BAŞKENT UNIVERSITY
JOURNAL OF EDUCATION

2023, 10(2), 193-207 ISSN 2148-3272

Ortaokul Matematik Öğretmen Adaylarının Sayıları ve İşlemleri Gösterimler Yoluyla Anlamlandırması

Middle School Pre-Service Mathematics Teachers' Sense Making of Numbers and Operations Through Representations

Mesture Kayhan Altay[a*], Şerife Sevinç[b]

[a]Hacettepe University, Ankara, Türkiye
[b]*Middle East Technical University*, Ankara, Türkiye

Öz
Bu çalışmada ortaokul matematik öğretmen adaylarının bir modelleme etkinliği aracılığıyla kendi sayı sistemlerini geliştirirken sayılara ve işlemlere yükledikleri anlamları incelemek amaçlanmıştır. Bu amaçla bir ders kapsamında öğretmen adaylarından grup çalışmasıyla bir modelleme etkinliği üzerinde çalışmaları istenmiştir. Bu modelleme etkinliğinde öğretmen adaylarından doğal sayılar, tam sayılar, toplama ve çıkarma işlemleri için bir temsil sistemi geliştirmeleri beklenmektedir. Araştırmanın verilerini, sekiz grup matematik öğretmen adayı (toplam 34 öğretmen adayı) tarafından geliştirilen sayı sistemlerindeki gösterimler ve açıklamalar oluşturmaktadır. Veriler içerik analizi ile çözümlenmiştir. Araştırmanın sonucunda öğretmen adaylarının geliştirdikleri sayı sistemlerinde kullandıkları gösterimlerde sayılara ve işlemlere farklı anlamlar yükledikleri görülmüştür. Öğretmen adayları bu gösterimlerde sayılar ve işlemler için kardinalite ve parça-bütün ilişkisi gibi anlamlar oluşturarak kavramsal anlamalarını ortaya koymuşlardır. Ancak tam sayılar ve toplama-çıkarma işlemleri için gösterimlerini kavramsal anlamı destekleyecek şekilde geliştirememişlerdir. Bu sonuçlar öğretmen adaylarının özellikle negatif tam sayılara yönelik kavramsal eksikliklerini ve algoritmaya dayalı toplama ve çıkarma işlemi yapma eğiliminde olduklarını ortaya koymaktadır.

Anahtar Kelimeler: matematiksel semboller, sayıların anlamları, işlemlerin anlamları, kardinalite, parça-bütün ilişkisi, öğretmen adayları.

Abstract
In this study, it was aimed to examine the meanings that middle school pre-service mathematics teachers attribute to numbers and operations while developing their own number systems through a model-eliciting activity. For this purpose, pre-service teachers were asked to work on a model-eliciting activity in small groups within the scope of a course. In this activity, preservice teachers were expected to develop a representation system for natural numbers, integers, and addition and subtraction operations. The data of the research consisted of representations and explanations in the number systems developed by eight groups of pre-service teachers (34 pre-service teachers in total). The data were analysed by content analysis. As a result of the research, it was observed that pre-service teachers attribute different meanings to numbers and operations in the notations they developed. The pre-service teachers exhibited their conceptual understanding by constructing meanings such as cardinality and part-whole relation for numbers and operations in these representations. However, they could not develop their representations for integers and addition-subtraction operations to support the conceptual meaning. These results revealed that pre-service teachers especially have conceptual deficiencies in negative integers and tend to do algorithm-based addition and subtraction.

Keywords: mathematical symbols, meanings of numbers, meanings of operations, cardinality, part-whole relations, pre-service teacher education.

ADDRESS FOR CORRESPONDENCE: Mesture Kayhan Altay, Mathematics Education, Faculty of Education, Hacettepe University, Ankara, Türkiye. E- mail address: mkayhanaltay@gmail.com, ORCID ID: 0000-0002-1917-2430.
[b]*Şerife Sevinç, Mathematics Education, Faculty of Education, Middle East Technical University, Ankara, Türkiye. E- mail address: sserife@metu.edu.tr, ORCID ID: 0000-0002-4561-9742.*
Received Date: March 10th, 2023. Acceptance Date: July 18th, 2023.

1. Giriş

Matematik sembollerden ve gösterimlerden oluşan bir bilim dalıdır ve bu sembollerin nasıl anlamlandırıldığının incelenmesi de matematik psikolojisi ile ilgilenen araştırmacıların odağı olmuştur (Goldin, 1998). Psikoloji ve matematik eğitimi alanlarında zihnin gösterimlerle nasıl çalıştığına dair süregelen bir tartışma vardır. Bu tartışmalar öğrenenin, matematiksel kavramı içinde gömülü olduğu temsilden çıkarabilme derecesi üzerinedir (Pape & Tchoshanov, 2001).

Temsil sistemlerinden biri olan semboller, başka bir şeyi temsil eden veya onun yerini alan şeylerdir. Somut nesnelerden yazılı işaretlere kadar çeşitli biçimlerde olabilir. Yazılı sembol sistemleri matematiğin dillerinden sadece biridir. Dienes onluk taban blokları veya kesir çubukları gibi somut modeller matematiksel fikirleri tanımlamak için kullanılabilecek diğer temsil sistemlerine birer örnektir (Hiebert, 1988). Matematikte kavramlar genellikle sembollerle temsil edilir (Chin & Pierce, 2019). Matematiksel semboller, kavramları temsil etmenin yanında öğrencilerin matematiksel kavramları oluşturmalarında önemli bir rol oynar (Douglas vd., 2020; Mutodi & Mosimege, 2021). Tüm matematiksel semboller temsil ettikleri kavramlarla doğrudan ilişkilidir (De Cruz & De Smedt, 2013). Baki ve Kartal (2004) sembollerin öğrenciler tarafından anlaşılmasının temsil ettikleri fikirler ile ilişkilendirilmesiyle mümkün olduğuna değinmektedir. Örneğin, bir sayıyı temsil eden gösterimin kardinal değer ile ilişkilendirilmesi, öğrencilerin sayılara dair kavramsal anlayışını desteklemektedir (Aubrey, 1993; Gelman & Meck, 1983; Olkun vd., 2013, Treacy & Willis, 2003). Bir kümedeki nesnelerin sayılmasında en son sayılan nesne için söylenen sayının, kümedeki nesne sayısını göstermesi kardinal değer ilkesi olarak açıklanır (Gelman & Gallistel, 1978). Pape ve Tchoshanov (2001) bu durumu şöyle örneklendirmektedir: Çocukların oyuncaklarını sayarken kullandıkları “bir”, “iki” kelimeleri bir serideki oyuncakların konumunu gösteren sembollerdir. Bu sayı kelimeleri basitçe sayarken nesnelere dokunarak söyledikleri kelimelerdir. Başlangıçta çocuklar söylenen son sayının bu kümedeki tüm oyuncakların sayısını gösterdiğini anlamayabilir. Daha sonraları bu sayıların, kümedeki oyuncakların sayısını gösterdiğini anlamaya başlarlar ve bu elemanları temsil eden bir sayının olduğunu öğrenirler. Böylece sayıyı temsil eden sözcük ve rakam kümedeki nesne sayısı ile ilişkilendirilmiş ve kardinalite kavramı geliştirilmiş olur.

Alanyazında farklı yaş gruplarıyla ve farklı matematiksel kavramlar üzerine yapılan araştırmalarda matematiksel sembollere yüklenen anlamlar incelenmiştir (Baki & Kartal, 2004; Chin & Pierce, 2019; Chirume, 2012; Hassidov & Ilany, 2019; Horzum & Kılıç, 2016; Mutodi & Mosimege, 2021; Yağcı, 2018). Bu araştırmaların bulguları öğrencilerin veya öğretmen adaylarının genellikle sembollerle matematiksel anlamlar arasındaki ilişkiyi kurmada zorlandıklarını ve matematiksel sembollere yükledikleri anlamların sınırlı olduğunu ortaya koymaktadır. Örneğin, Horzum ve Kılıç (2016) araştırmalarında ortaokul öğrencilerinin geometri sembollerinin yorumlanmasında sıkıntı yaşadıklarını tespit etmişlerdir. Araştırmacılar, sembol ile biliş arasındaki ilişkiden yola çıkarak öğrencilerin geometrik sembollere yönelik bilgilerinin zayıf olduğu sonucuna varmışlardır. Benzer şekilde Baki ve Kartal (2004) lise öğrencilerinin cebir konusunda yaşadığı güçlüklerin bir sebebi olarak matematiğin dilini oluşturan sembollerin anlamlarının bilinmemesini ve sembollerin taşıdıkları anlamlarla ilişkilendirilememesini işaret etmektedir. Ayrıca araştırmalarda matematikteki düşük başarının bir nedeni olarak matematik sembollerinin yanlış yorumlanması gösterilmekte (Baki & Kartal, 2004; Powell, 2015) ve sembol bilgisinin matematik yapma becerisine katkıda bulunduğu savunulmaktadır (Douglas vd., 2020).

Tüm bu araştırmaların sonuçları bize, öğrencilerin sembolleri, temsil ettikleri fikir ve süreçler yerine matematiğin nesneleri olarak aldıkları için matematiksel kavramları kavrayamadıklarını göstermektedir (Chirume, 2012). Sembolleri yazmak ve tanımak, o sembolün matematiksel anlamının anlaşıldığını yansıtmaz (Hassidov & Ilany, 2019). Semboller, aynı zamanda matematik söylemlerinin ve matematik öğretiminde iletişimin olmazsa olmaz bir parçası olduğundan, matematiksel iletişim ilkokuldan yükseköğretime kadar tüm öğretim programlarının vurguladığı bir konudur (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Matematik dersi öğretim programının özel amaçları arasında öğrencilerden matematiğin anlam ve dilini kullanarak nesnelerin birbirleriyle ilişkilerini anlamlandırmaları, kavramları farklı temsil biçimleri ile ifade etmeleri ve matematiksel anlamalarını açıklamak için matematiksel terminolojiyi ve dili doğru bir şekilde kullanılabilmeleri beklenir (MEB, 2018, s.9).

