

Kesme kuvvetini hesaba katarak katarak uçlarında rijit bölgeler bulunan elastik bağlı çerçevelerin doğrusal olmayan analizi

Halil GÖRGÜN^{*}, Asım ÇELİK, Sercan KAYMAK

Dicle Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 21280, Diyarbakır

Özet

Bu çalışmada, kayma deformasyonlarının etkisi de göz önüne alınarak sonsuz rijit kısımları bulunan elastik bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin doğrusal olmayan analizi yapılmış ve bu konuda bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Önce, her iki ucunda rijit bölgeler ve dönel yaylar bulunan bir çubuk için rijitlik katsayıları elastik bölgesindekiler cinsinden elde edilmiştir. Daha sonra, ikinci mertebe teorisi kullanılarak ve kayma deformasyonları hesaba katılarak rijitlik katsayıları çıkarılmıştır. En sonunda, doğrusal prizmatik bir çubuğun üniform yayılı yük, tekil yük, doğrusal yayılı yük, simetrik yamuk şeklinde yayılı yük ve simetrik olmayan üçgen şeklinde yayılı ara yükler için değiştirilmiş ankastrelük uç kuvvetleri elde edilmiştir. Literatürde bulunan bazı sonuçlarla karşılaştırmalar yapılmış ve aralarında çok iyi uyum olduğu görülmüştür.

Anahtar kelimeler: *Rijit uçlu bölgeler, Çerçeve sistemi, Doğrusal olmayan analiz, Kayma deformasyonu, Rijitlik matrisi, Bilgisayar programı.*

^{*}Yazışmaların yapılacağı yazar: Halil GÖRGÜN. hgorgun@dicle.edu.tr; Tel: (412) 248 80 30 (3523)

The non-linear analysis of frames composed of semi-rigidly connected members with rigid end sections considering shear deformations

Extended abstract

In present study, the geometrical nonlinear analysis of frames with linear prismatic members, which may have rigid end sections and rotational semi-rigid end connections, has been carried out taking into account the effects of shear deformations.

In the analysis and design of reinforced precast concrete frames, and steel frames the real behaviour of beam-to-column connections are generally idealized either pinned or fully rigid. The notions of the two alternatives either pinned or fully rigid connections are simply the extreme cases of the actual connection behaviour, and experimental works up to date, many of which are referred to in section of previous studies of this paper show without doubt that true connections exhibit characteristics over a wide spectrum between these two extreme cases. The rigid connection idealization indicates that relative rotation of the connection does not exist and the end moment of the beam is entirely transferred to the columns. In contrast to the rigid connection assumption, the pinned connection idealization indicates that any restraint does exist for rotation of the connection and the connection moment is zero. Although these idealizations simplify the analysis and design process, the predicted response of the frame may be different from its real behaviour. Most connection normally regarded as fully rigid often display some flexural flexibility, while connections which are regarded as pinned, implying no moment transfer, possess some flexural stiffness. It would therefore seem more correct that to classify all the behaviour of beam-to-column connections in reinforced precast concrete frames, and steel frames under the heading of semi-rigid connections, while keeping in mind that pinned and fully rigid connections as extreme cases.

In this study, the nonlinear analysis of planar frames with semi-rigid connections and rigid end sections is performed. Modified stiffness coefficients in the shear wall axis of the beam connected to the shear wall are obtained with assumption that the rigid strain would be at the part between the elastic beam end and the shear wall axis.

The matrix stiffness method of analysis was modified to allow for flexible connections and rigid end parts.

The stiffness matrices are modified by correction matrices and the resulting linear equations are solved for as in the normal stiffness method. The advantages of the matrix stiffness method are that it can be programmed so that relatively large frames can be analyzed with ease and that the use of interactive techniques would permit the inclusion of improvements in the end restraint representation.

The current paper considers the nonlinear structural analysis of planar frames with flexibly connected members having rigid end sections taking into consideration the effect of shear deformations and a computer program has been prepared for the pertinent design purposes. To accomplish the foregoing goal, first the stiffness coefficients of the stiffness matrix of linear prismatic members has been found using pertinent differential equations assuming there are rigid sections of arbitrary lengths and rotational beam-to-column connections at the both ends. This kind of members, which may have rigid end sections, show up when there are lintel beams connecting shear walls and column connecting high beams. Then, the stiffness coefficients of the stiffness matrix of beams itself have been obtained, taking shear deformations into consideration. Finally, the fixed end forces have been found for a uniformly distributed load, a concentrated load, a linearly distributed load, a symmetric trapezoidal distributed load and a nonsymmetrical triangular distributed load.

A computer program has been prepared for the numerical applications of the analytical results. This program carries out the second order structural analysis of planar frames and pierced shear walls using modified stiffness matrix method, taking shear deformations into considerations, not only the effects of bending and axial deformations, but also due to shear, as well. Solving some problems in different ways, the validity of the pertinent computer program has been proved by the close match of the results. Some examples from the literature have been treated by the present method and a perfect match has been observed between the corresponding numerical results.

Keywords: Rigid end sections, frame system, nonlinear analysis, shear deformation, stiffness matrix, computer program.

