SAKARYA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ
SAKARYA UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE

e-ISSN: 2147-835X
Dergi sayfası: http://dergipark.gov.tr/saufenbilder

Geliş/Received 07.01.2017
Kabul/Accepted 28.03.2017

Doi 10.16984/saufenbilder.278071

Bazı sabit nokta yineleme yöntemlerinin yakınsama davranışlarının incelenmesi

Faik Gürsoy[1*]

ÖZ

Bazı sabit nokta yineleme yöntemlerinin, belirli bir büzülme şartını sağlayan operatörlerin sınıfından seçilen elemanların karakterlerine bağlı olarak farklı yakınsama davranışları sergiledikleri nümerik bir örnek verilerek gösterilecektir.

Anahtar Kelimeler: konveks ve hiperbolik metrik uzaylar, yakınsaklık, yineleme metotları

Investigation of convergency behaviors of some fixed point iteration methods

ABSTRACT

It will be shown by providing a numerical example that some fixed point iteration methods exhibit different convergency behaviors depending on the characters of the members chosen from a class of operators satisfying a certain contractive condition. [*]

Keywords: convex and hyperbolic metric spaces, convergence, iteration methods

[*] Sorumlu Yazar / Corresponding Author
1 Adıyaman Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü – faikgursoy02@hotmail.com

1. BAZI YİNELEME YÖNTEMLERİ VE BÜZÜLME-TİPLİ DÖNÜŞÜMLER SINIFI (SOME ITERATION METHODS AND CLASS OF CONTRACTIVE-LIKE OPERATORS)

1970 yılında, Takahashi [1] bir (M,d) metrik uzayında konvekslik kavramını aşağıdaki şekilde tanımladı:
Eğer her $u,u_1,u_2 \in C$ ve $\eta \in [0,1]$ için

$$d\big(u,W(u_1,u_2,\eta)\big) \leq \eta d(u,u_1) + (1-\eta)d(u,u_2) \quad (1)$$

şartı sağlanıyorsa $W\colon M^2 \times [0,1] \to M$ dönüşümüne M' de bir konvekslik yapısı denir.

C, M konveks metrik uzayının bir boş olmayan alt kümesi olsun. Eğer her $u_1,u_2 \in M$ ve $\eta \in [0,1]$ için $W(u_1,u_2,\eta) \in C$ ise bu durumda C' ye konvekstir denir.

M' deki W konvekslik yapısı tanımından, her $u,u_1,u_2 \in M$ ve $\eta \in [0,1]$ için

$$d\big(u,W(u_1,u_2,\eta)\big) \geq (1-\eta)d(u,u_2) - \eta d(u,u_1) \quad (2)$$

olduğu açıktır [2].

Kohlenbach [3] konveks metrik uzay kavramına aşağıdaki şartları ekleyerek "hiperbolik metrik uzay" kavramını tanıttı: her $u_1,u_2,u_3,u_4 \in M$ ve $\eta,\eta_1,\eta_2 \in [0,1]$ için

$$d\big(W(u_1,u_2,\eta_1),W(u_1,u_2,\eta_2)\big) = |\eta_1-\eta_2|\eta d(u_1,u_2), \quad (3)$$
$$W(u_1,u_2,\eta) = W(u_2,u_1,1-\eta), \quad (4)$$
$$d\big(W(u_1,u_3,\eta),W(u_2,u_4,\eta)\big) \leq \eta d(u_1,u_2) + (1-\eta)d(u_3,u_4). \quad (5)$$

Normlu uzaylar ve alt uzayları birer konveks metrik uzay olmalarının yanı sıra hiperbolik metrik uzaylara da birer örnek teşkil ederler. Hiperbolik metrik uzaylar konveks metrik uzayların alt uzaylarıdırlar (bkz. [3], [4]). $CAT(0)$ uzayı konveks metrik uzaylara önemli ve ilginç bir örnek teşkil eder [5].