Tüm bu amaçlara ulaşılabilmesi için öğretmenler öğrencilerin matematiksel dili etkili bir şekilde oluşturmalarında önemli bir rol oynar. Matematiksel bilginin sembol yoluyla inşası sınıf içerisinde sözlü etkileşimler sırasında gerçekleşir. Sembolik temsillerin veya sembollerin anlamlarını yorumlamak için öğretmenlerin sözlerine ihtiyaç vardır (Schleppegrell, 2007). Bir başka ifadeyle, matematik öğretmenleri, öğrencilerin matematik sembolleri anlamlandırmasında önemli bir yere sahiptir. Bu nedenle öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının bu matematiksel sembolleri nasıl anladıkları ve anlamlandırdıklarını anlamak matematik eğitimi araştırmaları açısından önemlidir. Zira matematik öğretmenlerinin matematiksel sembollere dair sahip oldukları anlamları öğrencilere aktarma potansiyelleri bulunmaktadır (Even, 1993; Shulman, 1987). Tam da bu nedenle, Baroody ve Ginsburg (1983) öğretmenlerin öğretim pratiklerinin öğrencilerin eşittir işaretini anlamalarındaki rolünü incelemiş ve öğretmenlerin sınıf-içi pratikleri ile öğrencilerin bu matematiksel sembolü anlamalarının ilişkili olduğunu saptamıştır.

Bu bağlamda, öğrencilerin matematiksel iletişim geliştirmesinde önemli bir rolü olan matematik öğretmenleri bu çalışmanın da odağı olmuştur. Daha net bir ifadeyle, geleceğin matematik öğretmenlerinin sayı ve işlemleri nasıl anlamlandırdıklarının, oluşturdukları sayı sistemi gösterimleri yoluyla incelenmesi hedeflenmiştir. Bu çalışmada, odaklanılan araştırma soruları şu şekildedir:

1. Öğretmen adayları sayı ve işlemleri gösterimler yoluyla nasıl anlamlandırıyor?
    1.1. Öğretmen adaylarının doğal sayıları ve tam sayıları ifade etmek için seçtiği gösterimler sayılara dair hangi kavramsal anlayışları yansıtıyor?
    1.2. Öğretmen adaylarının toplama ve çıkarma işlemlerini ifade etmek için seçtiği gösterimler işlemlere dair hangi kavramsal anlayışları yansıtıyor?

Bu araştırma sorularını cevaplamak üzere, matematik öğretmen adaylarına bir modelleme etkinliği verilmiş ve bu modelleme etkinliğinde onlardan doğal sayılar, tam sayılar, toplama ve çıkarma işlemlerini içerecek bir sayı sistemi oluşturmaları istenmiştir. Hem görsel gösterimler hem de sayı sisteminin nasıl çalıştığını anlatan yazılı açıklamalar incelenerek öğretmen adaylarının sayı ve işlemleri nasıl anlamlandırdıkları anlaşılmaya çalışılmıştır. Model oluşturma etkinlikleri genellikle gerçekçi bir problem durumunu tanıtan bir anlatı içerir. Bu anlatı, gazete makaleleri olabileceği gibi (Lesh & Doerr, 2003; Sullivan vd., 2012; Zawojewski vd., 2003) ilginç hikayeler de olabilir (Sevinç & Brady, 2019). Anlatıyı takip eden etkinlik, hikâyedeki bir müşterinin, bir patronun veya bir karakterin problemini sunar. Bu çalışmadaki modelleme etkinliğinde, öğretmen adaylarının ilgisini çekebilecek matematik tarihi ile ilişkili bir durum kullanılmıştır. Matematik tarihinin modelleme perspektifine entegrasyonuna ilişkin çok fazla çalışmaya rastlanmasa da (Ay, 2019; Sevinç & Ay, 2021), bu entegrasyon matematik tarihinin bir araç olarak kullanılması anlayışına dayanmaktadır. Matematik tarihinin matematik eğitimine entegrasyonu, motivasyon gibi olumlu duyuşsal eğilimleri geliştirme potansiyeline de sahiptir (Lim & Chapman, 2010; Savizi, 2007). Bunları göz önünde bulundurarak bu çalışmada, modelleme etkinliklerinin anlatımında matematik tarihinin kullanılmasının problem çözücülerin ilgisini çekeceğini ve gerçekliğin (anlamlılığın) ve etkili prototip ilkelerinin sağlanmasına yardımcı olacağı varsayılmıştır. İlgi çekici problem durumuna ek olarak, modelleme etkinliklerinin özelliklerinden biri de problemin çözümüne yönelik yalnızca bir doğru modelin olmadığıdır (Lesh & Doerr, 2003; Zawojewski vd., 2003). Dolayısıyla, matematik öğretmen adaylarının geliştirecekleri farklı sayı gösterimlerinin problem durumuna göre kabul edilebilir olduğu öngörülmüştür. Ayrıca, matematiksel modelleme sürecinin kavramsal anlamayı pekiştirici rolü bulunmaktadır (Zawojewski vd., 2003) ve bu bağlamda modelleme etkinliği problemi çözen öğretmen adaylarına kavramsal ilişkilendirme fırsatı sunarken, araştırmacılara da öğretmen adaylarının sayıların temsilleriyle ilişkilendirdikleri kavramları anlama imkânı sağlamaktadır. Modelleme yaklaşımının bu özellikleri göz önünde bulundurularak öğretmen adaylarının modelleme sürecinde geliştirdikleri gösterimler vasıtasıyla sayı ve işlemleri nasıl anlamlandırdıkları incelenmiştir.

3. Yöntem

3.1. Araştırmanın Deseni

Bu araştırmanın amacı ortaokul matematik öğretmen adaylarının grup olarak sayılara ve toplama-çıkarma işlemlerine yükledikleri anlamları derinlemesine incelemektir. Bu durumu derinlemesine araştırmak için nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Merriam'e (1998) göre durum çalışması sınırlı bir sistemin derinlemesine incelenmesidir. Durum çalışmalarında temel amaç, durumu kendi ortamı içerisinde betimlemek ve yorumlamaktır (Seggie & Bayyurt, 2017). Bu nedenle öğretmen adaylarına grup halinde bir modelleme etkinliği uygulanmış ve araştırma problemlerine paralel bir şekilde bu modelleme etkinliği sonucunda grup olarak geliştirdikleri sayı sistemleri analiz edilmiştir.

3.2. Katılımcılar

Çalışmanın katılımcılarını, Ankara'daki bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği programının son sınıfında öğrenim görmekte olan 34 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırma için gerekli olan etik kurul izinleri alınmış ve gönüllü katılım sağlanmıştır. Katılımcılar, matematiksel bilginin doğası ve öğretmenlerin sahip oldukları konu alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisinin matematik öğretimine yansımasına odaklanan bir öğretmen eğitimi dersine devam etmekte olan öğretmen adaylarından oluşmaktadır. Veri toplama süreci bu ders kapsamında gerçekleşmiştir. Öğretmen adaylarından dörder ya da beşer kişilik grup oluşturarak bir modelleme etkinliği üzerinde çalışmaları ve etkinlik sonunda bir rapor hazırlamaları istenmiştir. Çalışmada, toplam sekiz grup oluşturulmuş ve gruplar G1, G2, …, G8 şeklinde numaralandırılmıştır.

3.3. Veri Toplama Aracı ve Süreci

Çalışmanın verileri, *Arda'nın YouTube Kanalı* isimli modelleme etkinliği için öğretmen adaylarının grupça oluşturdukları çözümlerinden oluşmaktadır. *Arda'nın YouTube Kanalı problemi*, Ay (2019) tarafından matematik eğitimi yüksek lisans çalışmasında yedinci sınıf öğrencileri için geliştirilmiştir (bkz. Ek-1). Bu modelleme etkinliğinin seçilmesinin sebebi öğretmen adaylarının gösterimler aracılığıyla sayılara ve işlemlere yükledikleri anlamları açığa çıkarmaktır.

Ek 1'de görüldüğü üzere Arda, youtube kanalında matematik tarihi ile ilgili yaptığı araştırma sonucu Çinlilerin 3000 yıl öncesinde kullandıkları sayı sistemini tanıtmaktadır. Bu sayı sistemi, doğal sayıların yanı sıra tam sayıları da içermektedir. Arda, kanalındaki videonun devamında, kendi sayı sistemini oluşturmayı düşündüğünü ve izleyicilerden de aynı şekilde kendi sayı sistemlerini oluşturarak videonun altına yorum olarak eklemelerini istemektedir.

