H.Ü. İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, Cilt 25, Sayı 1, 2007, s. 215-237

# DETERMİNİSTİK VE STOKASTİK TALEP VARSAYIMLARI ALTINDA ENVANTER PARTİ BÜYÜKLÜĞÜ BELİRLEME PROBLEMİ İÇİN MODELLER

**Ayşegül TAŞ***

**Öz**

Üretim planlamasının en önemli ve en zor problemlerden biri parti büyüklüğü belirleme problemidir. Parti büyüklüğü problemleri literatürde oldukça geniş bir şekilde çalışılmaktadır. Bu çalışmada, parti büyüklüğü problemi için bazı çözüm yaklaşımları gözden geçirilmiş ve bu konuda yapılmış daha önceki çalışmalar incelenmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Parti büyüklüğü, talep belirsizliği, envanter politikaları.

**Abstract**

**Models of Inventory Lot -Sizing Problem under Deterministic and Stochastic Demand Assumptions**

Lot sizing is one of the most important and also one of the most difficult problems in production planning. This subject has been studied extensively in the literature. In this study, single-level lot sizing problems and some solution approaches are reviewed and previous studies on these subjects are examined.

**Keywords:** Lot – sizing, demand uncertainty; inventory policies.

---

* Yrd.Doç.Dr., Çankaya Üniversitesi, İşletme Bölümü, Yüzüncüyıl/ANKARA, aysegul@cankaya.edu.tr

## GİRİŞ

Üretim ve envanter sistemlerine ilişkin literatür ekonomik ve parti büyüklüğü modelleri şeklinde değişebilir. Bir ürün yığın şeklinde üretilerek veya satın alınarak stoklanır. Envanter tükendiğinde ise tekrar parti halinde üretilir veya sipariş verilir ve bu döngü bu şeklide devam eder.

Parti büyüklüğü malların dağıtım amacıyla bir araya getirilmesidir. Bu genellikle gerçek talep modeliyle eş zamanlı olarak hareket etmeyen, zamana bağlı taşımacılığı meydana getiren bir mekanizmadır. Envanterin, servis etkinliği ve maliyet unsurları altında sipariş miktarlarına göre dağıtılması parti büyüklüğünün temelini oluşturmaktadır.

İşletmeler, parti büyüklüğünün belirlenmesi konusunda bilinçli ya da bilinçsiz davranabilirler. Bu davranışlar, depolanmış malzeme ve bu malzeme ile ilgili bilgi akışına göre işletme performansının kilit noktasını oluşturur. Envanter ve üretimde parti büyüklüğü konusunda pek çok araştırma bulunmaktadır. Bu araştırmalar bir çok kriterin dikkate alınması sonucu oluşturulmaktadır. Dikkate alınan kriterler parti büyüklüğü kararlarının karmaşıklığını doğrudan etkileyebilmektedir. Bu kriterler, planlama ufku, ürün sayısı, dönem sayısı, kapasite veya kaynak kısıtları, kurulum yapısı, stok açıkları ve talep olarak sıralanabilir (Karimi, Ghomi, Wilson, 2003).

Talep yapısı, kullanılacak olan envanter politikasının en önemli bileşenlerinden biridir. Oluşturulan envanter politikasının karmaşıklığı yada basitliği, talebin deterministik (kesin olarak bilinen) olması veya stokastik (olasılıklı olarak bilinen) olmasına bağlı olarak değişebilir. Deterministik modeller statik ve dinamik olmak üzere ikiye ayrılır. Statik durumda talep miktarı dönemler içerisinde farklılık göstermeyecek, dinamik durumda ise zamana bağlı olarak talep miktarında değişme olacaktır. Stokastik modelde ise, eğer talep olasılığı zamana bağlı olarak değişmiyorsa durağan, zamana bağlı talep olasılığında değişiklik oluyorsa durağan olmayan olarak adlandırılır (Taha, 1987).