Giriş

Yapı sistemlerinde çerçeveler her zaman tam rijit ya da mafsallı olarak birbirlerine bağlı varsayımına uygun davranmazlar. Genel olarak yapı sistemlerinde çerçeveleri oluşturan çubuk elemanlarının birbirlerine ya tam rijit ya da mafsalla bağlı oldukları kabulü yapılarak çözüme gidilir. Bu basitleştirme taşıyıcı sistemlerin davranışlarının gerçek olmayan bir şekilde tahminine yol açmaktadır. Gerçekte ise birleşimler bu iki kabulün arasında bir yerdedir, yarı-rijittirler, yani dönmeye karşı bir miktar rijitliğe sahiptirler. Bu birleşimlerin gerçek davranışlarını açıklayabilmek için bire bir ölçekli deneysel çalışmalara gereksinim vardır. Örneğin prefabrik yapılarda ve çelik konstrüksiyonda kirişlerin kolonlara birleşim yerlerinin tam rijit davranmadığı bilinmektedir. Özellikle prefabrik yapılarda ve çelik konstrüksiyonda kiriş-kolon birleşimleri uygulanan eğilme momenti M altında bir ϕ açısı kadar dönerler. Bu açı kiriş ve kolonların arasında ve başlangıç pozisyonuna göre olan görelidir. Bu birleşim deformasyonunun çerçeve stabilitesi üzerinde olumsuz bir etkisi vardır. Bu olumsuzluk deformasyonun çerçevenin yatay ötelenmesini artırmasından ve bu birleşimin bağlandığı elemanların etkili rijitliklerini azaltmasından kaynaklanmaktadır. Çerçeve yatay ötelenmesindeki artış elemanlardaki ikinci mertebe, $P-\Delta$, etkisini artırarak çerçevenin genel stabilitesini etkilemektedir. Bundan dolayı kiriş-kolon birleşimlerinin moment-dönme özelliği yapı sistemlerinin analizinde önemli bir rol oynamaktadır. Ayrıca kat döşemelerinin ince tutulması isteği ve yüksek katlı binalarda alt kat kolon boyutlarının büyümesi sonucunda hacim kaybı olması gibi nedenlerden dolayı çerçevelerle birlikte perde duvarları gibi yatay yük taşıyıcı elemanlara ihtiyaç duyulmaktadır. Düzlem içi rijitlikleri yüksek olan ve kesme duvarları olarak da adlandırılan bu perde duvarları, yapı planında uygun yerleştirildikleri takdirde, yatay yüklere karşı dayanımı da ekonomik olarak sağlamaktadırlar. Mimari nedenlerle perdelerde bir dizi boşluklar bırakılmaktadır. Bu tip perdeler de boşluklu perdeler denilmektedir. Bina çerçeveleri daha

çok kayma deformasyonları, perde elemanları daha çok eğilme deformasyonları yaptıkları halde boşluklu perdelerde her iki tip deformasyon da önemli olmaktadır. Ayrıca bazı hallerde bağlantı kirişlerinin ve perdelerin yükseklikleri, açıklıklarının yanında oldukça büyük değerler aldığı kayma şekil değiştirmelerinin etkisi de önemli olmaktadır. Böyle durumlarda çubuklar bağlantı noktalarında birbirlerine elastik dönel yaylarla bağlanmış gibi davranırlar. Ayrıca bağ kirişlerinin perdelerin yarı genişlikleri içinde kalan kısımları tam rijit kabul edilerek çözüme gidilir. Bu gibi durumlarda eşdeğer dönel yay sabitleri deneysel ve benzeri yöntemlerle yaklaşık olarak bulunduğunda yapı sisteminin analizini yapmak mümkün olmaktadır.

Bu amaçla yapılan bu çalışmada bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Hazırlanan bilgisayar programında rijitlik matrisi yöntemi kullanılmıştır. Yöntemi uygulayabilmek için kayma şekil değiştirmeleri de hesaba katılarak doğrusal olmayan analize ait eleman rijitlik matrisinin teşkili ve ankastrelik uç kuvvetlerinin elde edilmesi incelenmiştir. Elastik mesnetli bir çubuğun rijitlik matrisi ikinci mertebe teorisi kullanılarak diferansiyel denklemler yardımıyla elde edilmiştir. Hazırlanan bilgisayar programı kullanılarak, elemanları birbirlerine elastik dönel yaylar ile bağlanmış ve uçlarında rijit kısımları olan elemanlardan oluşan çerçevelerin statik analizi yapılabilmektedir. Bina çerçeveleri daha çok kayma deformasyonları yaptıkları için, bazı hallerde bağlantı kirişlerinin ve perdelerin kesit yükseklikleri, açıklıklarının yanında oldukça büyük değerler aldığı kayma şekil değiştirmelerinin etkisi de önemli olmaktadır. Diğer birçok bilim ve mühendislik konularında olduğu gibi yapı analizlerinde de analizcinin etkili aracı lineerleştirme değildir. Yüzyıllar boyunca yapı analizlerinde lineerleştirme yoluyla pek çok problemin yeter doğrulukta çözülmesi mümkün olmuştur. Ancak, günümüzde teknolojinin ilerlemesi ile çok yüksek dayanımlı malzemelerle çok narin yapıların yapılması mühendisleri doğrusal olmayan analiz uygulamasına yöneltmiştir. Özellikle doğrusal olmayan analize gerek duyulan problemler, çok

özel bir doğrusal olmayan davranış gösteren malzemeler, yüksek dayanımlı malzemeler ile yapılan narin yapılar ve temas bölgesinin genişliği yüke bağlı olan yapı elemanları ile ilgili problemlerdir. Burada ikinci tür nonlineerlik yani, ikinci merteye teorisinden doğan geometrik nonlineerlik incelenmiştir.

Bir boyutlu narin yapı elemanlarındaki aksel kuvvetler ve iki boyutlu ince yapı elemanlarındaki düzlem içi kuvvetler belirli bir düzeyin altında kaldıkları sürece sistemin doğrusal davranışını bozmazlar. Ancak malzemenin elastisite modülü ile yapı elemanlarının mesnetleniş şekli ve atalet momentlerine bağlı olarak yük belirli bir düzeye katınca iç kuvvetler eğilme momentlerine katkıyla yapı elemanlarının rijitliğine etki ederek analizin nonlineer olmasına neden olurlar. Bu nonlineerlik yapı elemanlarının ve sonuç olarak yapının rijitlik matrisinin yük düzenine bağlı olarak değişmesinden kaynaklanır.

Bu çalışmanın amacı, yukarıda belirtilen özellikleri sırasıyla; yapı sistemlerinin analizinde kayma deformasyonları hesaba katılarak, birleşimlerin yarı-rijit olmasını göz önüne almak ve böylece birleşimlerin özelliğinden, bağ kirişlerinin perdeler içinde kalan kısımlarını rijit olarak ve elemanların P- Δ etkisinden kaynaklanan doğrusal olmayan davranışı da hesaba katmaktır.

Önceki çalışmalar

Bu bölümde bu konularda daha önceden yapılan bazı çalışmalara değinilmiştir. Yapılan çalışmalar kronolojik olarak aşağıda sıralanmıştır :

Monforton ve Wu (1963), dönel yaylarla bağlı çubuklardan oluşan çerçevelerin doğrusal analizini matris yöntemiyle yapmışlar, kuvvetler ile yer değiştirmeler arasındaki bağıntıyı çıkarıp, rijitlik matrisini elde etmişlerdir. Bazı yükleme durumları için ankastrilik uç kuvvetlerini de bulmuşlardır.