Temel bilimlerin ve mühendisliğin birçok dalında ortaya çıkan doğrusal ve doğrusal olmayan problemler aşağıdaki gibi verilen bir sabit nokta denklemi ile modellenebilirler:

$$Tx = x, \quad (6)$$

burada X boş olmayan bir küme ve $T\colon X \to X$ bir operatördür.

(6) ile verilen denklemlerin bazı durumlarda (bilhassa doğrusal olmayan denklemler olmaları durumunda) analitik yöntemlerle çözümlerinin bulunması çok zor olmakta hatta mümkün olmamaktadır. Bu gibi durumlarda, sabit nokta yineleme metotları bu tür denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde etkin bir biçimde kullanılmaktadırlar. Bu bağlamda, araştırmacılar tarafından çok sayıda sabit nokta yineleme metotları tanıtılmış ve bu metotlar çeşitli matematiksel yapılar çerçevesinde yakınsaklıkları, yakınsaklıklarının denklikleri, yakınsaklık hızları, kararlılıkları, veri bağlılıkları, v.b. özellikleri bakımından detaylı bir şekilde incelenmişlerdir (bkz. [6], [7], [8], [9], [10], [11]).

C, M konveks metrik uzayının bir boş olmayan konveks alt kümesi, $T\colon C \to C$ bir operatör ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1]$ belirli kontrol şartlarını sağlayan diziler olsunlar.

En meşhur sabit nokta yineleme yöntemi Picard veya Richardson veya ardışık yaklaşımlar metodu olarak bilinir ve aşağıdaki formülasyonla verilir: verilen bir $x_0 \in C$ için

$$x_{n+1} = Tx_n, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

(7) ile verilen yineleme metodu, her $x,y \in C$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \delta d(x,y), \delta \in [0,1[, \quad (8)$$

şartını sağlayan ve büzülme dönüşümleri olarak adlandırılan dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamada başarılı bir şekilde kullanılmıştır. Bununla birlikte, (7) ile verilen yineleme metodu aynı başarıyı, her $x,y \in C$ için

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y), \quad (8)$$

şartını sağlayan ve genişlemeyen dönüşümler olarak adlandırılan dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamada gösterememektedir. Örneğin, $T\colon[0,1] \to [0,1]$ dönüşümü $Tx = 1-x$ olarak alınırsa, bu durumda T dönüşümü sabit noktası $x = \frac{1}{2}$ olan bir genişlemeyen dönüşümdür. Bu durumda bir $x_0 \neq \frac{1}{2}$ başlangıç noktası için, (7) ile verilen yineleme metodu $\{x_0, 1-x_0, x_0, 1-x_0, \cdots\}$ şeklinde x_0 ve $1-x_0$ noktaları arasında salınım yapan bir dizi üretir. Böylece, bir genişlemeyen dönüşüm bir sabit noktaya sahip olduğunda, bu sabit noktaya yaklaşmak için kullanılmak üzere başka yineleme metotlarına ihtiyaç duyulmuştur. Bu problemi çözmek için, 1953 yılında W. R. Mann [12] aşağıdaki yineleme yöntemini tanımladı: verilen bir $x_0 \in C$ için

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

1974 yılında, Shiro Ishikawa [13] aşağıdaki formda verilen yineleme yöntemini tanımladı: verilen bir $x_0 \in C$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T y_n, \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n) T x_n, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{10}$$

2000 yılında, M. A. Noor [14] genel varyasyonel eşitsizliklerin çözümlerine yakınsamada kullanmak üzere aşağıdaki yineleme metodunu tanımladı: verilen bir $x_0 \in C$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T y_n, \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n) T z_n,, \\ z_n = \gamma_n x_n + (1-\gamma_n) T x_n, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{11}$$

Son zamanlarda, Chugh ve diğ. [7] konvekslik yapısını kullanarak aşağıdaki formda verilen genel bir kapalı yineleme metodu tanımladılar: verilen bir $x_0 \in C$ için

$$\begin{cases} x_n = W(y_{n-1}, T x_n, \alpha_n), \\ y_{n-1} = W(z_{n-1}, T y_{n-1}, \beta_n), \\ z_{n-1} = W(x_{n-1}, T z_{n-1}, \gamma_n), n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{12}$$

(12)' de her n ∈ ℕ için $\gamma_n = \beta_n = 1$ olarak alınırsa, bu durumda Ćirić ve diğ. [15] tarafından tanımlanan ve

$$x_n = W(x_{n-1}, T x_n, \alpha_n), n \in \mathbb{N} \tag{13}$$

ile verilen iyi bilinen kapalı Mann yineleme metodu elde edilir.