İşletmeler açısından, karşılanması gereken mal veya envanterde bulundurulan bir çok mal için talep durağan değildir ve zamana göre farklılık göstermektir. Ekonomik büyümelerin olduğu dönemlerde talep artmakta, kriz dönemlerinde ise azalmaktadır. Her malın belirli dönemlerde gösterdiği taleplerde farklı olmaktadır. Yeni bir ürün piyasaya sunulduğunda, bu ürüne olan talep sıfırdan başlayarak yükselecek, belirli bir noktadan sonra ise azalmaya başlayacaktır. Dolayısıyla durağan olmayan taleple sıklıkla karşılaşılabilmekte ve dinamik talep yapısı bir çok mal açısından büyük önem taşımaktadır.

Bu çalışmada anlatılacak modeller ve çözüm yaklaşımları, temelde çok aşamalı envanter sistemlerinin planlanmasında kullanılan yaklaşımlara dayanmaktadır. Öncelikle, parti büyüklüğü konusunda en bilinen modellerden biri olan ve talebin statik olduğu durumu varsayan ekonomik sipariş miktarı modelinden bahsedilecektir. Daha sonra, dinamik talep durumunu gözönünde bulunduran, dinamik parti büyüklüğü yapısı sunulacaktır. Bu yapının tanımlanmasının ardından, Wagner – Whitin‘nin (1958) dinamik parti büyüklüğü algoritması incelenecektir. Bunun ardından, W-W'nin çalışmasını dikkate alan ve talebin geciktirilerek karşılanmasına izin veren Zangwill'in (1969) şebeke gösterimi anlatılacaktır. Dinamik envanter politikaları arasında, her dönem için optimal politikanın (s,S) türü bir politika olduğunu gösteren Scarf ‘ın (1960) optimal (s,S) politikasından bahsedilecektir. Ardından, (s,S) politikalarını dikkate alan çalışmalardan, Silver'ın (1978) dinamik talebe yönelik yaklaşık maliyet değerlerine ulaşan çalışmalarına yer verilecektir. Daha sonra ise, Bookbinder-Tan'ın (1988), "statik belirsizlik", "dinamik belirsizlik", "statik-dinamik belirsizlik" stratejileri için geliştirdiği sezgisel model ve Tarım-Kingsman'ın (2004), "dinamik ve stokastik" talebi karşılamaya yönelik (R, S) politikasını kullanan modelleri incelenecektir.

## 1. EKONOMİK SİPARİŞ MİKTARI MODELİ

Ekonomik sipariş miktarı (ESM) modeli, en temel ve en iyi bilinen envanter modellerinden biridir ve envanter problemlerinin çözümüne oldukça basit bir şekilde yaklaşmaktadır (Harris, 1915). Bu modele göre, talep biliniyor ve sabit, sipariş maliyeti sipariş miktarından bağımsız ve sabit, tedarik süresi sıfır, elde bulundurma maliyeti belirli bir dönem için sabit ve büyük miktarlarda alımlar için miktar indirimleri bulunmamaktadır (Lee, Nahmias, 1993).

Bu model çerçevesinde,

$C_h$ : elde bulundurma maliyetini,
Co : sipariş maliyetini,
Q : stok miktarı,
D : yıllık toplam talep,
q: toplam maliyeti en aza indiren sipariş miktarını temsil etmektedir.

Bu modele göre, tedarik süresi sıfır olduğu için, stok miktarı (Q) sıfıra inmeden sipariş verilmez. Q=0 olduğu durumda sipariş verilmektedir. Her dönemde sipariş miktarının sıfır olduğu anda sonra sipariş verilebildiği için, sipariş miktarlarının da aynı olması gerekmektedir. Bu nedenle, belirli bir süredeki toplam stok maliyetini minimum yapan sipariş miktarının (q) bulunması gerekmektedir (Winston, 1994).