Livesly (1964), uçlarında dönel yaylar bulunan elemanların rijitlik matrisinin çıkarılmasını incelemiştir. Ancak ankastrilik uç kuvvetlerinin ne olacağı hakkında bir çalışma yapılmamıştır.

Romstad ve Subramanian (1970), dönel yaylarla bağlı çerçevelerin analizini yapmışlardır. Düğüm noktalarının mafsallı, tam rijit veya yarı rijit olması durumları için moment ve bağıl dönme ilişkisini bir grafikte vermişlerdir. Konuyla ilgili deneysel çalışmalar da yapan aynı yazarlar moment-dönme ilişkisini bir grafikte vermişlerdir.

Ackroyd ve Gerstle (1983), dönel yaylarla bağlı çerçevelerin elastik stabilitesini incelemişlerdir. Bir çerçevenin elastik burkulma kapasitesinin daha rijit bir bağlantı seçilerek önemli ölçüde artırıldığı sonucuna varmışlardır.

Yu ve Shanmugan (1986), yarı-rijit bağlı çerçevelerin stabilitesi üzerinde çalışmışlar ve bu tür yapıların elastik göçme yükünün bulunması için bir rijitlik matrisi yöntemi sunmuşlardır. Bu yöntem, bağlantıların yarı-rijit davranışlarının göz önüne alınması yanında ayrıca aksel rijitliği, geometrik değişiklikleri ve P- Δ etkisini de göz önüne almaktadır. Araştırmacılar, yaptıkları deneyler ile teorik analizlerinin geçerliliğini ölçmüşler ve yöntemlerinin kabul edilebilir doğrulukta olduğu sonucuna varmışlardır. Bu çalışmanın sonucunda düğüm noktalarının rijitlik derecesinin artırılması ve takviyelendirme ile göçme yükünün artırılacağı kanısına varmışlardır.

Stelmack ve diğerleri (1986), doğrusal dönel yaylarla bağlı çelik çerçeveler için olan analitik yöntemlerin geçerliliğini kanıtlamak amacıyla deneysel çalışmalar yapmışlardır. Deneyler sonucunda bu çerçeve analiz yöntemlerinin iyi sonuçlar verdiği sonucunu elde etmişlerdir.

Cunningham (1990), çelik yapılarda dönel yaylı bağlantılar hakkında bir çalışma yapmıştır. Yapılan bu deneysel çalışmadan kiriş-kolon bileşiminin karakteristik özellikleri elde edilmiştir. Bu çalışmada kiriş ve bağlantı için

verilen bir momente karşılık gelen dönmeyi veren grafik elde edilmiş ve değişik bağlantıları olan çelik elemanlar için sonuçlar bir grafikte özetlemiştir.

Diñçer (1991), Kayma deformasyonlarının etkisi göz önüne alınarak rijit bağlı çubuklar için rijit uçların varlığının ikinci mertbe analizine etkilerini değişik ara yük durumlarını da inceleyerek ele almıştır.

Aksoğan ve Akkaya (1991), Elastik bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin doğrusal analizini ele almışlar ve bu konuda bir bilgisayar programı hazırlamışlardır. Önce, uçlarında dönel yaylar bulunan bir eleman için rijitlik matrisini bulmuşlar ve daha sonra tekil yük, uniform yayılı yük, doğrusal yayılı yük, simetrik olmayan üçgen şeklinde yük ve simetrik yamuk şeklinde yük için ankastrelilik uç kuvvetlerini elde etmişlerdir.

Aksoğan ve Görgün (1993), yarı-rijit bağlı çerçevelerin doğrusal olmayan analizi üzerinde çalışmışlar. Çeşitli ara yükler için ankastrelilik uç kuvvetlerini elde edip bu konuda bir bilgisayar programını hazırlamışlardır.

Aksoğan ve diğerleri (1993), uçlarında rijit bölgeler bulunan elastik bağlı çubuklardan oluşan çerçevelerin doğrusal olmayan analizini, yayların doğrusal olmayan davranışının üçüncü dereceden bir polinom olduğu varsayımı ile yapmışlar ve bu konuda bir bilgisayar programı hazırlamışlardır.

Erdem ve Aksoğan (1994), uçlarında rijit bölgelere doğrusal olmayan dönel yaylarla bağlanmış çubuklardan oluşan çerçevelerin analizi üzerinde çalışmışlar ve bir bilgisayar programı hazırlamışlardır.

Aksoğan ve Akavcı (1994), Uçlarında rijit bölgeler bulunan dönel yaylı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin stabilite analizi üzerinde çalışmışlar. Bu çalışmada, eleman elastisite modülüne, atalet momentine, uzunluğuna ve eksenel kuvvetine bağlı eleman

rijitlik matrisi verilmiş ve her iki konuda da birer bilgisayar programı hazırlanmıştır.

Aksoğan ve diğerleri (2005), Uçlarında rijit bölgeler bulunan ve doğrusal olmayan yaylarla bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin geometrik nonlineerliği hesaba katarak analizi üzerinde çalışmışlar. Bu konuda bir bilgisayar programı hazırlamışlardır.

Görgün ve Yılmaz (2008), kesmenin etkisini de hesaba katarak yarı-rijit bağlı çerçevelerin doğrusal olmayan analizi üzerinde çalışmışlar. Çeşitli ara yükler için ankastrelilik uç kuvvetlerini elde edip bu konuda bir bilgisayar programını hazırlamışlardır.

Karacan (2011), kesmenin etkisini hesaba katarak uçlarında rijit bölgeler bulunan yarı-rijit bağlı çerçevelerin doğrusal olmayan analizi üzerinde çalışmıştır.

Teorik çalışma

Bu çalışmada aşağıdaki kabuller göz önüne alınmıştır.

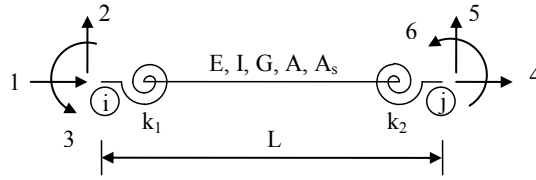
1. Yapı malzemesi doğrusal elastik, homojen ve izotropdur.
2. Çubuk elemanı sabit kesitli ve doğru eksenlidir.
3. Dış yükler statiktir.
4. Süperpozisyon geçerli değildir.
5. Bağ kirişlerinin uçları perde kesitinin ağırlık merkezi üzerindedir.
6. Kirişlerin geniş perdeler, perdelerin de yüksek bağlantı kirişlerinin içinde kalan bölgeleri sonsuz rijittir.
7. Geometrik nonlineerlik hesaba katılacaktır.
8. Çubuk kesitinde kayma merkezi ile ağırlık merkezi çakışmaktadır.
9. Kullanılan dönel yay modeli doğrusal elastik ve yay boyu sıfır alınmıştır.
10. Dönel yaylarda sadece bağlı dönmeler göz önüne alınmıştır.