Matematik öğretmen adayları, sekiz gruba ayrılarak bu problem üzerinde iki aşamalı olarak çalışmıştır. İlk aşamada, öğretmen adayları doğal sayıları ve tam sayıları içeren sayı sistemlerini kendi sembollerini kullanarak geliştirmiştir. İkinci aşamada, uygulamayı yürüten araştırmacı öğretmen adaylarından geliştirdikleri sayı sisteminde toplama ve çıkarma işlemlerini de göstermelerini istemiştir. Sayı gösterimlerinde olduğu gibi toplama ve çıkarma işlemlerine dair bir sembol sisteminin oluşturulması ve bu sembol sisteminin işlemlerin uygulanmasında nasıl rol oynadığının örnekle açıklanması istenmiştir. Böylece, öğretmen adaylarının geliştirdikleri sayı sistemleri, doğal sayılar, tam sayılar, toplama ve çıkarma işlemlerini kapsamaktadır. Çalışmanın her bir aşaması 90 dakikalık iki oturumda, çevrimiçi platformda gerçekleşmiştir. Öğretmen adaylarının grup çalışması için ayrı odalar oluşturulmuştur. Grup çalışması süresince, dersin öğretim üyesi olan araştırmacı, çevrimiçi odaları gezerek öğretmen adaylarının grup içi çalışmalarını takip etmiştir. Öğretmen adaylarından çalışmalarını grup olarak raporlamaları istenmiştir. Dolayısıyla, öğretmen adayları, geliştirdikleri sayı sistemlerini raporlarında yazılı olarak hazırlamış ve bu sayı sisteminin kurallarını detaylıca açıklamıştır. Grup çalışması akabinde, gruplar aynı çevrimiçi platformda toplanarak tüm grupla paylaşmaları istenmiştir. Bu paylaşım süreci ile öğretmen adaylarının birbirlerinin çalışmalarından haberdar olmaları amaçlanmıştır. Bu nedenle, çalışmanın verileri sekiz grup matematik öğretmen adayının oluşturduğu raporlardaki yazılı metinler ve görsellerden oluşmaktadır.

3.4. Veri Analiz Yöntemi

Çalışmanın verileri, içerik analizi yöntemiyle üç adımda analiz edilmiştir. İlk adımda, tüm grupların sayı sistemi gösterimleri ve geliştirdikleri sayı sisteminin kuralları okunarak gösterimlerindeki ya da belirledikleri kurallardaki benzerliklere göre kategorilere ayrılmış ve sıralanmıştır. Bundan sonraki adımlarda, bu sıra ile incelemeler yapılmıştır. İkinci adımda, araştırmacılar sayı sistemlerini ve çalışma prensiplerini açık kodlama yöntemiyle ayrı ayrı kodlamış ve çıkan kodları karşılaştırmıştır. Oluşturulan kodlar, her iki araştırmacının da uzlaştığı şekilde düzenlenmiştir. Bu düzenleme sırasında bazı kodların isimleri daha tanımlayıcı olacak şekilde değiştirilmiş, bazıları ise birleştirilerek daha kapsayıcı hale getirilmiştir. Örneğin, öğretmen adayları tarafından doğal sayılar için geliştirilen sayı sistemlerindeki gösterimlerde vurgulanan anlamlar için kardinalite ve parça-bütün ilişkisi gibi kodlar belirlenmiş, tam sayılar için ise yön ve pozitif-negatif sayılar için zıt yönlü ilişkiler kodları oluşturulmuştur. Bu kodlara ilişkin açıklamalar bulgular kısmında örneklerle birlikte sunulmuştur.

Analizin son adımında, araştırmacılar düzenlenen kod listesini kullanarak ayrı ayrı analizlerini tekrarlamıştır. Sonrasında araştırmacılar tekrar bir araya gelerek, kodlara uygun kategoriler oluşturmuştur. Oluşturulan kategoriler, (1) doğal sayıların anlamlandırılması, (2) pozitif ve negatif tam sayıların anlamlandırılması, ve (3) toplama ve çıkarma işlemlerinin anlamlandırılması şeklindedir. Dolayısıyla, veri analizi süreci kodlama, karşılaştırma, tasnif etme ve kategorileri belirleme aşamaları sonucunda tamamlanmıştır (Miles vd., 2014).

3.5. Geçerlik ve Güvenirlik

Nitel araştırmalarda güvenirlik veri setlerinin birden fazla kodlayıcının cevaplarındaki kararlılık anlamına gelmektedir (Creswell, 2021). Araştırmada güvenirliğin sağlanmasında öğretmen adayları tarafından geliştirilen raporlar iki araştırmacı tarafından bağımsız bir şekilde kodlanmıştır. Ardından düzenli olarak bir araya gelinmiş ve belirlenen kodlar karşılaştırılmıştır. Kodlayıcılar arası görüş birliği sürecinde kodlar ve temalarda yüksek oranda uzlaşma sağlanmıştır. Öğretmen adaylarının sayılar ve işlemlere yükledikleri anlamları ortaya çıkarmak için seçilen modelleme etkinliğinin farklı araştırmacılar tarafından geliştirilmiş (Ay, 2019) ve kullanılmış olması geçerliğin sağlanmasında etkili olmuştur. Ayrıca araştırmanın inandırıcılığın sağlanmasında uzun süreli etkileşim stratejisi (Merriam, 1998) kullanılmıştır. Araştırma yazarlardan birinin sorumlu olduğu bir ders kapsamında yürütüldüğünden dönem boyunca öğretmen adaylarıyla etkileşim halinde olunmuş ve katılımcıların ortama ve araştırmaya güven oluşturmaları sağlanmıştır.

4. Bulgular

Öğretmen adayları tarafından geliştirilen sayı sistemlerinin modellenmesinde kullanılan gösterimler sayı sistemleri ve toplama-çıkarma işlemleri olmak üzere iki başlık altında toplanmıştır.

4.1.Sayı Sistemlerinin Gösterimine İlişkin Bulgular

Öğretmen adaylarının kendi sayı sistemlerini tasarlarken genellikle sayıların gösterimlerinde farklı bir işaret veya sembol geliştirme ihtiyacı duymadan bilindik geometrik şekillerden yararlandıkları gözlenmiştir. Grupların çoğu sayıların gösterimleri için üçgen, kare, daire, doğru parçası gibi gösterimleri tercih ederken, bazı grupların (G2, G3 ve G5) sağ ve sol yöne bakan oklar (» ve « işaretleri gibi), noktalar veya yıldız (*) gibi günlük hayatta karşılaşılan nesnelerin görsellerini kullanmayı tercih ettikleri gözlenmiştir. Ayrıca çoğu grup (G2, G4, G5, G6, G7 ve G8) özellikle 5 sayısından sonra her bir sayı için yeni bir şekil (veya sembol) geliştirmiştir. Tüm sayılar için aynı şekli kullanan sadece iki grup (G1 ve G3) vardır. Bu gruplar 1-9 arası sayılar için üçgenleri (G1) veya küçük çemberleri (G3) kullanmışlardır. Örneğin, birinci grup 5 sayısı için beş üçgen kullanırken altı sayısı için sembolü değiştirmeden yine üçgen gösterimini kullanmaya devam etmiştir (bkz. Şekil 1).

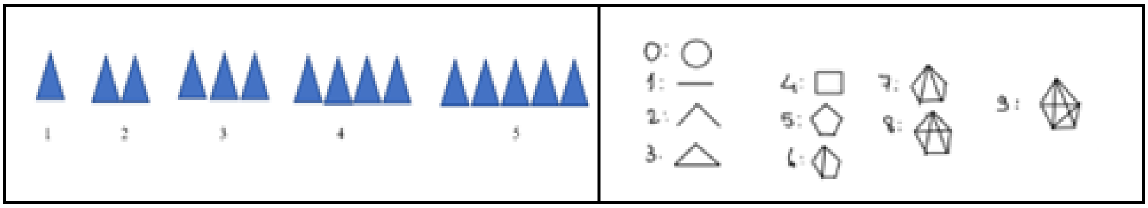
Öğretmen adaylarının geliştirdikleri sayı sisteminde kullandıkları sembolleri, şekilleri veya işaretleri genellikle temsil ettiği kavramın anlamından yola çıkarak oluşturdukları söylenebilir. Bu anlamlar *kardinalite (5 sayısına kadar), parça-bütün ilişkisi (5 sayısından sonra), yön (negatif sayılar için) ve pozitif ve negatif sayılar arasındaki ilişki*lerdir (bkz. Tablo 1).

Tablo 1

Öğretmen adaylarının sayı sistemlerinin modellenmesinde kullandıkları anlamlar

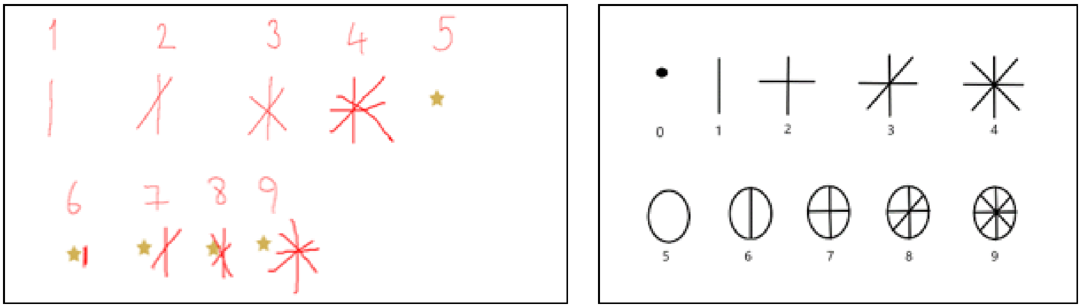
Grup (ÖA)		G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8
Sayı sistemlerinin anlamları	Kardinalite (5 sayısına kadar)	*	*	*	*	*	*	*	*
	Parça-bütün ilişkisi (5 sayısından sonra)		*	*	*	*			*
	Yön (negatif sayılar)		*						
	Pozitif ve negatif sayılar arasındaki zıt yönlü ilişki		*	*			*		*