1.1. İki Yineleme Metodunun Yakınsaklık Hızlarının Karşılaştırılması (Comparing Rate of Convergence Between Two Iteration Methods)

Chugh ve diğ. [7], (12) ile verilen yineleme metodunu kullanarak, Olatinwo [16] tarafından tanımlanan ve aşağıdaki şartı sağlayan büzülme-tipli dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsama sonucu inşa ettiler:

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + \varphi\big(d(x, Tx)\big), \tag{14}$$

olacak şekilde bir $\delta \in [0,1[$ ve $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan monoton artan bir $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu mevcuttur.

Sabit nokta yineleme metotlarının çalışılmasında yakınsaklık hızlarının karşılaştırılması hem teorik hem de pratik açıdan büyük önem arz etmektedir.
Aşağıdaki tanımlar sabit nokta yineleme metotlarının yakınsama hızlarının karşılaştırılmasında kullanılan standart araçlar haline gelmişlerdir:

Tanım 1. $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ aynı p limitine yakınsayan iki dizi olsun. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif sayıların (sıfıra yakınsayan) iki dizisi olmak üzere, aşağıdaki hata tahminlerinin mevcut olduğunu kabul edelim:

$$\|u_n - p\| \leq a_n, \|v_n - p\| \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

Bu durumda, eğer $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$' den daha hızlı yakınsak ise $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin p' ye $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$'den daha hızlı yakınsadığı söylenir [17].

Tanım 2. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ aynı p sabit noktasına yakınsayan iki yineleme dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(a_n,p)}{d(b_n,p)} = 0$$

ise $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p' ye $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$'den daha hızlı yakınsar denir [18], [19].

Literatürde, yukarıda verilen tanımlar kullanılarak çeşitli dönüşüm sınıfları için çok sayıda yineleme metotlarının yakınsaklık hızları arasında karşılaştırmalar yapılmıştır [7], [8], [9].

Chugh ve diğ. [7] aşağıda verilen teoremde bazı yineleme metotlarının (14) şartını sağlayan dönüşümler sınıfı için yakınsaklık hızlarını karşılaştırdılar.

Teorem 1 C, M konveks metrik uzayının bir boş olmayan kapalı ve konveks alt kümesi ve $T: C \to C$, (14) şartını sağlayan bir operatör olsun. $F_T = \{x \in C \mid Tx = x\} \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1]$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \leq \alpha < 1$ şartlarını sağlayan bir dizi olmak üzere verilen bir $x_0 \in C$ için, (12) tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ yineleme dizisi T' nin sabit noktasına, (13) ile verilen kapalı Mann ve [7] de tanımlanan kapalı Ishikawa yineleme metotlarından daha hızlı yakınsar. Üstelik, kapalı yinelemeler karşılık gelen klasik yinelemelerden daha hızlı yakınsarlar.
Chugh ve diğ. [7], Teorem 1'i doğrulamak için aşağıdaki örneği verdiler.

Örnek 1 $C = [0,1]$, $Tx = \frac{x}{4}$, $x_0 \neq 0$, $n \geq 25$ için $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = 1 - \frac{4}{\sqrt{n}}$ ve $n = \overline{1,24}$ için $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = 0$ olsun. Açıkça, $Tp = p = 0$ dır. Bu durumda, Teorem 1'in hipotezleri sağlanır ve (12) ile verilen yineleme metodu p = 0 sabit noktasına, (13) ile verilen kapalı Mann ve [7] de tanımlanan kapalı Ishikawa yineleme metotlarından daha hızlı yakınsar. Ayrıca, (13) ile verilen kapalı Mann yineleme metodu (9) ile verilen klasik Mann yineleme metodundan ve [7] de tanımlanan kapalı Ishikawa yineleme metodu (10) ile verilen klasik Ishikawa yineleme metodundan daha hızlı yakınsar.