Doğal olarak geometrik nonlineerlik hesaba katıldığı veya dönel yayların doğrusal olmayan davrandığı durumlarda süperpozisyon geçerli değildir.

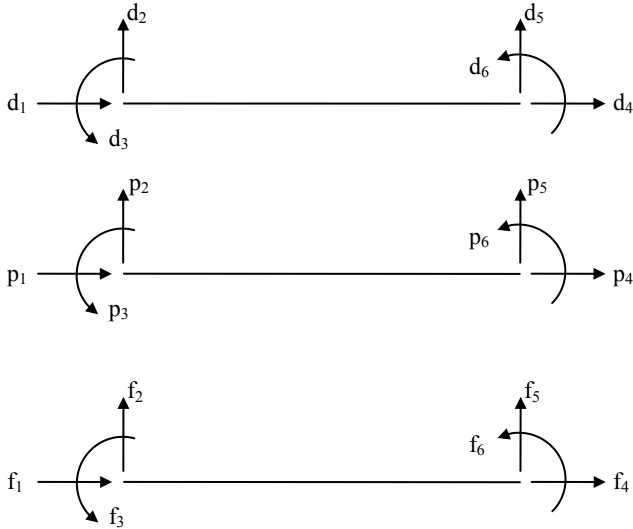
Bu çalışmada kullanılan yöntem, rijitlik matrisi yöntemi diye bilinen, matris formülasyonuna dayanır. Bu yöntem, açı metodu diye bilinen ve deplasmanları bilinmeyen olarak matris formülasyonu kullanan klasik metodun geliştirilmiş şeklidir. Bir taşıyıcı elemanın $N \times N$ adet rijitlik etki katsayısını içeren kare matrise rijitlik matrisi denir. Rijitlik matrisi serbestlik derecesi N olan bir taşıyıcı sistemde, N adet düğüm deplasmanını sisteme etkileyen yük vektörüne bağlayan bir katsayılar matrisidir.

katsayıları denir. Belirli bir doğrultuda birim deplasman oluşması için taşıyıcı sisteme bir kuvvet uygulamak gerekir. Ancak uygulamada, oluşacak deplasmanın ve uygulanacak kuvvetin doğrultu, yön ve uygulama noktalarının açık olarak belirtilmesi gerekir. Bunun için taşıyıcı elemanın bütün serbestlik dereceleri bir okla ve okun başı, kabul edilen işaret kuralına göre pozitif yönü göstermek üzere bir şekil üzerinde gösterilir. Kuvvetler ve ötelenmeler için doğru, dönmeler için eğri oklar kullanılır ve bütün oklar sıra ile numaralanır (Şekil 1, Şekil 2).

Elemanın her iki ucunda meydana getirilen tek tek birim deplasmanlar altında çubuk uçlarında oluşan tepkilere çubuk elemanın rijitlik etki



Şekil 1 İşaret kabulü



Şekil 2. Eleman koordinatlarında eleman uç deplasmanları, uç kuvvetleri ve ankastrelük kuvvetleri

Bir deplasmana karşılık gelen rijitlik matrisi elemanlarını hesaplamak için o deplasmana birim ve diğerlerine sıfır değer verip hesaplamak gerekir.

Bir çubuk elemanın i ve j uçlarındaki kuvvet ve deplasman kolon vektörleri alt alta getirilirse eleman rijitlik denklemi,

$$\begin{bmatrix} P_i \\ \dots \\ P_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ \dots & \dots \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ \dots \\ d_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_i \\ \dots \\ f_j \end{bmatrix} \quad (1)$$

veya $[p]=[k][d]+[f]$ sembolik formda elde edilir. Burada k'ya eleman rijitlik matrisi ismi verilir. Rijitlik etki katsayılarının, çubuğu uç deplasmanlarını uç kuvvetlerine bağladığı görülmektedir. Eleman rijitlik matrisi, sistemi oluşturan her eleman için yazılır. Burada $[p]$, $[k]$, $[d]$ ve $[f]$ sırası ile uç kuvvetleri kolon vektörü, eleman rijitlik matrisi, uç deplasmanları kolon vektörü ve ankastrelilik uç kuvvetleri kolon vektörüdür.

Taşıyıcı sistem için ortak bir koordinat takımı seçilir, her bir çubuk elemanı için elde edilmiş olan uç kuvvet deplasman ilişkisinin bu ortak koordinat takımında yazılır.

Sistemi oluşturan elemanlar için rijitlik matrisleri oluşturulduktan sonra sistem rijitlik matrisi kodlama tekniği kullanılarak elde edilir.

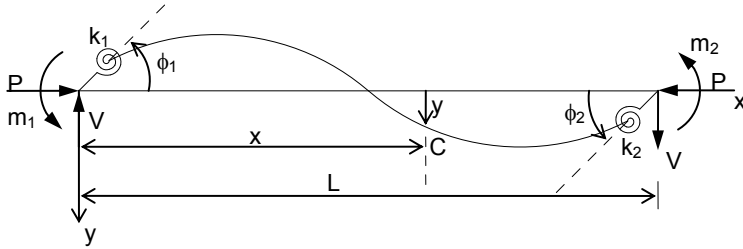
Sistem koordinatlarında verilen D yer değiştirmeleri eleman rijitlik denklemlerinde yerine yazılır ve her eleman için yazılan uygunluk denklemleri, denge denklemlerinde yerine konularak ve düğümlere etkiyen dış yükler ve deplasmanlar alt alta getirilerek

$$[P]=[K][D] \quad (2)$$

sistem denge denklemleri elde edilir. Burada P ve D sırasıyla düğüm noktalarındaki dış yük ve deplasman kolon vektörler, K ise sistemin rijitlik matrisidir. P bilindiğine göre D bu ifadeden bulunur.

Uçlarında dönel yaylar bulunan çubuğun rijitlik etki katsayıları aksenal kuvvetin basınç ve çekme olması halinde incelenecektir.