Tablo 1'de görüldüğü üzere tüm gruplar kendi sayı sistemlerini oluştururken sayıların temsil ettikleri miktarlara odaklanarak (kardinalite) bu yapıları temsil edecek bir gösterim kullanmayı tercih etmişlerdir. Bu gösterimlerde dikkati çeken nokta, grupların kardinaliteyi 5 sayısına kadar devam ettirmeleridir. 5 sayısından sonra yeni bir gösterim arayışı çoğu grupta görülmektedir. Örneğin bir grup, 1 sayısı için bir doğru parçası gösterimini kullanırken 2 sayısı için iki doğru parçası, 3 sayısı için üç doğru parçası gösterimini kullanmış ve bu gösterim biçimini 5 sayısına kadar korumuştur. Beş sayısının gösteriminde ise yeni bir sembol seçerek yıldız şeklini kullanmışlardır (bkz. Şekil 2). Kullanılan semboller, şekiller ve dizilimler görsel olarak farklı olsa da tüm gruplar sayıların kardinalite anlamına vurgu yapmaktadır. Ancak bazı gruplarda örneğin verilen üçgen örneğinde (bkz. Şekil 1) şekiller bir artarak ilerleyerek görsellerde kardinalite anlamı daha net görülebilirken bazı grupların modellerinde bu ilişkileri daha örtük bir şekilde kullandıkları gözlenmiştir. Örneğin Şekil 1'de dördüncü grubun gösterimlerinde 0 sayısı çember ile gösterilirken 1 sayısı bir doğru parçası ile 2 sayısı bir noktada kesişen iki doğru parçasıyla, 3 sayısı üçgen, 4 sayısı kare, 5 sayısı ise beşgen ile temsil edilmektedir. Birinci grup tarafından geliştirilen üçgen temsilinde 5 sayısına kadar üçgenlerin bir artarak dizilim olarak yan yana eklenmesi kardinalite anlamının görsel olarak daha net görülmesini sağlamaktadır.



Şekil 1. Grup 1 (sol) ve Grup 4'ün (sağ) sayı sistemleri için kullandıkları gösterimler

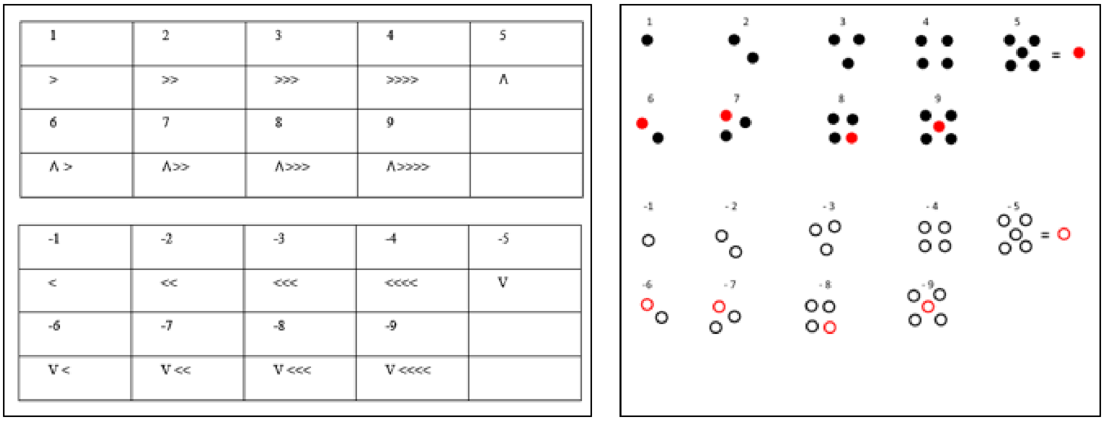
Modeller geliştirilirken öğretmen adayları tarafından vurgulanan ikinci anlam *sayıların parça-bütün ilişkisi* anlamıdır. Parça-bütün ilişkisi sayıların farklı parçalara ayrılabileceği anlamına gelmektedir. Öğretmen adayları sayı sistemlerini oluştururken özellikle 5'ten büyük sayılar için sayıların bu özelliklerinden yararlanmışlardır. Örneğin beşinci ve sekizinci grubun geliştirdiği sayı sistemi Şekil 2'de verilmektedir. Beşinci grup şekilde görüldüğü üzere 5 sayısı için yeni bir sembol (✭) kullanarak 6, 7, 8 ve 9 sayıları için sembolleri sırasıyla (5,1), (5,2), (5,3) ve (5,4) olacak şekilde sayı ikililerini temsil edecek gösterimleri (örneğin yıldız ve doğru parçası gibi) kullanmışlardır. Sekizinci grup ise 5 sayısı için bir çember kullanmış ve 6, 7, 8 ve 9 sayıları için çemberin içerisine doğru parçaları eklemiştir. Tablo 1'de görüldüğü üzere sekiz grup arasından beş grup gösterimlerinde beş sayısını referans alarak 6, 7, 8 ve 9 sayısının gösteriminde bu ilişkilerden yararlanmışlardır.



Şekil 2. Grup 5 (sol) ve Grup 8'in (sağ) geliştirdiği sayı sistemi için kullandığı gösterimler

Burada vurgulanması gereken nokta, öğretmen adaylarının sayıların parça-bütün ilişkilerinin gösteriminde sadece bir sayı ikilisini tercih etmeleridir. Bir başka ifadeyle, 6 sayısı (3,3) şeklinde gösterilebileceği gibi (4,2) ve (5,1) şeklinde de ifade edilebilir. Ancak buradaki gösterimlerde bu ilişkiyi vurgulayan tüm öğretmen adaylarının 5'i referans alarak gösterimlerini 5 ile ilişkilendirmeleri araştırmanın dikkat çekici bulgularındandır.

Yön anlamı sayıların gösteriminde öğretmen adayları tarafından başvurulan üçüncü anlamdır. Tablo 1'de görüldüğü üzere sadece bir grup öğretmen adayının (G2) bu anlama vurgu yapması oldukça ilginçtir. Bu grubun cevabı Şekil 3'te görülmektedir. Diğer gruplardan farklı olarak negatif sayılara kavramsal olarak yön anlamında bakıp, gösterimlerinde bu anlamı vurguladıkları söylenebilir. Şekil 3'te görüldüğü üzere Grup 2'nin gösteriminde sağ yöne bakan oklar pozitif sayıları temsil ederken, negatif sayılar için sol yöne bakan oklar tercih edilmiştir. Ayrıca üç grubun (G2, G3, G6 ve G8) gösterimlerinde pozitif ve negatif sayılar arasındaki zıt yönlü ilişkiden yararlandıkları görülmüştür. Örneğin, Şekil 3'te görüldüğü üzere Grup 3, pozitif ve negatif sayılar için içi dolu-boş şekilleri kullanmışlardır. Sekizinci grup ise pozitif sayılar için mavi üçgenleri kullanırken, negatif sayılar için kırmızı üçgenleri kullanmaktadır. Bu grup pozitif ve negatif sayıların temsili için kullandıkları gösterimleri açıklarken kırmızı rengin sıcağı, mavi rengin ise soğuk havayı temsil etmesini gerekçe göstermişlerdir. Bu grubun gösterimlerinde günlük hayat ilişkilendirmelerinden yola çıkarak bir sembol geliştirdiği söylenebilir.



Şekil 3. Grup 2 (sol) ve Grup 3'ün (sağ) geliştirdiği sayı sistemi için kullandığı gösterimler

Ek olarak, Grup 1, Grup 4, Grup 5 ve Grup 7 sayı sistemlerini oluştururken pozitif ve negatif sayıları ayırmak için zıtlık ilişkisini vurgulamadan renk veya var olan gösterime benzer şekilde şekillerin üzerine veya içine konulan nokta gibi sembolleri ve renkleri kullanmışlardır. Bu gruplar pozitif ve negatif sayıları ayırmak için çarpı işareti (x), nokta (.) veya sayının üzerine düz bir çizgi gibi sembolleri kullanmışlardır.

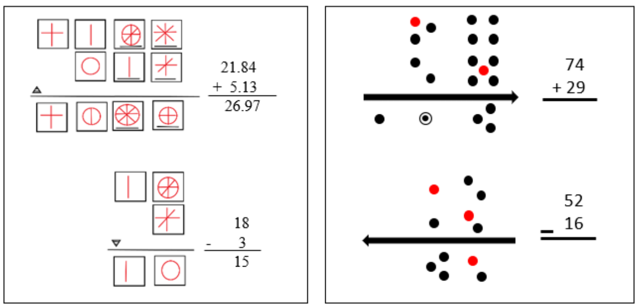
4.2. Toplama ve Çıkarma İşlemlerini Temsil Eden Modellerin Özelliklerine İlişkin Bulgular

Öğretmen adayları tarafından toplama ve çıkarma işlemlerini temsil eden modellerin özelliklerine bakıldığında en belirgin özelliğin öğretmen adaylarının toplama ve çıkarma işlemlerinin arasındaki ters ilişkiyi vurgulayacak bir sembol arayışıdır. Tablo 2'de görüldüğü üzere altı grup sembollerin seçiminde toplama ve çıkarmanın ters ilişkisi üzerinde durmuş ve bu ilişkiyi sembol gösterimlerine yansıtmaya çalışmıştır.