Şimdi, Teorem 1'de iddia edilenin aksine, (13) ile verilen kapalı Mann yineleme metodunun (14) şartını sağlayan bir operatörün sabit noktasına her zaman (9) ile verilen klasik Mann yineleme metodundan daha hızlı yakınsayamayacağını göstereceğiz.

Örnek 2 $C = [0,1]$, $x_0 = 0.5$, $x_{-1} = 0.5$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n = 0.5$ olsun. $T: C \to C$ dönüşümünü $Tx = 0.25e^{0.25-x}$ olarak tanımlayalım. $Tp = p = 0.25$ tir. Yani $p = 0.25$, T' nin $[0,1]$ üzerindeki tek sabit noktasıdır. Şimdi, T dönüşümünün (14) ile verilen şartı sağladığını gösterelim.

Genelliği bozmaksızın, $x < y$ olduğunu kabul edelim. $[x,y] \subseteq [0,1]$ üzerinde T'ye ortalama değer teoreminin uygulanmasıyla

$$|0.25e^{0.25-x} - 0.25e^{0.25-y}| = 0.25e^{0.25-c}|x-y|, c \in (x,y) \subseteq [0,1] \tag{15}$$

olduğu elde edilir. Şimdi, $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu $\varphi(t) = t$ olarak tanımlayalım. φ, $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan monoton artan bir fonksiyondur. Böylece (15)' ten

$$|0.25e^{0.25-x} - 0.25e^{0.25-y}| \leq \delta|x-y| + \varphi(|x - 0.25e^{0.25-x}|), \tag{16}$$

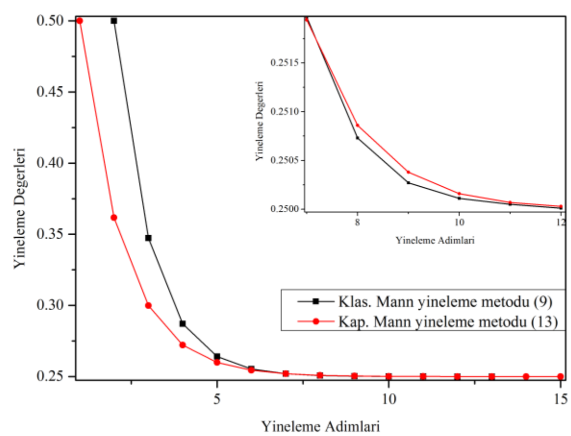
burada her $c \in (x,y) \subseteq [0,1]$ için $\delta = 0.25e^{0.25-c} \in (0.118092, 0.321006) \subseteq [0,1[$ dir.

Dolayısıyla, $x < y$ şartını sağlayan her $x, y \in [0,1]$ için T dönüşümü (14) ile verilen şartı sağlar. Benzer şekilde T dönüşümünün, x ve y' nin rollerinin değiştirilmesiyle $y < x$ şartını sağlayan her $x, y \in [0,1]$ içinde (14) ile verilen şartı sağladığı gösterilebilir.

Tablo 1 ve Şekil 1' de, Örnek 2' de verilen şartlar altında (9) ile verilen klasik Mann yineleme metodunun $p = 0.25$ sabit noktasına (13) ile verilen kapalı Mann yineleme metodundan daha hızlı yakınsadığı gösterilmiştir.