Şekil 3'te görülen doğru eksenli sabit kesitli L uzunluğundaki çubuğun eğilme ve kayma rijitlikleri sabittir.



Şekil 3. İşaret kabulü

Bilindiği gibi dolu kesitlerde eğilme ve kayma rijitlikleri sırasıyla,

$$k_m = EI \quad (3)$$

$$k_t = kGA = GA_s \quad (4)$$

dır. Burada;
EI : Kesit eğilme rijitliği
E: elastisite modülünü,
G: kayma modülünü
I: atalet momentini

A: kesit alanını

k: kesit şekline bağlı bir sabiti göstermektedir.

Çubuğun i ucuna etkiyen P, V, m₁ uç kuvvetleriyle, j ucuna etkiyen P, V, m₂ uç kuvvetlerinin pozitif yönleri, ayrıca eksene dik y yer değiştirmeleri, θ₁ ve θ₂ uç dönmeleri ve M, T kesit tesirlerinin pozitif yönleri Şekil 3'te gösterilmiştir.

Denge denklemlerinden eğilme momenti için,

$$M = -m_1 + Vx \pm Py \quad (5)$$

formülü elde edilir. Burada N>0'dır. Eksenel kuvvet basınç olması halinde N pozitif çekme durumu olması halinde eksi işaret olarak alınmıştır.

Diferansiyel denklemler sonucu eksenel kuvvetin basınç olması halinde oluşan genel denklemler

$$y = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x) + \frac{m_1}{P} - \frac{V}{P} x \quad (6)$$

şeklindedir.

Burada $\alpha^2 = \frac{P/EI}{(1-P/GA_s)}$ olarak tanımlanmıştır.

Yapılan tüm hesaplamalarda düğüm noktalarına dönel yaylarla bağlı ve uçlarında rijit bölgeler bulunan çubukların kayma deformasyonlarının etkisi de göz önünde tutularak, doğrusal olmayan analize ait eleman rijitlik matrisi etki katsayıları hesaplanmıştır.

i ve j uçlu çubuk elemanlarının rijitlik matrisi,

$$k = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \quad (7)$$

olduğuna göre aşağıdaki kısaltmalar yapılarak eksenel kuvvetin basınç olması halinde eleman rijitlik matrisinin etki katsayıları matris formunda verilmektedir. Eksenel kuvvetin çekme olması haline ait değerler Karacan (2011)'den temin edilebilir.

$$\psi = \alpha L, \quad \delta = 1 - N/GA_s, \quad \beta_1 = \frac{1}{4k_1}, \quad \beta_2 = \frac{1}{4k_2}$$

$$\chi_1 = \psi^3 \delta^2 \left\{ (1 - \psi^2 \beta_1 \beta_2) \sin \psi + \psi (\beta_1 + \beta_2) \cos \psi \right\}$$

$$\chi_2 = \psi^2 \delta (\psi \beta_2 \sin \psi - \cos \psi + 1)$$

$$\chi_3 = \psi^2 \delta (\psi \beta_1 \sin \psi - \cos \psi + 1)$$

$$\chi_4 = \psi \left\{ (1 + \psi^2 \delta \beta_2) \sin \psi - \psi \delta \cos \psi \right\} \quad (8)$$

$$\chi_5 = \psi (\psi \delta - \sin \psi)$$

$$\chi_6 = \psi \left\{ (1 + \psi^2 \delta \beta_1) \sin \psi - \psi \delta \cos \psi \right\}$$

$$\Omega = \psi \left\{ \delta (\psi^2 \beta_1 \beta_2 - 1) + \beta_1 + \beta_2 \right\} \sin \psi - \left\{ 2 + \psi^2 \delta (\beta_1 + \beta_2) \right\} \cos \psi + 2$$

$$k_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI\chi_1}{L^3\Omega} & \frac{EI\chi_2}{L^2\Omega} \\ 0 & \frac{EI\chi_2}{L^2\Omega} & \frac{EI\chi_4}{L\Omega} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$k_{ji} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI\chi_1}{L^3\Omega} & -\frac{EI\chi_2}{L^2\Omega} \\ 0 & \frac{EI\chi_3}{L^2\Omega} & \frac{EI\chi_5}{L\Omega} \end{bmatrix} \quad (10)$$

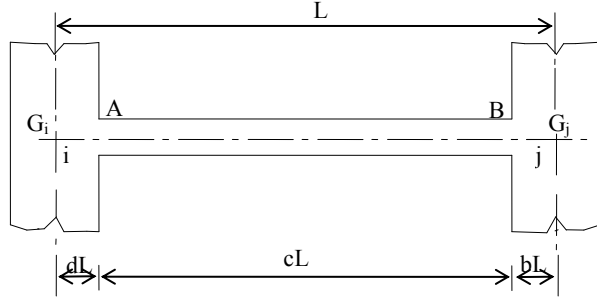
$$k_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI\chi_1}{L^3\Omega} & \frac{EI\chi_3}{L^2\Omega} \\ 0 & \frac{EI\chi_2}{L^2\Omega} & \frac{EI\chi_5}{L\Omega} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$k_{jj} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI\chi_1}{L^3\Omega} & -\frac{EI\chi_3}{L^2\Omega} \\ 0 & -\frac{EI\chi_3}{L^2\Omega} & \frac{EI\chi_6}{L\Omega} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Sonsuz rijit kısımları bulunan çubukların ikinci merteye teorisine ait birim deplasman sabitleri