Tablo 2
Öğretmen adaylarının toplama ve çıkarma işlemlerinin modellenmesinde kullandıkları anlamlar

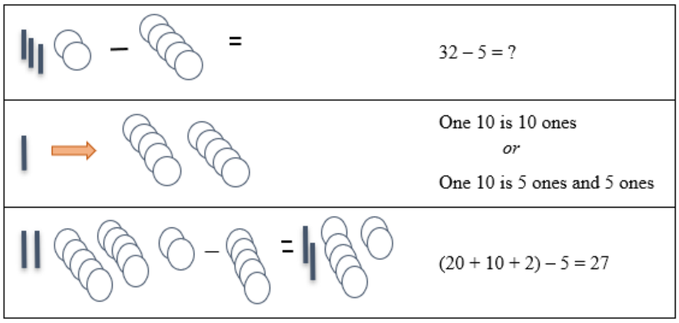
Grup (ÖA)		G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8
İşlemlerin Anlamları	Toplama ve çıkarma arasındaki ters ilişki	*	*	*	*		*		*
	Parçalama ve birleştirme	*				*		*	

Örneğin Şekil 4'de görüldüğü üzere sekizinci grup toplama işleminin sembolünü tepe noktası yukarıda olan bir üçgen ile temsil ederken, çıkarma işlemini tepe noktası aşağıda olan bir üçgen şeklinde temsil etmiştir. Benzer şekilde üçüncü grup toplama işlemini sağa bakan bir ok ile temsil ederken, çıkarma işlemini sola bakan bir ok ile temsil etmeye çalışmışlardır. Toplama işlemi için kümelerdeki birleşim (∪) sembolünün çıkarma işlemi için kesişim (∩) sembolünün kullanılması bu ilişkiye vurgu yapan başka bir örnek olarak verilebilir (G1). Bu tür bir ilişkilendirme yapmayan bir grubun (G5) yeni bir sembol arayışına girmediği, işlemleri sadece renklerle ayırdığı görülmüştür. Bu grup toplama için kırmızı, çıkarma işlemi için mavi rengi kullanmayı tercih etmiştir. Kırmızı ve mavi renk sıcak ve soğuk hava ile ilişkilendirilebilir ancak öğretmen adayları raporlarında renk seçimlerinde gömülü olan bu zıt ilişkiden bahsetmemişlerdir.



Şekil 4. Grup 8 (sol) ve Grup 3'ün (sağ) toplama ve çıkarma işlemleri için kullandığı gösterimler

Geliştirilen sayı sistemindeki işlemlerin modellenmesinde göze çarpan bir başka anlam ise sayıların *parçalama ve birleştirme* anlamlarıdır. Tablo 2'de görüldüğü üzere üç grup (G1, G5 ve G7) geliştirdikleri sayı sistemlerindeki işlemlerin gösterimlerinde sayıların parçalama ve birleştirme anlamına vurgu yaparak işlemleri çözmeye çalışmışlardır. Grup 7 toplama ve çıkarma işlemleri için yeni bir sembol arayışına girmemiş ve artı (+) ve eksi (-) sembollerini kullanmışlardır.



Şekil 5. Grup 7'nin çıkarma işlemi için kullandığı gösterim

Yedinci grup 32 – 5 işleminde Şekil 5'te görüldüğü gibi ilk olarak 1 onluğu 10 birlik ile değiştirerek (1 onluğu çubuk ile birlikleri ise çemberler ile temsil ederek) çıkarma işlemini yapmıştır. Geliştirdiği gösterim parçalama ve birleştirme yapmaya olanak sağlamaktadır. Grup 1 ve Grup 5 de sayıları parçalama ve birleştirme anlamlarını vurgulayarak toplama ve çıkarma işlemlerini modellemişlerdir. Diğer grupların ise geliştirdikleri sayı sistemlerindeki işlemlerde bu anlamları vurgulayan gösterimlere rastlanmamıştır.

5. Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada öğretmen adaylarının doğal sayılara, tam sayılara, toplama ve çıkarma işlemlerine yükledikleri anlamlar bir modelleme etkinliği aracılığıyla incelenmiştir. Bu etkinlikte, eski Çin uygarlığında kullanılan bir sayı sistemi öğretmen adaylarına tanıtılmış ve kendi sayı sistemlerini geliştirerek bu sistem içerisinde toplama ve çıkarma işlemi yapmaları istenmiştir. Modelleme etkinliğinin bağlamsal içeriği, birden çok doğru cevaba açık olması ve model geliştirme sürecinin matematiksel kavramlarla ilişkilendirmeyi gerektirmesi, geliştirilen temsillerin öğretmen adaylarının doğal sayılara, tam sayılara, toplama ve çıkarma işlemlerine yükledikleri anlamların anlaşılmasını sağlamıştır. Bu bağlamda çalışma, modelleme sürecinin öğretmen adaylarının matematiksel kavram ilişkilerini harekete geçirme potansiyelini ortaya koymaktadır. Bu sonuç, alanyazında modelleme ve öğretmen eğitimi kapsamında yürütülen çalışmaları (örn. Borromeo Ferri & Blum, 2010; Koellner Clark & Lesh, 2003, Schorr & Lesh, 2003) destekler niteliktedir.

Modelleme etkinliği vasıtasıyla elde edilen veriler, öğretmen adaylarının kendi sayı sistemlerini geliştirirken kullandıkları gösterimlerde genellikle kendilerine sunulan örneğin dışına çıkamadıklarını ortaya koymaktadır. Ayrıca öğretmen adaylarının matematiksel kavramların temsilinde geometrik şekillerden (doğru parçası, daire vb.) veya günlük hayattaki bazı nesnelerden (yıldız, ok vb.) yararlandıkları söylenebilir. Matematiksel sembollerin, temsil ettikleri kavramlarla ilişkili olduğu düşünüldüğünde (De Cruz & De Smedt, 2013) öğretmen adaylarından beklenen hem matematiksel kavramların farklı anlamlarını gösterimlerine yansıtabilmeleri hem de kendi içerisinde tutarlı sayı sistemleri geliştirebilmeleridir. Araştırmanın sonuçları öğretmen adaylarının gösterimlerini, sayıların ve işlemlerin bazı kavramsal anlamlarını destekleyecek şekilde oluşturmaya çalıştıklarını işaret etmektedir.

Baki ve Kartal'a (2004) göre sembollerin öğrenciler tarafından anlam kazanması için belirli fikirlerle ilişkilendirilmesi gerekir. Bu araştırmada öğretmen adaylarının sayıları anlamlandırırken sadece kardinalite fikrine odaklandıkları, bazı grupların sayıların parça-bütün bağlamında yorumlanması gibi sayı ilişkilerini açığa çıkaracak bir gösterimi tercih ettikleri sonucuna ulaşılmıştır. Tüm gruplar gösterimlerinde sayıların kardinalite anlamından yararlanmışlardır. Saymanın temel ilkelerinden biri olan kardinal değer ilkesi bir gruptaki nesne sayısıyla ilgili olup (Aubrey, 1993; Gelman & Meck, 1983; Treacy & Willis, 2003), kavramsal bilgiye sahip olmayı gerektirmektedir (Olkun vd., 2013). Tüm öğretmen adayları miktara odaklanarak gösterimlerinde sembol ve çokluk arasında bir ilişki kurmaya çalışmışlardır. 4 sayısının temsilinde yan yana dizilmiş dört tane üçgen veya dörtgen kullanılması buna örnek olarak verilebilir. Burada dikkati çeken noktalardan biri bu anlamın gösterimlerde sadece 5 sayısına kadar kullanılmasıdır. 5 sayısı için veya 5 sayısından sonra grupların çoğu yeni bir sembol arayışına girmiştir. Bunun bir nedeni, kardinalite anlamının sayılar büyüdükçe gösteriminin zor olması olabilir. Örneğin bu çalışmada öğretmen adaylarının 5 sayısının gösteriminde birbiriyle bir noktada kesişen beş doğru parçası çizmek yerine yıldız çizerek yeni bir sembol belirledikleri tespit edilmiştir (bkz. Şekil 2, Grup 5). Tüm grupların gösterimlerinde kardinalite anlamını vurgulayacak bir sembol seçmeleri sayıları sadece miktar ile eşleştirmelerinin bir sonucu olabilir.

