Dihedral Gruplar** olarak adlandırılır. Bu durumda $p = 2$ seçilirse mertebesi 4 olan bir grup olur. Yani, $G \cong \mathbb{Z}_4$ olacaktır.

$G \cong \mathbb{Z}_4$ ise $\mathbb{Z}_4$ grubunun direkt çarpımı olarak $\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ yazılabilir. Dolasıyla $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ olur. Bu noktada Dihedral grup için, $D_p = \langle x, y: x^p = 1 = y^2, yx = xy^{-1} \rangle$ ile tanımlanacaktır.

Sylow Teoreminin Pratik Sonuçları

Bu noktada kavramları iyi anlamak için kullanacağımız grup temsillerini verelim.

- $|G| = p^a m$ biçiminde gösterdiğimiz grubun mertebesinin asal çarpanlara ayrılmış biçimidir.
- $Syl_p(G)$ ile ifade ettiğimiz ise G grubunun Sylow p-alt gruplarının kümesi
- N_p ise G grubunun Sylow P-alt gruplarının sayısıdır.

Sonuç - 3: N_p ifade eğer $|G||P^a$ ifadesine tam olarak bölünürse, bu durumda N_p'nin modüle formuna girer daha açık bir ifade ile N_p =1mod(p) olur.

Kanıt: Herhangi bir $P = Syl_p(G)$ alalım. Bu durumda $n_p = |G: N_G(P)|$ olmalıdır. Bu indeks sayısı ise $|G|/|N_G(P)|$ ile ilişki olmalıdır. Şayet $N_G(P)$ P'yi içeriyor ise mertebesi p^a olan elemanı da içerir.

Sonuç - 4: $Syl_p(G) = 1$ ise bu durumda $Syl_p(G) \lhd G$ olur.

Kanıt: $N_p(G) = 1$ bu durumda P ile gösterdiğimiz G'nin Sylow p-alt gruplarının kümesinde gPg^{-1} ile belirtilen konjugasyon sınıfı da vardır.

$$N_p(G) = 1 \Leftrightarrow gPg^{-1} \in P, N_p(G) = 1 \Leftrightarrow gPg^{-1} = P \; olur.$$

Sonuç- 5: G bir abelyan grup olsun. Abelyan grupların herhangi bir alt grubu normal bir alt gruptur. Dolayısıyla abelyan gruplarda en az bir tane $Syl_p(G)$ vardır.

Sonuç- 6: Bir G grubunun merkezi Z(G) ile gösterilsin. Şayet $|G| = p^a$ ise $Z(G) > 1$ olur. Bundan dolayı $Z(G) \lhd G$ olur.

Sonuç- 7: $|G| = p$ ise, burada p'nin asal olduğunu biliyoruz, G grubu devirli bir gruptur.

Sonuç -8: $|G| = p^2$ ise bu grup abelyan bir gruptur.

Sonuç-9: Aynı asal mertebeye sahip olan ayrık iki grubun kesişimleri {1}'dir.

Kanıt: $|P_1| = |P_2| = p$ olsun burada $P_1, P_2 \in Syl_p(G)$. $P_1 \cap P_2$ G grubunun bir alt grubu olduğundan $|P_1 \cap P_2| = 1$ ya da $|P_1 \cap P_2| = p$ olmalıdır. Bu gruplar ayrık gruplar olduğundan $|P_1 \cap P_2| = 1$ olmalıdır.

Sylow Teoreminin Permütasyon Gruplarına Etkisi

Langrange Teoremine göre alt grubun mertebesi grubun mertebesini böleceğini biliyoruz. Bu teoremin tersi ise doğru olmayabilir. A_n ile gösterilen Alterne grubun mertebesi yani $|A_n| = \frac{n!}{2}$ biçimindeydi.

İddia: A_4 grubunun mertebesi 6 olan alt grubu yoktur.

Kanıt: $|A_4| = 12$ olduğunu biliyoruz. G grubunun H içindeki indeksini bulalım. Bu durumda $|G: H| = 2$ olacaktır. Şayet bu grubun indeksi 2 ise $a \in A_4$ için $a^2 \in H$, $a \in H$ olur. Eğer a'nın 3-lü bir döngüye sahip elemanları var ise mertebesi 3 olan bir grubu var olacaktır. Fakat $a = a^4 =$

Sayı | No: 2
Cilt | Volume: 1
ISSN: 2528 - 9802

$(a^2)^2$ olduğundan bu bir çelişki yaratacaktır. A_4 grubu içinde 3-lü döngüye sahip 8 tane eleman vardır.

Peki A_4 grubunun kaç tane Sylow p-alt grubu vardır. Bunu araştıralım. İlk olarak A_4 grubunun mertebesini asal çarpanlar biçiminde ayıralım. $A_4 = 12 = 2^2 3$. Buradan hemen anlayacağımız durum grubun $Syl_2(A_4)$ ve $Syl_3(A_4)$ alt gruplarının olduğudur. İlk olarak $Syl_3(A_4)$ inceleyelim.

$|Syl_3(A_4)| = 3$ olduğundan yukarıda da belirttiğimiz gibi A_4 grubunda 3-lü devire sahip 8 eleman olacaktır. Bunları kolay bir şekilde yazabiliriz.

