Electronic Letters on Science & Engineering 2(2) (2006) e-LSE
Available online at www.e-lse.org

A Study on Ramanujan Numbers

İsmihan Yusubov [1,*], Fevzullah Temurtaş [1], Uğur Erkin Kocamaz [1]
[1] Sakarya Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Sakarya, TÜRKİYE

Abstract: In this study, a relation between quartet elements related with Ramanujan numbers was determined and this relation was applied to reach to the big numbers inside a certain "chain". Additionally, the Ramanujan numbers obtained using natural numbers inside [1, 500] was studied in terms of various parameters.

Keywords: Ramanujan numbers, Hardy-Ramanujan numbers, Taxicap problem

Ramanujan Sayıları Üzerine Bir Çalışma

Özet: Bu çalışmada Ramanujan sayıları ile bağıntılı dörtlünün elemanları arasında var olan bir bağıntı tespit edilmiş ve belli bir "zincir" üzerinde olan büyük sayılara ulaşmak için uygulanmıştır. Ek olarak [1, 500] aralığındaki doğal sayıları kullanarak yapılan Ramanujan sayıları değişik parametreler açısından incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ramanujan sayıları, Hardy-Ramanucan sayıları, Taxicap problemi

Reference to this paper should be made as follows (bu makaleye aşağıdaki şekilde atıfta bulunulmalı):
I. Yusubov , F. Temurtas, U.E. Kocamaz, 'A Study on Ramanujan Numbers', Elec Lett Sci Eng , vol. 2(2), (2006), 1-7

1 Giriş

Ramanujan veya Hardy-Ramanucan sayıları [1-5] denilen doğal sayılar, genellikle iki doğal sayının küplerinin toplamı olarak, iki farklı şekilde gösterilebilen sayılara denir. Daha sonra üç ve daha fazla biçimde iki doğal sayının toplamı olarak gösterilebilen sayılar da bulunduğundan, doğal olarak bunlara iki kat, üç kat vs. gibi isimler takılabilir. En küçük iki kat Ramanujan sayısı 1729'dur ki, bunun hakkında da matematik folklorda "Taxicap problemi" adlı, gerçeğe benzer bir hadis dolaşmaktadır. Asıl olan o ki, $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ ve 1729'dan küçük sayıların hiçbiri bu özelliğe sahip değiller. İkinci iki kat Ramanujan sayısı 4104 olmakla, $4104 = 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$. [1, 500] aralığındaki sayıların yardımıyla yalnızca iki tane üç kat Ramanujan sayısı yapılabilir ki, onlar da $87539319 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 +414^3$ ve $119824488 = 11^3 + 493^3 = 90^3 +492^3 = 346^3 + 428^3$ sayılarıdır.

Dört kat Ramanujan sayısının ilki $6963472309248 = 2421^3 +19083^3 = 5436^3 +18948^3 = 10200^3 + 18072^3 = 13322^3 + 16630^3$ olmakla, sayıları 32'dir ve Wilson tarafından 1997'de bulunmuştur. Şimdiye kadar bulunmuş beş kat Ramanujan sayılarının sayısı altı tane olmakla, bunların küçüğü $48988659276962496 = 38787^3 +365757^3 = 107839^3 + 362753^3 = 205292^3 + 342952^3 = 221424^3 + 336588^3 = 231518^3 + 331954^3$ sayısıdır.

Şu anda altı kat Ramanucan sayısı olarak bildiğimiz tek sayı $8230545258248091551205888 = 11239317^3 + 201891435^3 = 17781264^3 + 201857064^3 = 63273192^3 + 199810080^3 = 85970916^3 + 196567548^3 = 125436328^3 + 184269296^3 = 159363450^3 + 161127942^3$ sayısıdır.

* *Corresponding author; Tel.: +(90) 535 8675633 , E-mail:iyusubov@sakara.edu.tr*

ISSN 1305-8614

Eğer (a,b,c,d) dörtlüsü $R = a^3 + d^3 = b^3 + c^3$ ve $a < b < c < d$ koşulunu sağlayan Ramanujan dörtlüsü ise, keyfi k doğal sayısı için (ka,kb,kc,kd) dörtlüsü de Ramanujan dörtlüsü olmakla k^3R Ramanujan sayısını oluşturuyor. Bunları ayırmak için asal ve türev Ramanujan terimleri kullanırız. Tabiî ki sayının asal olması, uygun dörtlünün aralarında asal olması ile sağlanıyor. Belirtelim ki, bu makalede biz yalnızca doğal sayılardan yararlanıyoruz.