Sayıların kavramsal olarak anlaşılması için vurgunun saymadan sayıların parça-bütün ilişkisine doğru kayması önemlidir (Young-Loveridge, 2001). Parça-bütün anlamı sayıların farklı parçalara ayrılabileceği anlamına gelmektedir. 5 sayısının 4 ve 1 veya 3 ve 2 şeklinde algılanması buna örnek olarak verilebilir. Treacy ve Willis'e (2003) göre parça-bütün ilişkisi sayıları anlamak için bir temel oluşturur. Ayrıca sayıların parça-bütün ilişkisi hem hesaplamada akıcılığın (Postlewait vd., 2003) hem de kardinalitenin kazanımına yardımcı olmaktadır. Bu ilişki sayesinde sayılar görsel olarak nasıl sunulursa sunulsun ya da nasıl parçalanırsa parçalansın kümenin miktarının her zaman aynı kalacağı anlaşılır. Bu nedenle öğretmen adaylarının sayılarla ilgili oluşturmaları beklenen bir diğer anlam, sayıların parça-bütün ilişkisi bağlamında yorumlanmasıdır. Araştırmanın sonuçları, grupların yarıdan fazlasının bu anlamı gösterimlerinde kullandıklarını göstermektedir. Burada dikkati çeken nokta grupların genellikle 5 sayısından sonra bu anlamı destekleyecek gösterimleri tercih etmeleridir. Öğretmen adayları genellikle 5 sayısı için yeni bir sembol belirleyerek 5'ten büyük sayılar için gösterimlerinde 5 sayısını referans alarak sayı ikilileri oluşturma yoluna gitmişlerdir. Örneğin 5 sayısı için yıldız (✯) sembolü, 1 sayısı için düz çizgi (I) sembolü yaratılmış ve 6 sayısı (5,1) sayı ikilisi kullanarak (✯I) şeklinde temsil edilmiştir (bkz. Şekil 2, Grup 5). Sayıların gösteriminde farklı sayı ikililerinden yararlanmak sayıların kavramsal olarak anlamlandırılmasında önemlidir. Örneğin gösterimlerinde bu ilişkiyi kullanan bir grubun 6 sayısı için (5,1) sayı ikilisinin yanında (3,3) sayı ikilisini de kullanması beklenebilir. Ayrıca tüm grupların 5 sayısından küçük sayılar için bu ilişkiyi kullanmadıkları da gösterimlerde tespit edilmiştir. Örneğin 4 sayısının gösteriminde yan yana dizilmiş üçgenlerin kullanılması yerine (2, 2) sayı ikilisini vurgulayacak bir dizilimin (örneğin iki sıra halinde verilen üçgen dizilimleri) kullanılması bu anlamı destekleyecek bir göstergedir. Yapılan çalışmalar yetişkinlerin bile sayıların parça-bütün bağlamında yorumlanmasında sıkıntı yaşadıklarını göstermektedir (Steinke, 2008; Young-Loveridge, 2001). Sayıların kardinalite anlamı tüm gruplar tarafından gösterimlere yansıtılırken, parça-bütün anlamının bazı gruplar tarafından kullanılmaması sayıları sadece miktar ile sınırlandırmalarından dolayısıyla sayılara ilişkin sınırlı deneyimlerinden kaynaklanmış olabilir. Kısa bir süre sonra matematik öğretmeni olacak öğretmen adaylarının sınıflarında bu anlamları destekleyecek söylemler veya gösterimler kullanılabilmesi ancak sayıları içselleştirebilmeleriyle mümkün olacaktır. Bu nedenle öğretmen adaylarının lisans eğitimleri sürecinde aldıkları eğitim derslerinde, sayıların bu anlamları üzerinde konuşmak ve öğrenme ortamını sayı temsillerinin farklı dizilimlerinin kullanıldığı etkinliklerle zenginleştirmek önerilmektedir. Bu sayede öğretmen adaylarının sayılara ilişkin daha kavramsal bir anlayışa sahip olacağı düşünülmektedir.

Çoğu grubun gösterimlerinde 5'i referans alarak 5'ten büyük sayılar için sırasıyla (5,1) ve (5,2) gibi gösterimleri tercih etmesi, parça-bütün ilişkisi bağlamında ele alınabileceği gibi taban kavramıyla da açıklanabilir. Öğretmen adayları bu gösterimlerinde beşlik sayı tabanının kullanıldığı bir sayı sistemi geliştirmeyi tercih etseler de, raporlarında taban kavramına değinmemişlerdir. Bu bulgu, öğretmen adaylarının sayı gösterimlerinde taban kavramının örtük olarak yer aldığı, ancak parça-bütün ilişkisinin açık olarak yer aldığını göstermektedir. Ayrıca burada dikkati çeken nokta, tercih ettikleri bu tabanı (5'lik taban) geliştirdikleri sayı sistemleri ile yapılan dört işlemlere aktaramamalarıdır. Öğretmen adayları gösterimlerinde beşlik sayı tabanını kullanmalarına rağmen toplama ve çıkarma işlemlerinde alışkın oldukları onluk tabanı kullanmaya devam etmişlerdir. Bu durum da, taban kavramının sayı temsillerinde örtük olarak yer aldığını, öğretmen adaylarının sayı gösterimlerinin işaret ettiği 5'lik taban kavramının farkında olmadığını doğrulamaktadır. Bu sonuç Akyüz'ün (2016) çalışmasının bulgularıyla benzerlik göstermektedir. Mevcut araştırmada da öğretmen adayları sekizlik tabanda çalışmalarına rağmen çarpma işlemini geçmiş deneyimlerine bağlı kalarak onluk tabanda işlem yaparak çözmüşlerdir. Ortaokul öğrencilerinin ve öğretmen adaylarının onluk sayı tabanından farklı bir tabanla karşılaştıklarında zorluk yaşadıklarını ortaya koyan birçok araştırma bulunmaktadır (Özdemir & Göktepe Yıldız, 2015; Thanheiser & Rhoads, 2009). Ayrıca sınıf öğretmeni ve adayları ile yapılan bir çalışmada (Albayrak, İpek & Işık, 2006) sayı sistemlerinin kavratılmasında yaşanan güçlükler ve nedenleri tartışılmıştır. Bu güçlüklere örnek olarak rakamların öğretiminde kavramsal eksikliklerin olması, rakamların ifade ettiği anlama dönük çalışmaların yeterince önemsenmemesi, onluk sistem için yapılan açıklamaların yetersiz olması gibi güçlükler ve nedenler öne sürülmüştür. Rakam kavramının öğretiminde kavramsal boyutun ihmal edilmesinin öğrencilerin soyut düşünmesini geciktirdiği belirtilmektedir. Hâlbuki farklı medeniyetlerde kullanılan sayı tabanlarında yapılan işlemler öğrencilerin farklı stratejiler geliştirmelerine ve onluk sistemi anlamlandırmalarına yardımcı olmanın yanı sıra (Akyüz, 2016; Thanheiser & Rhoads, 2009) matematiksel düşünceyi de geliştirir. Örneğin 60'lık sayı tabanını benimseyen Babillerin ve 20'lik sayı tabanını benimseyen Mayalıların kullandıkları sayı sistemleri (Burton, 2021; Karaaslan, 2015) ile onluk sistemin karşılaştırılmasına dayalı etkinliklerin yapılması öğrencilerin doğal sayıları ve onluk tabanı anlamlı bir şekilde öğrenmelerini sağlayabilir. Bunun için öncelikle öğretmenlerin bu kavramları geliştirmeleri gerekir. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının lisans eğitimlerinin ilk yıllarında aldıkları matematik tarihi derslerinde veya son yıllarda aldıkları modelleme derslerinde bu tür çalışmaların yapılmasının sayıları ve sayı sistemimizi kavramsal olarak sorgulamalarında faydalı olacağı düşünülmektedir.

Araştırmanın bir diğer önemli bulgusu öğretmen adaylarının tam sayılara yükledikleri anlamlardır. Bu çalışmada gruplardan sadece bir tanesi tam sayıları yön fikri ile eşleştirebilmiştir. Bu grup, pozitif ve negatif sayıların gösteriminde sağ ve sol yöne bakan okları kullanarak negatif sayıların yön anlamını destekleyecek bir gösterim kullanmayı tercih etmişlerdir. "+" ve "-" işaretinin tam sayılar için bir yön belirttiğinin bilinmesi gerekir (Steiner, 2009). Ancak bir grup dışındaki tüm öğretmen adayları gösterimlerinde bu fikri destekleyecek bir sembol arayışına gitmemişlerdir. Bu durum, alanyazındaki araştırmacılar tarafından ortaya konulan öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının tam sayılara yönelik kavramsal anlamalarındaki eksikliklerini doğrulamaktadır (Steiner, 2009; Wessman-Enzinger & Tobias, 2020). Yön kavramının yanı sıra öğretmen adayları tarafından başvurulan bir diğer anlam negatif ve pozitif tam sayılar arasındaki zıt yönlü ilişkidir. Bu ilişkiyi gösterimlerinde kurabilen öğretmen adayları içi dolu ve boş şekiller veya renkler (sıcak ve soğuk havayı kırmızı ve mavi renk ile ilişkilendirerek) gibi gösterimlerden yararlanmışlardır. Bu bulgu, Berber ve Sezgin-Memnun (2018) tarafından yapılan araştırmanın sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir. Araştırmacılar ortaokul öğrencilerinin tam sayıları algılayış biçimlerini incelemişler ve öğrencilerin çoğunluğunun tam sayıların zıtlığı kategorisine ilişkin metaforlar geliştirdiklerini tespit etmişlerdir. Bu metaforlar bizim araştırmamıza benzer şekilde hava durumu (sıcak-soğuk) ve termometre gibi benzetmelerdir.

Yön anlamına ve zıtlık ilişkisine vurgu yapmayan diğer gruplar ise negatif sayıların gösteriminde sayının üzerine çizgi çizme, sayının önüne nokta koyma veya şeklin içine çarpı işareti koyma gibi var olan sayı sistemimizdeki gösterime benzeyen gösterimleri kullanmışlardır. Bu tür gösterimlerin mevcut on tabanlı sayı sistemimizde negatif sayılar için sayının önüne koyduğumuz eksi işareti (-) yerine kullanılan sembole benzer semboller olduğu düşünülmektedir. Ancak zıt yönlü bir ilişkiyi veya yön anlamını temsil edecek bir gösterim olarak düşünülmemektedir. Bu sonuç, öğretmen adaylarının tam sayılar konusundaki kavramsal anlamalarındaki eksiklikleri işaret etmektedir. Bu bulguya benzer şekilde Ay (2019) tarafından yapılan çalışmada da yedinci sınıf öğrencilerinin negatif tam sayıları pozitif tam sayılardan ayırt etmek için gösterimlerde farklı şekil veya renk kullandıkları tespit edilmiştir.