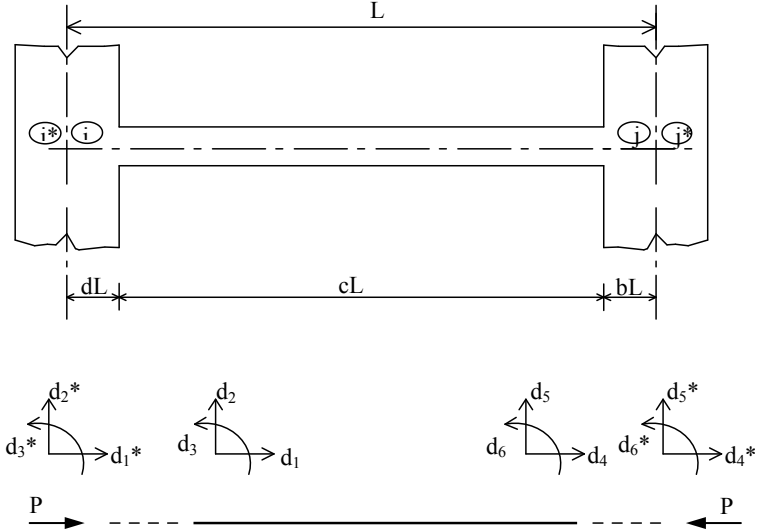
Boşluklu perdeler, bağlantı kirişi eksenleriyle perde eksenlerinin oluşturduğu çerçeveler olarak idealize edilerek hesap yapılır. İdealize etmede, kirişlerin geniş perdeler, perdelerin de yüksek bağlantı kirişlerinin içinde kalan bölgeleri sonsuz rijit olarak alınmaktadır. Bundan başka

kirişleri çok yüksek olan çerçevelerin kolonları da benzer durumdadır. Bu tür çerçeve hesaplarının yapılabilmesi için bir veya iki tarafında sonsuz rijit kısımları bulunan doğru eksenli çubukların eleman rijitlik matrisinin tayininde birim deplasman sabitlerinin bilinmesine gerek duyulmaktadır.



Şekil 4 Perde duvarları arasında bir bağ kirişi

Şekil 4.'de görülen i ve j perdeleri bağlantı i ve j uçları, perde kesitlerinin G_i ve G_j ağırlık kirişleriyle birbirine bağlanmışlardır. Bu kirişin merkezlerinin üzerindedir.



Şekil 5 Boşluklu perdelerin uç deplasmanları

Burada L kirişin $i^* j^*$ açıklığını, cL kirişin ij açıklığını, dL ve bL ise kirişin perdeye saplandığı noktadan perde eksenine olan mesafenin L cinsinden ifadelerini göstermektedir.

Kirişin perde içerisindeki kısmı sonsuz rijit olduğundan perde eksenindeki dönme ile bağ kirişinin perdeye saplandığı noktadaki dönme birbirine eşit olacaktır. Benzer şekilde, yatay yönde rijit kısım boy değişimi yapmadığından yatay deplasmanlar da eşit olurlar.

$i^* j^*$ çubuğunun eleman rijitlik matrisi simetrik olup ij çubuğu eleman rijitlik matrisinden farklı olan elemanları Şekil 5. yardımıyla,

$$k_{33}^* = k_{33} + k_{23}(dL) + k_{22}(dL)^2 + k_{32}(dL) - P(dL) \quad (13a)$$

$$k_{32}^* = k_{32} + k_{22}(dL) = -k_{53}^* \quad (13b)$$

$$k_{63}^* = k_{63} + k_{53}(dL) + k_{62}(dL) + k_{52}(dL)(bL) \quad (13c)$$

$$k_{62}^* = k_{62} - k_{52}(dL) = -k_{65}^* \quad (13d)$$

$$k_{66}^* = k_{66} + k_{56}(bL) + k_{55}(bL)^2 + k_{65}(bL) - P(bL) \quad (13e)$$

olarak elde edilir.

O halde bağ kirişinin birim deplasman sabitleri, yukarıdaki eşitliklerde ij çubuğunun birim deplasman sabitleri yerine konularak bulunabilir (Yukarıdaki eşitlikler P yerine sıfır değer vermek suretiyle doğrusal analiz için de geçerlidir.). Normal kuvvetin çekme olması halinde denklemlerdeki P işaret değiştirir.

Sayısal sonuçlar

Hazırlanan bilgisayar programı ile örnek bir problem çözülerek veriler ve çıktılar tablolar halinde verilmiştir.

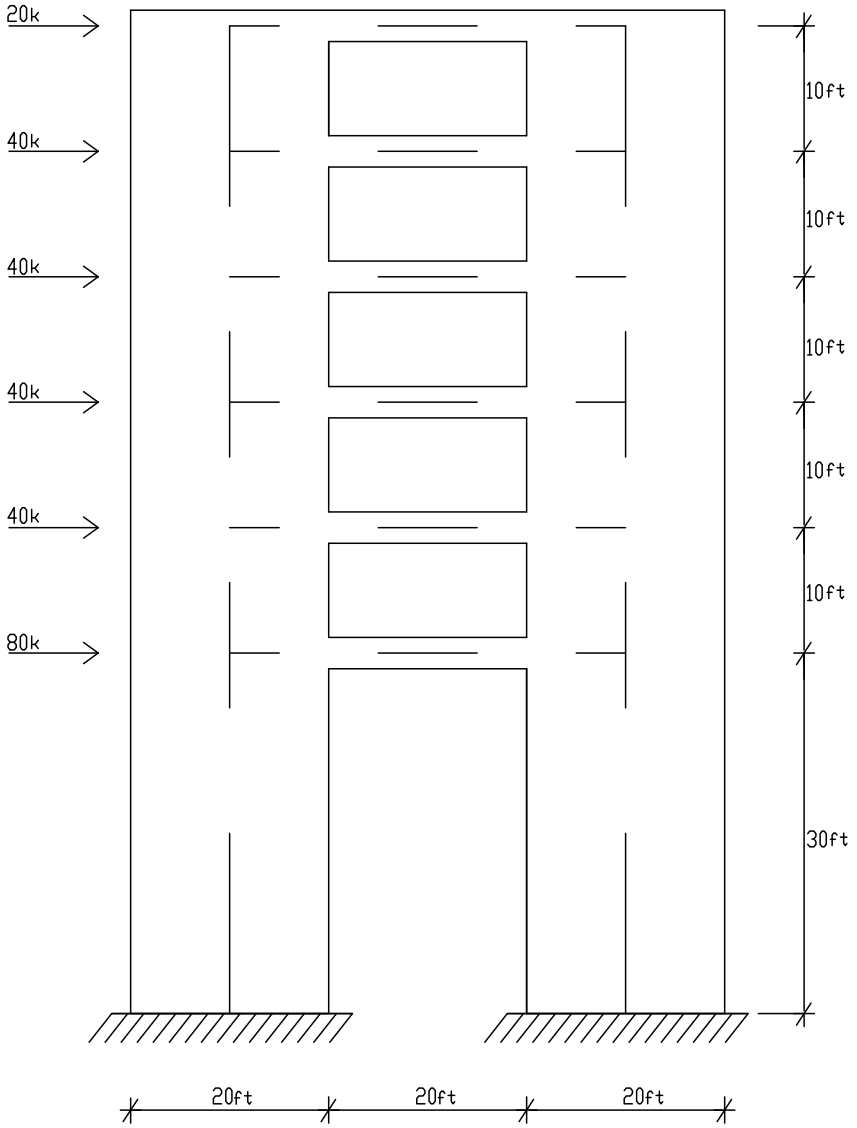
Bu örnek, Girijavallabhan (1969), Popov ve ark. (1979), tarafından sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür (Şekil 6).