Tablo 1. Kapalı ve klasik Mann yineleme yöntemlerinin yakınsaklık davranışları (Convergence behaviors of implicit and classical Mann iteration methods)

Yineleme Adımları	Klasik Mann yineleme yöntemi (9)	Kapalı Mann yineleme yöntemi (13)
x_{-1}	---	0.50000
x_0	0.50000	0.36178
x_1	0.34735	0.29981
x_2	0.28708	0.27216
x_3	0.26399	0.25985
x_4	0.25526	0.25438
x_5	0.25197	0.25194
x_6	0.25073	0.25086
x_7	0.25027	0.25038
x_8	0.25011	0.25016
x_9	0.25005	0.25007
x_{10}	0.25001	0.25003
x_{11}	0.25000	0.25002
x_{12}	⋮	0.25001
x_{13}		0.25000
⋮		⋮



Şekil 1. Kapalı ve klasik Mann yineleme yöntemlerinin yakınsaklık davranışları (Convergence behaviors of implicit and classical Mann iteration methods)

KAYNAKÇA (REFERENCES)

[1] W. Takahashi, "A convexity in metric spaces and nonexpansive mappings I," *Kodai Math. Sem. Rep.*, vol. 22, no. 2, pp. 142-149, 1970.

[2] H. Fukhar-ud-din and V. Berinde, "Iterative methods for the class of quasi-contractive type operators and comparsion of their rate of convergence in convex metric spaces," *Filomat*, vol. 30, no. 1, pp. 223-230, 2016.

[3] U. Kohlenbach, "Some logical metatheorems with applications in functional analysis," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 357, no. 1, pp. 89-128, 2005.

[4] W. A. Kirk, "Krasnoselskii's iteration process in hyperbolic space," *Numer. Funct. Anal. Optim.*, vol. 4, no. 4, pp. 371–381, 1981.

[5] A. R. Khan, M. A. Khamsi, and H. Fukhar-ud-din, "Strong convergence of a general iteration scheme in CAT(0)−spaces," *Nonlinear Anal.*, vol. 74, no.

3, pp. 783–791, 2011.

[6] A. Şahin and M. Başarır, "Convergence and data dependence results of an iteration process in a hyperbolic space," *Filomat*, vol. 30, no. 3, pp. 569–582, 2016.

[7] R. Chugh, M. Preety, and V. Kumar, "On a New Faster Implicit Fixed Point Iterative Scheme in Convex Metric Spaces," *Journal of Function Spaces*, vol. 2015, pp. 1-11, 2015.

[8] F. Gürsoy, "A Picard-S iterative method for approximating fixed point of weak-contraction mappings," *Filomat*, vol. 30, pp. 2829–2845, 2016.

[9] F. Gürsoy, A. R. Khan, and H. Fukhar-ud-din, "Convergence and data dependence results for quasi-contractive type operators in hyperbolic spaces," vol. Doi: 10.15672/HJMS.20174720334, pp. 1-16, 2017.

[10] V. Karakaya, F. Gürsoy, and M. Ertürk, "Some convergence and data dependence results for various fixed point iterative methods," *Kuwait Journal of Science*, vol. 43, no. 1, pp. 112-128, 2016.

[11] K. Doğan and V. Karakaya, "On the Convergence and Stability Results for a New General Iterative Process," *The Scientific World Journal*, pp. 1-8, 2014.

[12] W.R. Mann, "Mean value methods in iteration," *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 4, pp. 506-510, 1953.

[13] S. Ishikawa, "Fixed points by a new iteration method," *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 44, pp. 147-150, 1974.

[14] M. A. Noor, "New approximation schemes for general variational inequalities," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 251, no. 1, pp. 217-229, 2000.

[15] L. Ćirić, A. Rafiq, S. Radenović, M. Rajović, and J. S. Ume, "On Mann implicit iterations for strongly accretive and strongly pseudo-contractive mappings,”," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 198, no. 1, pp. 128–137, 2008.

[16] C. O. Imoru and M. O. Olatinwo, "On the stability of Picard and Mann iteration processes," *Carpathian Journal of Mathematics*, vol. 19, no. 2, pp. 155–160, 2003.

[17] V. Berinde, "Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi-contractive operators," *Fixed Point Theory Appl.*, pp. 97-105, 2004.

[18] K. Knopp, *Infinite sequences and series*. New York: Dover Publications, Inc., 1956.

[19] M. Başarır, "On rates of convergence of sequences," *J.Orissa Math.Soc.*, vol. 7, no. 2, pp. 89-98, 1988.