Nihayet söylemek gerekiyor ki, bütün bu çalışmaların kaynağında, $x^3 + y^3 = z^3$ Diophant denkleminin [6] tam sayılar kümesinde çözümünün olmayacağı hakkındaki meşhur Fermat varsayımı, bir başka adıyla Fermatın Büyük Teoremi [6] durmaktadır. Bilindiği üzere bu varsayımın doğruluğu 1990 yıllarında Andrew Wiles tarafından ispatlandı. Ramanujan sayıları Hardy-Ramanujan denklemi [1-5] diyeceğimiz $x^3 + y^3 = z^3 + w^3$ denkleminin doğal sayılar kümesindeki (x_0, y_0, z_0, w_0) çözümüne bağlı olarak $R_0 = x_0^3 + y_0^3 = z_0^3 + w_0^3$ gibi bulunan sayılardır.

2 Hardy-Ramanujan denkleminin bazı özel çözümleri

Bu bölümde Hardy-Ramanujan denkleminin özel çözümlerini bulmak için yapılmış birkaç parametriksel formülleri inceleyelim. Önce Ramanujana mahsus iki teoremi [2] alalım.

*Teorem 1***.** m, n, p, k doğal sayıları

$$m^2 + mn + n^2 = 3kp^2 \tag{1}$$

koşulunu sağladığında

$$(m + k^2 p)^3 + (kn + p)^3 = (km + p)^3 + (n + k^2 p)^3 \tag{2}$$

eşitliği de sağlanıyor.

Not. Bu işlemlerde $m \neq n$ ve $k \neq 1$ olduğu varsayılmıştır. Her iki halde (2) eşitliği koşulsuz sağlanan özdeşliğe dönüşmektedir.

Teorem 2. a ve b keyfi doğal sayılar olduğunda

$$(a^2 + 7ab - 9b^2)^3 + (2a^2 - 4ab + 12b^2)^3 = (a^2 - 9ab - b^2)^3 + (2a^2 + 10b^2)^3 \tag{3}$$

özdeşliği sağlanıyor.

Not. $a = b$ olduğunda (3) eşitliği ilk Ramanujan dörtlüsü ile bağıntılı $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ sayısal eşitliğe dönüşür.

Hardy ve Wright [7] ispat etmişler ki, keyfi n için, iki sayının küplerinin toplamı olarak n değişik biçimde gösterilebilen sayı mevcuttur. İspat yapısal olmakla, istenen özelliğe sahip sayıyı bulmamızı sağlıyor. Örneğin iki kat Ramanujan sayısını bulmak için bu teoremin versiyonu:

<u>*Teorem 3.*</u> r ve s rasyonel sayılar olmakla t,u,v,w sayılarını

$$t=\frac{r(r^3+2s^3)}{r^3-s^3},\ u=\frac{s(2r^3+s^3)}{r^3-s^3},\ v=\frac{t(t^3-2u^3)}{t^3+u^3},\ w=\frac{u(2t^3-u^3)}{t^3+u^3} \tag{4}$$

gibi tanımlarsak, bunlar arasında

$$r^3+s^3=t^3-u^3=v^3+w^3 \tag{5}$$

özdeşliği sağlanıyor.

Bu teoremin yardımıyla bulunan Ramanujan sayıları genelde çok büyük oluyorlar. Örneğin $r=3,\ s=1$ alırsak (4) formüllerine göre

$$t=\frac{87}{26},\ u=\frac{55}{26},\ v=\frac{28340511}{21446828},\ w=\frac{63284705}{21446828} \tag{6}$$

olarak bulunur ve buna göre (5) eşitliğini uygularsak

$$3^3+1^3=\frac{(28340511)^3}{(21446828)^3}+\frac{(63284705)^3}{(21446828)^3} \tag{7}$$

veya

$$(3.21446828)^3+(21446828)^3=(28340511)^3+(63284705)^3 \tag{8}$$

olmakla Ramanujan dörtlüsünü buluruz. Bu dörtlüye uygun sayı ise

$$R = 276214986237148421555456 \tag{9}$$

yani sözle ifade edersek, 276 seksilyon 214 kentilyon 986 katrilyon 237 trilyon 148 milyar 421 milyon 555 bin 456 olmakla çok büyük bir sayıdır göründüğü gibi.