1-) {(1),(123),(132)}
2-) {(1),(124),(142)}
3-) {(1),(134),(143)}
4-) {(1),(234),(243)}

biçiminde olacaktır. A_4 grubu için de devirli $Syl_3(A_4)$ ise $\langle(123)\rangle, \langle(124)\rangle, \langle(134)\rangle, \langle(234)\rangle$ şeklinde yukarıdaki tek biçim şeklinde olacaktır.

Grubun diğer bir Sylow alt grubu ise $Syl_2(A_4)$ idi. Bu p -alt grubu incelersek, $|Syl_2(A_4)| = 4 = 2^2$ biçiminde olduğunu görürüz. Bu noktada grup p^2 biçiminde olduğu için $Syl_2(A_4) \lhd A_4$ olacaktır. $Syl_2(A_4)$ alt grubu ise, {(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)} şeklinde bulunur. Bu grup A_4 grubunun “Klein grubudur” şeklinde ifade edilecektir.

Örnek: G bir grup olsun ve $|G| = 12$ alalım. G grubunun $Syl_3(G)$ alt grubu normal alt grup ise bu grup A_4’na izomorftur.

Kanıt: Yukarıda verilen sorunun normal şartlarda çözümü olması gerekirken, bunu teorem olarak algılayıp kanıtını verelim.

$12 = 2^2 3$ biçiminde asal çarpanlarına ayrıldığından dolayı $n_3|4$ ve $n_3 \equiv 1 mod(3)$. Bu durumda $n_3 = 1$ veya $n_3 = 4$ olmalıdır. Karşımıza iki durum çıkacaktır.

1- Eğer $n_3 = 1$ ise mertebesi 3 olan P alt grupları $\exists P \lhd G$ olacaktır.

2- Eğer $n_3 = 4$ ise, 4 tane $Syl_3(G)$ çıkacaktır ve bu durumda bu 4 gruba P_1, P_2, P_3, P_4 şeklinde adlandıralım. Dolayısıyla $f: G \to S_4$’den bir homomorfizma tanımlanacaktır. Bu homomorfizmanın injective ve $Im\, f = A_4$ olduğunu ispatlarsak aynı zamanda $G \cong Imf \cong A_4$ olduğunu göstermiş olacağız.

İlk olarak injective olduğunu kanıtlayalım.

$Ker\, f = 1$ olduğunu gösterelim.

$$Kerf = \{g \in G: gP_i g^{-1} = P, \forall P_i \in S\} = \bigcap_1^4 N_G(P_i)$$

Burada $n_3 = [G: N_G(P_i)] = \frac{|G|}{|N_G(P_i)|}$ olduğundan hemen $|N_G(P_i)|$’yi hesaplayalım. $|N_G(P_i)| = \frac{12}{4} = 3$ olur. $|P_i| = 3$ olduğunu gördük. $P_i \leq N_G(P_i)$ durumu bize $P_i = N_G(P_i)$ gerçeğini gösterecektir. Dolasıyla,

$$\ker f = \cap_1^4 N_G(P_i)\text{’dir.}$$

İkinci olarak ise $Im\, f = A_4$ olduğunu göstermemiz gerecektir. G grubunun dört tane alt gruplarını P_1, P_2, P_3, P_4 olarak tanımladık. G grubu mertebesi 3 olan, 2.4=8 elemana sahiptir. Bu mertebesi 3 olan 8 eleman, S_4 grubunda 8 tane mertebesi 3 olan elemanlarla bir homomorfizma

Sayı | No: 2
Cilt | Volume: 1
ISSN: 2528 - 9802

oluşturur. Bu durumda S_4 grubu içinde mertebesi 3 olan döngüler çift dereceli olduğundan A_4 grubunun da içinde yer alacaktır.

Bu yüzden $(A_4 \cap Im\, f) \leq A_4$ ve $(A_4 \cap Im\, f) \leq Im\, f$ en az 8 elemanlı olacaktır. Halbuki, $|A_4| = |Im\, f| = 12|A_4 \cap Im\, f||12$. 12'nin 8'den büyük böleni sadece 12 olduğundan dolayı, A_4 ve $Im\, f$ bir alt grup belirtecektir ve kesişimlerinde bir alt grup belirttiği kanısından dolayı $A_4 \cap Im\, f$ de bir alt grup teşkil gösterecektir. (Not: G bir grup ve H,K ise G'nin iki alt grubu olsun $H, K \leq G$). Bu durumda $H \cap K \leq G$ olur. Fakat $H \cup K \leq G$ olmayabilir. A_4 ve $Im\, f$'nin 12 elemanı olacak ve $A_4 \cap Im\, f = A_4 = Im\, f$ olduğu çıkacaktır. Bu da $G \cong A_4$ doğruluğunu gösterecektir.

Referanslar

1. Paul.E.Bland: The Basics of Abstract Algebra. W.H.Freeman and Company, United States of America, 2001.
2. I.N. Herstein: Abstract Algebra, 3rd ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.
3. Cevik.A.S: Soyut Cebirde Özel Konular, Nobel Kitap Yayınevi, 2012
4. S.Ma'u:NotesonSylowsTheorems,Lecturenotes.Link:https://math.berkeley.edu/kpmann/Sylow Notes.pdf, Accesed: October 2015.