Araştırmada elde edilen son bulgu, öğretmen adaylarının çoğunun toplama ve çıkarma işlemleri arasındaki ters ilişkiyi gösterimlerine yansıtabilmeleridir. Örneğin bir grup, toplama işleminde + sembolü yerine birleşim sembolünü ($\cup$), çıkarma işlemi için ise – sembolü yerine kesişim sembolünü ($\cap$) kullanmışlardır. Bu gösterimlerde birleşim sembolünü kullanmaları toplamanın "birleşme" anlamından (Nesher vd., 1982) yola çıktıklarını düşündürmektedir. Bir diğer grup ise bu ilişkiyi sağ ve sol yöne bakan oklar ile göstermeyi tercih etmiştir. Sağ ve sol yöne bakan oklar bu grubun toplamanın sayı doğrusunda üzerinde sağa doğru yürüme, çıkarmanın ise sola doğru yürüme şeklinde düşündüklerini göstermektedir. Bu seviyede bu ilişkinin kurulması öğretmen adaylarından beklenen bir sonuçtur. Ancak şaşırtıcı olan kurduğu sayı sistemi içerisinde sayıların parçalama ve birleştirme anlamından yola çıkarak toplama ve çıkarma işlemini yapan grup sayısının sadece üç olmasıdır. Bu gruplar onluk bozmayı gerektiren çıkarma işleminde sayıları parçalama işlemi yaparak kavramsal anlamlarını gösterimlerinde açıklayabilmişlerdir. Diğer grupların bu anlamı gösterimleri ile eşleştirememeleri toplama ve çıkarma işlemlerinde algoritmayı uygulamaya eğilimli olduklarını göstermektedir. Nitekim gösterimlerinde işlemleri yaparken mevcut sayı sistemimiz üzerinde işlemlerini gerçekleştirmişler ve eldeli toplama işleminde elde anlamı veya onluk bozmanın anlamı üzerinde duracak bir gösterim kullanmamışlardır.

Sayıların esnek bir şekilde oluşturabilmesi ve ayrıştırabilmesi, sayılar ve işlemler arasındaki ilişkilerin kurulması ve sayıların farklı anlamlarının içselleştirilmesi sayı duyusunun gelişiminde önemlidir (Baroody vd., 2006; Greenes vd., 1993; Steinke, 2008; Tsamir vd., 2015). Bu araştırmanın sonuçları alanyazınla uyumlu olarak (Kaminski, 1997; Yang vd., 2009) öğretmen adaylarının, sayı duyusunun göstergeleri olarak kabul edilen bu anlamları oluşturabilmeleri konunda bazı eksikliklerinin olduğunu ortaya koymuş ve öğretmen eğitiminin gerekliliğine dikkat çekmiştir. Çocukların sayı duyusunu geliştirmek için öncelikle öğretmenlerin sayı duyusunun geliştirilmesi gerekir (Yang vd., 2009). Öğretmenin rolü, kural ve algoritmaların ezberlenmesine odaklanmak yerine sayı ve işlemlere ilişkin kavramsal bir anlayış geliştiren etkinlikler ve deneyimler sunmaktır (Postlewait vd., 2003). Bu nedenle öğretmen adaylarının lisans eğitimi sürecinde öğretim yöntemleri gibi derslerde sayı ilişkilerini ve işlemler arasındaki ilişkileri görmelerini ve tartışmalarını destekleyen ortamlar oluşturulmalıdır. Bu amaçla tasarlanacak öğretmen eğitimi derslerinde, bu çalışmada kullanılan modelleme etkinliği gibi etkinliklerin kullanılması ve bu etkinliklerle yalnızca problem çözme odaklı değil kavramsal ilişkilendirme ve model oluşturma odaklı çalışmaların yer alması önerilmektedir. Ayrıca bu çalışmanın sınırlıklarından biri olan, yalnızca yazılı raporların ve görsellerin incelenmesinin bundan sonraki araştırmalarda ses ve video kaydı ile aşılması önerilmektedir. Özellikle, öğretmen adaylarının diğer grupların geliştirdiği farklı sayı gösterimlerinden edindikleri kavramsal anlamaların incelenerek bu çalışmanın bir adım ileriye taşınması önerilmektedir. Zira öğretmen adaylarının sayılar ve işlemlere dair kendi kavramsal anlamlarını fark etmesi ya da bu çalışma ile ortaya konulan gösterimlerin ifade ettiği anlamları incelemeleri öğretmen eğitimi açısından son derece önem arz etmektedir.

Kaynakça

Akyüz, D. (2016). Bir öğretmen adayının çözüm stratejileri: Sayıları sekizlik tabanda yeniden keşfetme. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 17*(2), 199-216.

Albayrak, M., İpek, A. S., & Işık, C. (2006). Onluk sayma sisteminin öğretimi. *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, *13*, 199-206.

Ay, B. (2019). *An investigation of seventh grade students' understanding of negative integers via mathematics history-based model-eliciting activities*. Master's thesis, Middle East Technical University.

Aubrey, C. (1993). An investigation of the mathematical knowledge and competencies which young children bring into school. *British Educational Research Journal, 19(1),* 27-41.

Baki, A., & Kartal, T. (2004). Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerinin cebir bilgilerinin karakterizasyonu. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, *2(1)*, 27-50.

Baroody, A. J., & Ginsburg, H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign. *The Elementary School Journal*, *84*(2), 199-212.

Baroody, A. J., Lai, M. L., & Mix, K. S. (2006). The development of young children's early number and operation sense and its implications for early childhood education. In B. Spodek & O.N. Saracho (Eds.), *Handbook of research on the education of young children* (pp. 187-221). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Berber, M., & Sezgin-Memnun, D. (2018). Ortaokul öğrencilerinin tam sayılar hakkında sahip oldukları metaforlar. 1. *Uluslararası Eğitim ve Sosyal Bilimlerde Yeni Ufuklar Kongresi Bildiriler Kitabı*, 9-11 Nisan 2018, İstanbul-TÜRKİYE

Borromeo Ferri, R. & Blum, W. (2010). Mathematical modelling in teacher education–experiences from a modelling seminar. In *Proceedings of the sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2046-2055).

Burton, D. M. (2021). Erken sayı sistemleri ve sembolleri (N. Akal, & Z. E. Özel, çeviri). S. Durmuş (Çeviri Editörü), *Matematik Tarihi Giriş* (3.baskı) içinde (ss. 1-33). Nobel Yaşam.

Chirume, S. (2012). How does the use of mathematical symbols influence understanding of mathematical concepts by secondary school students? *International Journal of Social Sciences & Education, 3(1).*

Chin, K. E., & Pierce, R. (2019). University students' conceptions of mathematical symbols and expressions. EURASIA *Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15(9),* em1748.

Creswell, J. W. (2021). *Nitel Araştırma Yöntemleri*, N. A. Mesut Bütün-Selçuk Beşir Demir. çev. Osman Birgin vd. Ankara: Siyasal Kitabevi.

De Cruz, H., & De Smedt, J. (2013). Mathematical symbols as epistemic actions. *Synthese*, *190*, 3-19.

Douglas, H., Headley, M. G., Hadden, S., & LeFevre, J. A. (2020). Knowledge of mathematical symbols goes beyond numbers. *Journal of Numerical Cognition, 6(3)*, 322-354.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education, 24(2),* 94-116.

Gelman, R. & Gallsitel, C. R. (1978). *The Child's Understanding of Number*. Harvard Universtiy Press: Cambridge, Massachusetts, London

Gelman, R., & Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: Principles before skill. *Cognition, 13 (3),* 343-359.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17(2),* 137-165.

Greenes, C., Schulman, L., & Spungin, R. (1993). Developing sense about numbers. *The Arithmetic Teacher*, *40(5),* 279-284.

Hassidov, D., & Ilany, B. S. (2019, February). Between natural language and mathematical symbols (<,>,=): the comprehension of pre-service and preschool teachers' perspective of "Numbers" and "Quantity". In Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (No. 25). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics, 19(3),* 333-355.

Horzum, T., & Kılıç, Z. N. (2016). Middle school students' understanding of some geometry symbols. *Journal of Research in Education, Science and Technology, 1(2),* 113-132.

Kaminski, E. (1997). Teacher education students' number sense: Initial explorations. *Mathematics Education Research Journal, 9(2),* 225-235.

Karaaslan, B. (2015). *Doğal sayıların tarihsel gelişimi ve ilköğretim matematik programındaki doğal sayıların öğretimi ile karşılaştırılması* (Yüksek Lisans Tezi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü).

Koellner-Clark, K., & Lesh, R. (2003). A modeling approach to describe teacher knowledge. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 159-174). Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (Eds.). (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum Associates.

Lim, S. Y., & Chapman, E. (2010). Using history to enhance student learning and attitudes in Singapore mathematics classrooms. *Education Research and Perspectives*, (2), 110-132.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers

Miles, M. B., Huberman, A. M., & Saldana, J. (2014), *Qualitative data analysis: A Methods Sourcebook* (4th ed.). Sage.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2018). Matematik dersi öğretim programı. Ankara: MEB.

Mutodi, P., & Mosimege, M. (2021). Learning mathematical symbolization: conceptual challenges and instructional strategies in secondary schools. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 35,* 1180-1199.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics, 13(4),* 373-394.

Olkun, S., Fidan, E., & Özer, A. B. (2013). 5-7 yaş aralığındaki çocuklarda sayı kavramının gelişimi ve saymanın problem çözmede kullanımı. *Eğitim ve Bilim, 38(169),* 236-248.

Özdemir, A.Ş., & Göktepe Yıldız, S. (2015). Sınıfta matematik tarihinin kullanımına bir örnek: Babil sayma sistemi. *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 4*(1), 26-49.

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation (s) in developing mathematical understanding. *Theory into practice*, *40(2),* 118-127.