$r=5$ ve s = 1 alırsak (8)'e uygun eşitliği sağlayan dörtlü 33 basamaklı Ramanujan sayısı oluşturmaktadır.

3 Ramanujan dörtlüsü arasında olan bir bağıntı üzerine

Bu bölümde Ramanujan dörtlüsü arasında olan bir bağıntı ve onun uygulamasını ele alacağız. Önce aşağıdaki lemmayı ispat edelim.

<u>*Lemma.*</u> x,y,k,l doğal sayılar olduğunda

$$x^3-y^3=6l \Leftrightarrow x-y=6k \tag{10}$$

çifte gerektirmesi doğrudur.

<u>*İspat.*</u> Sağdan sola gerektirme açık olduğundan, soldan sağa gerektirmeyi alalım. $x > y$ koşulunda, $xy(x-y) = 2p$ doğal çift sayı olduğundan, (10)'un sol tarafını da göz önünde bulundurursak

$$(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = 6l - 3.2p = 6(l-p) = 6q,\ q \in N \tag{11}$$

olduğunu buluruz. Öte yandan küpü 6'ya bölünen sayının kendisi de 6'ya bölündüğünden $x - y = 6k,\ k \in R$ ve lemmanın ispatı tamamlanıyor.

<u>*Teorem 4.*</u> $m < n < a < b$ $(*)$ koşulunu sağlayan doğal sayılar için, $m^3 + b^3 = n^3 + a^3$ (**) ise,

$$(n-m) - (b-a) = 6k \quad (k \in N) \tag{12}$$

<u>*İspat.*</u> (**)'dan

$$n^3 - m^3 = b^3 - a^3 \tag{13}$$

veya

$$(n-m)^3 + 3mn(n-m) = (b-a)^3 + 3ab(b-a) \tag{14}$$

olduğunu buluruz. Buradan

$$(n-m)^3 - (b-a)^3 = 3[ab(b-a) - mn(n-m)] \tag{15}$$

Şimdi, (13)'e göre

$$(n-m)(n^2 + mn + n^2) = (b-a)(a^2 + ab + b^2) \tag{16}$$

ve (*) şartına göre

$$n^2 + mn + n^2 < a^2 + ab + b^2 \tag{17}$$

olduğundan (16)'ya göre

$$n - m > b - a \Rightarrow (n-m)^3 > (b-a)^3 \tag{18}$$

olmak zorundadır ki, buradan da (15)'e göre

$$ab(b-a) - mn(n-m) > 0 \tag{19}$$

olur. Öte yandan keyfi *x*, *y* doğal sayıları için $xy(x-y)$'nin çift sayı olduğu açık. O halde

$$ab(b-a) - mn(n-m) = 2l \quad (l \in N) \tag{20}$$

ve nihayet (15)'ten

$$(n-m)^3 - (b-a)^3 = 6l \quad (l \in N) \tag{21}$$

olduğu bulunur ve yukarıdaki lemma ispatı tamamlanır.

Sonuç. Teoreme göre

$$n-m=(b-a)+6l>6l \quad (l\in N) \tag{22}$$

yani, *n-m* farkının en azından 7 olması lazım.

Uygulama. $(n-m)-(b-a)=6$ koşulunu sağlayan Ramanujan dörtlülerini bulmaya çalışalım. $n-m=7$ alırsak, $b-a=1$ oluyor. Buna göre $m^3+b^3=n^3+a^3$ eşitliğinin veya

$$(n-m)^3+3mn(n-m)=(b-a)^3+3ab(b-a) \tag{23}$$

eşitliğinin sağlanması için $7^3+21m(m+7)=1+3a(a+1)\Rightarrow 342+21m(m+7)=3a(a+1)\Rightarrow$ $113+7m(m+7)=a(a+1)\Rightarrow a^2+a-[114+7m(m+7)]=0$ kare denkleminin sağlanması şart. Bu denklemin diskriminantı $D(m)=1+4[114+7m(m+7)]=457+28m(m+7)$ tek sayının karesi olduğunda, $n=m+7,\ a=(-1+\sqrt{D(m)})/2,\ b=a+1$ olarak bulunur ve bunlar bu koşulu sağlayan Ramanujan dörtlülerinin bir "zincirini" oluşturur. Bunlara uygun olan sayılar da Ramanujan sayıları zincirini oluşturur doğal olarak. Bu formülün ve bilgisayarın desteği ile aşağıdaki 11 sayı bulunabilmiştir:

m	$D(m)$	$\sqrt{D(m)}$	*R*-dörtlüsü	*R*-sayısı
2	961	31	(2, 9,15,16)	4104
9	4489	67	(9, 16, 33, 34)	40033
17	11881	109	(17, 24, 54, 55)	71288
42	58081	241	(42, 49, 120, 121)	1845649
87	229441	479	(87, 94, 239, 240)	14482503
197	1125721	1061	(197, 204, 530,531)	157366664
324	3003289	1733	(324, 331, 866, 867)	685 726587
722	14737921	3839	(722, 729, 1919, 1920)	7454255048
1439	58262689	7633	(1439, 1446, 3816, 3817)	58591507032
3192	285914281	16909	(3192, 3199, 8454, 8455)	636945650263
5216	762809161	27619	(5216, 5223, 13809, 13810)	2775699258696

Analoji olarak $n-m=33$'e kadar mümkün olan zincirler oluşturulmuştur. Doğal olarak $D(m)$'in tam kare olamadığı durumlarda zincirlerin halkalar kümesi boş olmuştur. Örneğin $n-m=30$ olduğunda, $D(m)=5232+20m(m+30)$ olmakta, son rakamı 2 olduğuna göre tam kare olamıyor ve uygun zincirin halkası bulunmuyor.

4 Ramanujan(R) sayılarının değişik parametrelere göre incelenmesi

4.1 [1, 500] aralığındaki doğal sayı dörtlüleriyle bağıntılı Ramanujan(R) sayılarının incelenmesi

Çalışmanın bu kısmında bilgisayar yardımıyla karşılaştırma yöntemi ile R-sayıları bulunmuştur. Bu zaman dörtlüleri oluşturmak için [1, 500] aralığındaki doğal sayılar kullanılmış ve toplam

565 tane R-sayısı bulunmuştur ki, bunlardan da 4 tanesi tekrarlanandır. Bu tekrarlanma ise 3-kat R-sayıları ile bağlı olmuştur ve bu aralıktaki sayılardan sadece 2 tane 3-kat R-sayısı yapılabilir ki, bunlar da

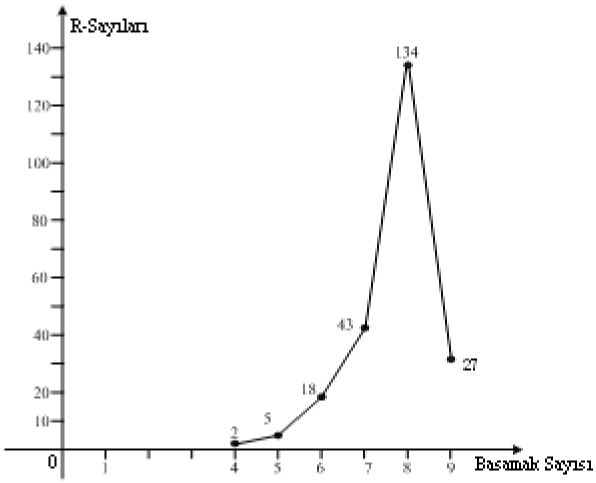
$$\begin{aligned} 87539319 &= 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3 \\ 119824488 &= 11^3 + 493^3 = 90^3 + 492^3 = 346^3 + 428^3 \end{aligned} \qquad (24)$$

sayılarıdır. Sonuç olarak, bu aralıktaki sayılardan küplerin toplamı olarak yapılan değişik R-sayılarının sayısı 561 tanedir. Fakat bu sayılardan bazıları diğer sayıların k^3 katları olmakla türev R-sayılarıdırlar ve bunlara uygun olan dörtlüler de aralarında asal değillerdir. Asal R-sayıların sayısı 229'dur ve incelenme için onlar esas alınmıştır.