Model aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir;

$$TM\ (q) = -(C_o)\left(\frac{D}{q^2}\right) + C_h\,\frac{1}{2} = 0\ ; \qquad q = \left(\frac{2C_oD}{C_h}\right)^{1/2}$$

Ekonomik sipariş miktarı modeline göre, her dönemdeki talebin bilindiği varsayılmaktadır. Gerçek yaşamda ise işletmelerin karşılaştıkları talep durağan olmayan bir taleptir. Bu durumda, dinamik talep yapısı karşımıza çıkmaktadır.

## 2. DİNAMİK PARTİ BÜYÜKLÜĞÜ ENVANTER PROBLEMİ

Dinamik talep yapısı bir çok mal çeşidi için bir hayli önem taşımaktadır. Arabalar, giysi ve ev eşyalarının büyük bir kısmı yaşam boyu talep edilmektedir. Dolayısıyla, durağan olmayan talep yapısı sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Dinamik parti büyüklüğü problemleri, planlama dönemi içerisindeki her bir dönem için bilinen talebi karşılayarak, elde bulundurma ve sipariş maliyetlerini minimize eden parti büyüklüklerinin karar verilmesinde kullanılır. Aşağıdaki varsayımlar dinamik parti büyüklüğü problemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır (Gupta, Keung, 1990), (Debodt vd, 1984): a) Talebin zamana bağlı değişken yapısı bilinmektedir, b) planlama ufkundaki zaman dönemleri eşit süredir, c) son dönemden sonra envanteri taşımak için tedarik bulunmamaktadır, d) Tedarik süresi sabittir ve bir çok model için sıfır kabul edilir, e) Talep her dönemin başında oluşur, f) Sipariş maliyeti her parti siparişi için sabittir, g) Elde bulundurma maliyeti bir dönemden diğerine aktarılan stok miktarına bağlıdır ve doğrusal bir ifadedir, h)Tedarik oranı sınırsızdır, i) Parti bölünmelerine izin verilmez, j) Bütün mallar tek tek ele alınır, k) Stoksuz kalma durumuna izin verilmez.

Bu varsayımlar çerçevesinde, değişken talebi modelleyen çalışmalar, talebe temel olarak iki farklı açıdan yaklaşmıştır. Bunlardan bir tanesi, talebin her dönem aynı dağılımı gösterdiği varsayımı, diğeri ise, bu varsayımda bulunmayan fakat bunu yaparken dinamik talep yapısını dikkate alan modellerdir. Talebin yapısına bağlı olarak incelenilecek çalışmalar Tablo 1 de görülebilmektedir.

**Tablo-1: Modellere Göre Talebin Yapısı**

| | Deterministik Statik | Deterministik Dinamik | Stokastik Durağan Olmayan |
|---|---|---|---|
| EOQ ( 1915 ) | ✓ | | |
| Wagner – Whitin (1958) | | ✓ | |
| Zangwill (1969) | | ✓ | |
| Scarf (1960) | | | ✓ |
| Silver'ın (1978) | | | ✓ |
| Bookbinder-Tan'ın (1988) | | | ✓ |
| Tarım-Kingsman (2004) | | | ✓ |

### 2.1. WAGNER – WHITIN (W-W) Algoritması

Wagner–Whitin algoritması, hesaplama yapılması istenilen planlama ufku için, olası tüm durumları inceler ve toplam maliyeti (elde bulundurma + sipariş maliyeti) en düşük olan seçeneği seçer. Seçilen seçenek, ilgili dönemden birinci döneme kadar tüm sipariş politikasını kapsar.

Wagner–Whitin tarafından geliştirilen yaklaşım şu varsayımlardan oluşmaktadır: Stoksuz kalma durumu yok, başlangıç stoğu sıfır, sipariş maliyeti sabit ve elde bulundurma maliyeti ise doğrusaldır (Wagner, Whitin 1958).

$d_t$ : talep miktarı.

$h_t(X_t)$ : her bir envanterin elde bulundurma maliyeti.

$c_t(U_t)$ :sipariş maliyeti.

$X_t$ : t dönemindeki kapanış envanter düzeyi.

$U_t$ :sipariş miktarı

olarak tanımlanmıştır.