Postlewait, K. B., Adams, M. R., & Shih, J. C. (2003). Promoting meaningful mastery of addition and subtraction. *Teaching Children Mathematics*, *9(6),* 354-357.

Powell, S. R. (2015). The influence of symbols and equations on understanding mathematical equivalence. *Intervention in School and Clinic, 50*(5), 266-272.

Savizi, B. (2007). Applicable Problems in the History of Mathematics: Practical Examples for the Classroom. *Teaching Mathematics and Its Applications*: *An International Journal of the IMA, 26*(1), 45-50.

Schleppegrell, M. J. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading & Writing Quarterly, 23(2),* 139-159.

Schorr, R., & Lesh, R. (2003). A modeling approach for providing teacher development. *Beyond constructivism: A models and modeling perspective.* In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 141-158). Lawrence Erlbaum Associates.

Seggie, F. N., & Bayyurt, Y. (Eds.). (2017). *Nitel araştırma: Yöntem, teknik, analiz ve yaklaşımları*. Anı Yayıncılık.

Sevinc, S., & Ay, B. (2021). Integration of mathematics history into model-eliciting activities for making sense of negative integers. In D. Olanoff, K. Johnson, & S. Spitzer (Eds.), Proceedings of the Forty-Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA 43) (pp. 235-244). Philadelphia, PA, October 14-17.

Sevinc, S., & Brady, C. (2019). Kindergarteners' and first graders' development of numbers representing length and area: Stories of measurement. In K. Robinson, H. Osana, & D. Kotsopoulos (Eds), *Mathematical learning and cognition in early childhood* (pp. 115–137). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1_8

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–22.

Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (Eds.). (2012). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4681-1

Steiner, C. J. (2009). *A Study of pre-service elementary teachers' conceptual understanding of integers* (Unpublished doctoral dissertation). Kent State University, Kent.

Steinke, D. (2008). Using part-whole thinking in math. *Focus on Basics Connecting Research & Practice. 9(A),* 1-7.

Thanheiser, E., & Rhoads, K. (2009). Exploring preservice teachers' conceptions of numbers via the Mayan number system. Proceedings of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1220-1227.

Treacy, K., & Willis, S. G. (2003). A model of early number development. In *Annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia 2003* (pp. 674-681). Deakin University.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Tabach, M., & Barkai, R. (2015). Analyzing number composition and decomposition activities in kindergarten from a numeracy perspective. *ZDM, 47,* 639-651.

Yağcı, Z. N. (2018). *Ortaokul öğrencilerinin bazı geometri sembollerine geometri problemleri içerisinde yükledikleri anlamlar*. (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya.

Yang, D. C., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7,* 383-403.

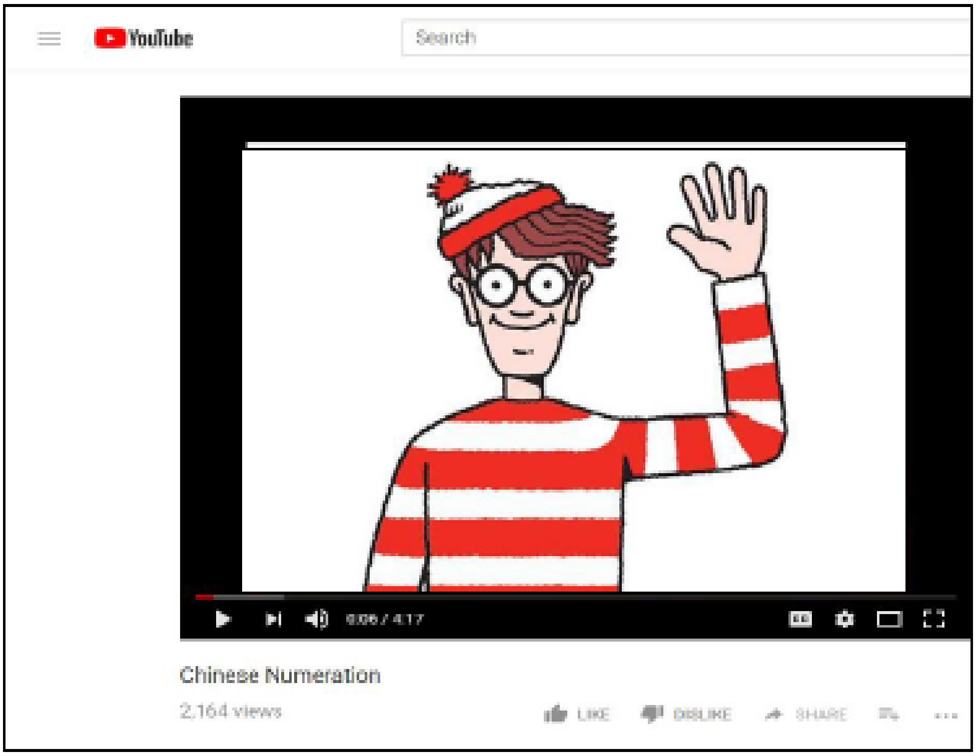
Young-Loveridge, J. (2001). Helping children move beyond counting to part-whole strategies. *Teachers and Curriculum, 5,* 72-78.

Wessman-Enzinger, N. M., & Tobias, J. M. (2020). The dimensions of prospective elementary and middle school teachers' problem posing for integer addition and subtraction. *Journal of Mathematics Teacher Education, 25,* 1-33. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09477-x

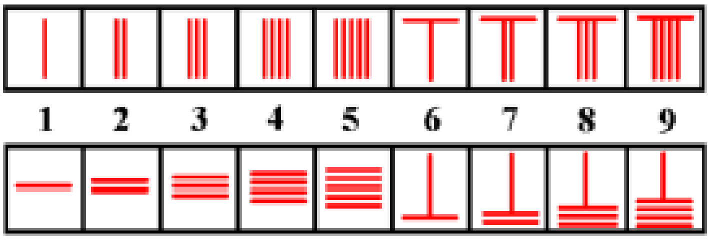
Zawojewski, J., Lesh, R., & English, L. (2003). A models and modeling perspective on the role of small group learning activities. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modelling perspective on mathematics problem solving; learning and teaching* (pp. 337–358). Lawrence Erlbaum Associates.

Ek 1: Arda'nın YouTube Kanalı Problemi

ARDA'NIN YOUTUBE KANALI



Herkese merhaba arkadaşlar, kanalıma hoş geldiniz, ben Arda. İstanbul'da yaşıyorum ve 7. Sınıf öğrencisiyim. Matematik ve matematiğe dair her şeyle ilgileniyorum ve araştırmalarımı kanalımda sizlerle paylaşıyorum. Umarım seversiniz! Bu videomda sizlere Çinlilerin kullandığı sayı sistemini tanıtacağım. Öncelikle bu tabloya bakarak rakamlar ve çubuklar ile ilgili ne söyleyebilirsiniz?



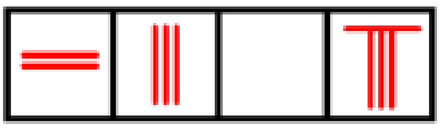
Arkadaşlar, günümüzden yaklaşık olarak 3000 yıl öncesinde Çinliler kendilerine özgü bir sayma sistemi geliştirmişlerdi.

Hesaplama yapan insanlar büyük bir dama tahtası üzerinde kırmızı veya siyah renkteki çubukları kullanarak sayıları ifade ediyorlardı. Bu sistemde dama tahtasındaki her bir karede tek bir rakam bulunurdur. Her bir sütun da birler, yüzler, binler gibi farklı bir basamağı gösteriyordu.

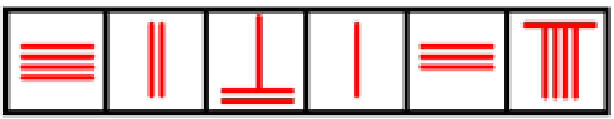
Size az önce gösterdiğim (yukarıdaki) tabloda üst satırdaki çubuk düzeni birler, yüzler ve on binler basamakları vb. için, alt satırdaki çubuk düzeni ise onlar ve binler basamağı vb. için kullanılmaktaydı.

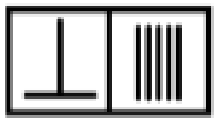
Ayrıca kırmızı çubuklar pozitif sayıları, siyah çubuklar ise negatif sayıları göstermek için tercih ediliyordu. M.Ö. 200lü yıllarda kullandıkları bu çubuk sistemi ile eski Çin uygarlığı negatif sayıları ilk kullanan insanlar arasında yer almaktadır.

Arkadaşlar şimdi sıra sizde! Açıklamaları ve aşağıda verilen örneği inceleyerek verilen sayıları bugün kullandığımız şekilde rakamlarla göstermeyi deneyelim.

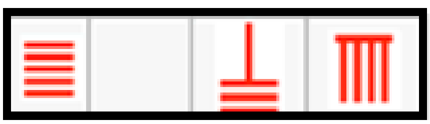


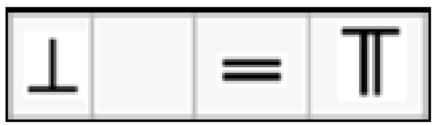
2 3 0 8





....





....

Evet arkadaşlar Çinlilerin sayı sistemini tanıyarak negatif ve pozitif tam sayıları nasıl ayırt ettiklerini sizlerle paylaşmış oldum. Ve hatta ben de kendi sayı sistemimi oluşturmaya karar verdim.

Sizlerde kendi sayı sisteminizi oluşturarak benimle paylaşır mısınız? Bir sonraki videoda sizlerden gelen sayı sistemlerini anlatacağım.