Girijavallabhan (1969), direk sonlu elemanlar yöntemi ile çözdüğü modelde 918 düğüm noktası ile 1568 eleman kullanmıştır. Popov ve ark. (1979), aynı problemi yeni sonlu elemanlar yöntemi ile program SUBWALL'u kullanarak 264 eleman göz önüne almışlardır. Dinçer (1989), ve bu çalışmada sadece 18 eleman üzerinden çözüm yapılmıştır. Sistem kodlama durumu Şekil 7'de gösterilmiştir.

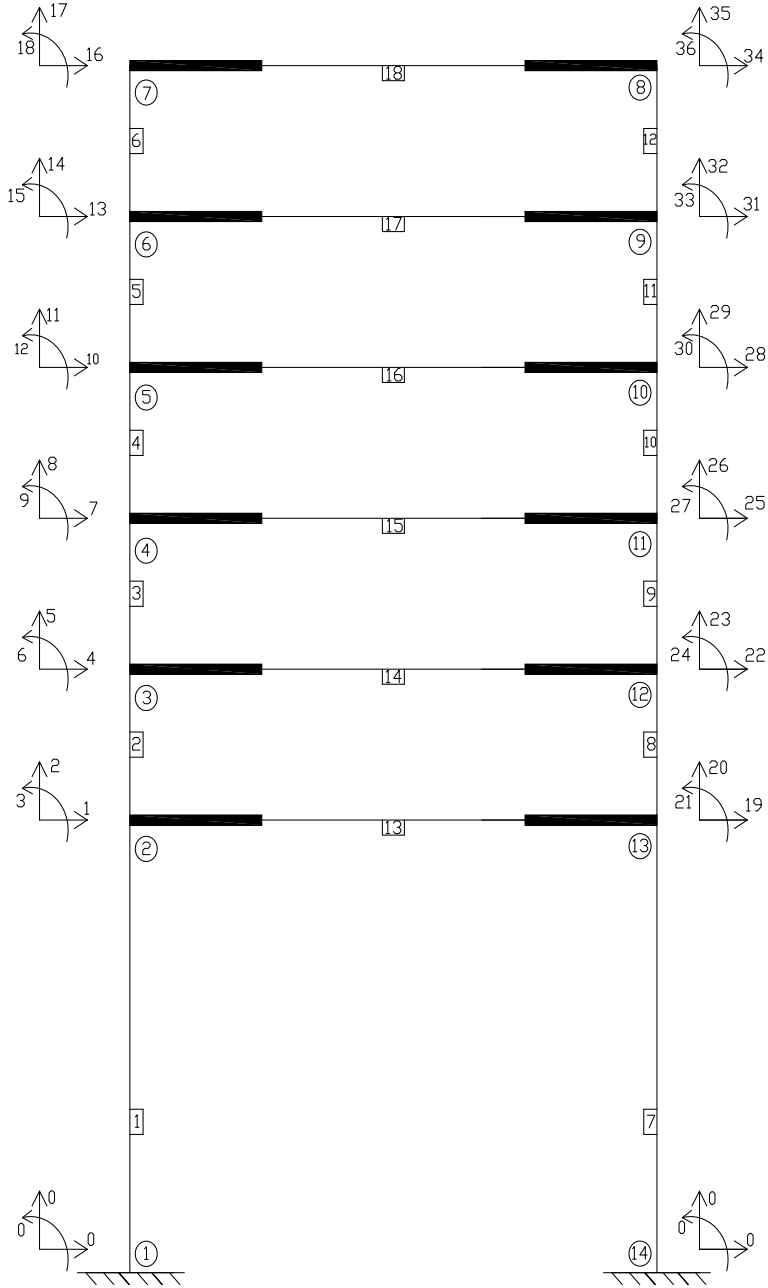
Aynı örnek, malzemenin elastisite modülü artırılarak çözülmüştür. Elastisite modülünün artırılmasıyla, iç kuvvetlerin eğilme momentlerine katkılarıyla elemanın rijitliğine etki etmesi, dolayısıyla analizin nonlineer olması sağlanmıştır. Eleman kesit özellikleri, eleman uçlarındaki rijit bölge uzunlukları ve kod numaraları aynıdır. Örnek, kayma şekil değiştirmeleri ihmal edilerek ($v=0$) çözülmüş ve birinci iterasyon (doğrusal çözüm) sonucunda bulunan kesit tesirleri, üçüncü iterasyon (doğrusal olmayan çözüm) sonucunda bulunan kesit tesirleri, aynı örnek kayma şekil değiştirmeleri göz önüne alınarak ($v=0.15$) çözülmüş ve aynı sayıda iterasyon sonucunda bulunan kesit tesirleri Tablo 1 ile bağ kirişlerinin uç momentleri karşılaştırma kolaylığı bakımından özetlenmiştir. Tablo 1'in incelenmesi sonucu, kayma deformasyonları göz önüne alınarak eksenel kuvvetlerin ara momentlerine katkılarıyla yapının rijitlik matrisinin yük düzeyine bağlı olarak değiştiği gözlenmiştir.

Yapının rijitlik matrisine olan bu katkılar, malzemenin elastisite modülü ile yapı elemanlarının mesnetleniş şekli ve atalet momentlerine bağlı olarak yapının rijitlik matrisinin yük düzeyine bağlı olarak değişmesinden dolayı ihmal edilemeyecek boyutlarda olabilir.

Kesme kuvvetini hesaba katarak uçlarında rijit bölgeler bulunan elastik bağlı çerçevelerin nonlineer analizi



Şekil 6. Örnek problemin yükleme durumu



Şekil 7. Örnek problemin kodlama durumu

Tablo 1. Örnek probleme ait bağ kirişlerinin uç momentlerinin karşılaştırılması.