4.2 Asal Ramanujan sayıları kümesinin incelenmesi ve sonuçları

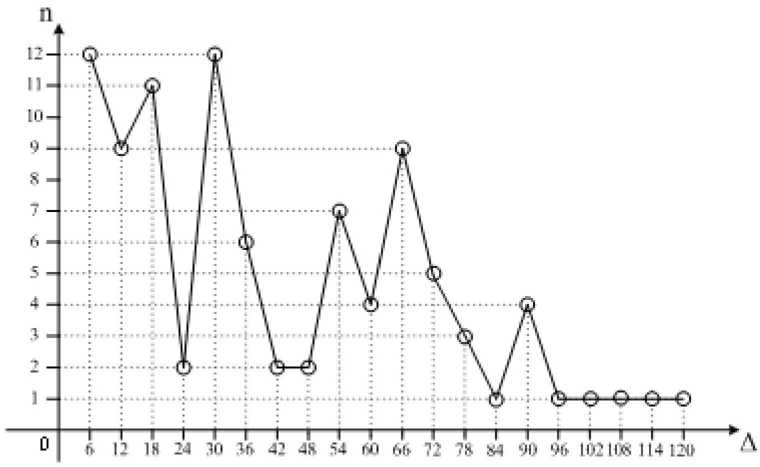
[1, 500] aralığındaki doğal sayılar araçlığıyla yapılabilen asal R-sayılarının listesi incelenerek aşağıdaki sonuçlara varılmıştır:

En çok olarak 8 basamaklı sayı (134 tane) bulunmuştur ki, bu da [1, n] aralığına bağlı maksimum sayıya uygun basamak için $m_0(n) = \max_{bas} = [\sqrt[3]{n}] + 1$ formülünün doğru olacağı varsayımına yol açmıştır. Burada $[a]$ ile a'nın tam kısmı işaret olunmuştur. Dolayısıyla m basamaklı R-sayılarının sayısını $S_R(m)$'le işaret edersek, bu fonksiyon $[4, m_0]$ aralığında artan, sonra azalandır. Artma ivmeli, azalma ise ani oluyor. Bunun dışında $7^3 = 343 = 500 - 157$ ve $9^3 = 729 = 500 + 229$ olduğundan, yani 7^3 sayısı 500'e daha yakın olduğundan $S_R(7) > S_R(9)$ olması doğaldır (Şekil 1).



Şekil 1. Basamak sayısına göre R-sayılarının dağılımı

İkinci inceleme ise [1, 250] aralığına uygun R-sayılarının $\Delta = (n-m)-(b-a) = 6l$ $(l \in N)$ farkına göre dağılımı ile bağıntılıdır. Uygun fonksiyonun grafiği Şekil 2'de gösterilmiştir. Grafikten de göründüğü gibi maksimum noktaları esasen $\Delta_k = 6(2k+1)$ noktalarına denk geliyor. En büyük değer olan 12'ye ise iki noktada $\Delta_0 = 6$ ve $\Delta_2 = 30$ noktalarında ulaşılıyor.



Şekil 2. Δ farkına göre R-sayılarının dağılımı

Teşekkürler

Bilgisayar ortamındaki grafik çizimlerindeki yardımlarından ve ilgilerinden dolayı Arş.Gör. Özgür Çiftçi'ye ve Arş. Gör. Ali Gülbağ'a teşekkür ederiz.

References (Referanslar)

1. İ. Yusubov, Hayranlık Duyduğumuz Bir Matematikçi: Ramanujan, Bilim ve Ütopya, Haziran (2003), 36-41.

2. http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquations3rdPowers.html, (2006).

3. G. H. Hardy, Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work, 3rd ed., New York, Chelsea, (1999).

4. G. E. Andrevs, An Introduction to Ramanujan's "Lost" Notebook, Amer. Math. Monthly 86, (1979), 89-108.

5. B. C. Berndt, R. A. Rankin, Ramanujan: Letters and Commentary, Providence Rhode, Island, (1995).

6. İ. Yusubov, M. Panahov, Lineer Cebir ve Sonlu Boyutlu Lineer Operatörler Teorisinin Elemanları, Sakarya Kitapevi, Sakarya, (2004).

7. G. H. Hardy, E. M. Wright, An Intoduction to the Theory of Numbers, 5th ed., Oxford, England, Clarendon Press, (1979).