Bağ kirişi no	Eleman uç momentleri (kip-ft)							
	Doğrusal $v = 0$		Doğrusal $v = 0.3$		Doğrusal olmayan $v = 0$		Doğrusal olmayan $v = 0.3$	
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
13	63.44	63.06	62.00	61.76	59.96	59.73	57.66	57.53
14	70.80	70.70	69.29	69.25	66.21	66.15	64.51	64.48
15	74.34	74.39	72.83	72.90	69.60	69.63	68.21	68.24
16	75.26	75.43	73.80	73.94	71.05	71.15	69.72	69.81
17	74.79	75.03	73.37	73.59	71.53	71.69	70.16	70.30
18	74.10	74.38	72.73	72.97	72.01	72.22	70.74	70.92

Not: 1 ft = 304.8 mm; 1 kip = 4.44822 kN; 1 kip-ft = 1.35582 kNm

Sonuçlar ve öneriler

Bu çalışmada, uçlarında sonsuz rijit kısımları bulunan ve düğüm noktalarına dönel yaylarla bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin statik analizinde geometrik nonlineerlik incelenmiştir. Analizde kayma şekil değiştirmeleri de göz önüne alınmıştır. Hazırlanan bilgisayar programı ile geometrik doğrusal olmayan analizin, gerçek çözüme çok yakın sonuçlar veren rijitlik matrisi yöntemi kullanılması ile, kişisel bilgisayarlarla yapılabileceği anlaşılmıştır.

İki boyutlu ince yapı elemanlarındaki düzlem içi kuvvetler belirli bir düzeyin altında kaldıkları sürece sistemin doğrusal davranışını bozmazlar. Ancak malzemenin elastisite modülü ile yapı elemanlarının mesnetleniş şekli ve atalet momentlerine bağlı olarak yük belirli bir düzeye çıkınca iç kuvvetler eğilme momentlerine katkıları nedeniyle yapı elemanlarının rijitliğine etki ederek analizin nonlineer olmasına neden olmaktadır.

Yapılan çalışmada uçlarında sonsuz rijit kısımları bulunan ve dönel yaylarla bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin değişik yay katsayıları ile çözümlü karşılaştırılmasıyla aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkmıştır.

- Yay katsayıları büyüdükçe uç momentler büyümekte, buna karşılık açıklık momenti küçülmektedir.

- Yay katsayıları büyüdükçe, sistem deplasmanları küçülmekte, yay katsayıları limit olarak sonsuz büyük değerler aldığı zaman sistem her yayla bağlı noktada rijit bağlanmış gibi davranmaktadır.
- Sistemdeki yay katsayıları küçüldükçe, sistem deplasman değerleri büyümektedir. Yay katsayılarının sıfır limit değere varması durumunda sistem yay bulunan noktalarda mafsalla bağlanmış gibi davranmaktadır.
- Boşluklu perdelerin analizinde bağ kirişleri yeterince narin ise tüm sistemi çubuklardan oluşan çerçeve olarak ele almak ve bağ kirişlerinin perde duvarlar içine rastlayan kısımlarının tümüyle rijit oldukları varsayımıyla yapılan analiz ile iki boyutlu elastisiteden bulunan sonuçlara çok yakın sonuçlar elde edilmektedir.

Ayrıca bazı hallerde, yapı elemanlarının kesit yükseklikleri, açıklıklarının yanında oldukça büyük değerler aldığı kayma şekil değiştirmelerinin etkisi de önemli olmaktadır. Bunun yanında artan rijitlikleri nedeniyle doğrusal davrandıkları gözlenmiştir. Özellikle doğrusal olmayan analize gerek duyulan problemler, yüksek dayanımlı malzemeler ile yapılan narin yapılar ile ilgili problemlerdir.

Kaynaklar

- Ackroyd, MR. ve Gerstle, K.H., (1983). Elastic stability of flexibly connected frames, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, **109**, 1, 241-245.
- Aksogan, O., Akavcı, S.S. ve Görgün, H., (2005). Analysis of frames with flexible connections, *Çukurova Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, **20**, 1, 1-11.
- Aksogan, O. ve Akkaya, F., (1991). A Computer program for the analysis of flexibly connected frames, *Çukurova Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, **6**, 2, 25-41.
- Aksogan, O. ve Dinçer, R., (1991). Nonlinear analysis of planar frames with linear prismatic members having rigid end sections taking shear deformation into consideration, *Çukurova Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, **6**, 1, 125-137.
- Aksogan, O. ve Görgün, H., (1993). The nonlinear analysis of planar frames composed of flexibly connected members, *Çukurova Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, **8**, 2, 117-129.
- Aziznamini, A. ve Radzinski, J.B., (1989). Static and cyclic performance of semi-rigid steel beam-to-column connections, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, **115**, 12, 2979-2999.
- Cunningham, R., (1990). Some aspects of semi-rigid connections in structural steelwork, *The Structural Engineer*, **68**, 5, 85-92.
- Girijavallabhan, C.V., (1969). Analysis of shear wall openings. *Journal of Structural Division*, ASCE, **95**(10): 2093-2103.
- Görgün, H. ve Yılmaz, S., (2008). The nonlinear analysis of planar frames composed of flexibly connected members taking shear deformations into consideration, *Çukurova Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, **23**, 1, 15-28.
- Karacan, S. S., (2011). Kesme kuvvetini hesaba katarak uçlarında rijit bölgeler bulunan ve düğüm noktalarına dönel yaylarla bağlı çubuklardan oluşan düzlemsel çerçevelerin nonlineer analizi. Yüksek lisans tezi, *DÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır*.
- Livesley, R.K., (1964). Matrix methods of structural analysis, Permagon Press, Inc., New York, N.Y.
- Monforton, A.R. ve Wu, T.S., (1963). Matrix analysis of semi-rigidly connected frames, *Journal of Structural Division*, ASCE, **89**, 13-42.
- Popov, E.P., Petersson, H., and Le, D.Q., (1979). Program Subwall, Finite element analysis of structural walls. *ACI Journal*, **76**, 30, 679-696.
- Romstad, K.M. ve Subramanian, C.V., (1970). Analysis of frames with partial connection rigidity, *Journal of Structural Division*, ASCE, **96**, 2283-2300.
- Stelmack, T.W., Marley, MJ. ve Gerstle, KR., (1986). Analysis and tests of flexibly connected steel frames, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, **112**, 7, 1573-1588.
- Yu, CR. ve Shanmugam, N.E., (1986). Stability of frames with semi-rigid joints, *Comput. Struct.*, **23**, 5, 639-648.