Elde bulundurma maliyetinin $h_t(X_t)$, sipariş maliyetinin $c_t(U_t)$ olduğu durumda negatif olmayan ($\geq 0$) sipariş miktarı aşağıdaki şekildedir.

$$Min\sum_{t=1}^{n}\left[c_t(U_t)+h_t(X_t)\right]$$

Kısıtlar,

$$X_t = X_0 + \sum_{j=1}^{t}(U_j - d_j)$$

$$X_t \geq 0, \quad \text{t=1,...,n}$$

$$X_0 = 0.$$

Maliyet fonksiyonunu ise,

$$c_t(U_t) = C_{ot}\delta(U_t) + cU_t \qquad , \delta(U_t) = \begin{cases} 0 & , \ U_t = 0 \\ 1 & , \ U_t > 0 \end{cases}$$ şeklindedir.

W-W kapanış stoğunun sıfır olması veya elde bulundurmama durumunu tüm $t$=1,2,...,n dönemleri için $U_t X_{t-1} = 0$ şeklinde ifade etmektedir. Bu ifade doğrultusunda, sipariş ancak kapanış stoğu sıfır olduğu anda verilmesi gerekliliğini doğurur. Bu özellik sıfır envanter sipariş özelliği (zero-inventory ordering property) olarak bilinmektedir. Bu özellik doğrultusunda $U_t$ için uygun olan değerler $\{0, d_t, d_t + d_{t+1}, ...., d_t + d_{t+1} + ... + d_n\}$ şeklindedir. Bu durum sağlanmıyorsa, stoksuz kalma durumundan kurtulabilmek için ise, bazı t değerleri için $0 < X_{t-1} < d_t$ durumu söz konusu olmaktadır.

Buradan yola çıkılarak, tüm t değerleri için optimal politika aşağıdaki gibidir.

$$U_t = 0 \quad \text{veya} \quad U_t = \sum_{j=t}^{k} d_j \ , \quad t \leq k \leq n$$

Wagner-Whitin modelinin en önemli özelliklerinden biri de Planlama Ufku Teoremi (Planning Horizon Theorem) dir. Bu teoreme göre, n dönemli optimal çözümde son sipariş $t^*$ döneminde ise, $n^*$ dönemli bir problemde ($n^*$ >n) $t^*$ dan önce bir son sipariş bulunamayacaktır. Özet olarak, eğer $t^*$ =n durumu varsa, 1. dönemden n-1. döneme kadar olan kısım planlama ufkudur. n dönem için optimal çözüm de $X_{n-1} = 0$ dır.

Optimal politikayı bulabilmek için (i,j) yayları arasındaki en kısa yol bulunmaya çalışılmaktadır (i<j). i. düğümden j-1. düğüme kadar olan sipariş maliyeti aşağıdaki şekildedir.

$$a(i,j) = c_i\left(\sum_{k=i}^{j-1} d_k\right) + \sum_{k=i}^{j-2} h_k\left(\sum_{l=k+1}^{j-1} d_l\right) \qquad (i<j \leq n+1)$$

Bu fonksiyonda geriye veya ileri dönük dinamik programlama yöntemi kullanılarak, optimal sipariş politikası belirlenebilir. Geriye dönük formülasyon aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$f_i = \min_{j>i}\left(a(i,j) + f_j\right) \quad \forall\, i = 1,\ldots,n$$

$$f_{n+1} = 0\,.$$

W-W dinamik parti büyüklüğü problemleri için etkili bir algoritma geliştirmiş olmasına karşın, bu politika pratikte geniş bir şekilde yer bulamamaktadır. Bunun iki temel nedeni vardır (Debodt vd,1984). Bunlardan birincisi, karmaşık bir yapıya sahip olması nedeniyle yöneticiler tarafından kolaylıkla anlaşılamaması; ikincisi ise, algoritmanın uzun dönemli planlamalarda çok sayıda bileşene sahip olması nedeniyle zaman kaybına sebep olabilmesidir. W-W'nin çalışmasını dikkate alan ve talebin geciktirilerek karşılanmasına izin veren Zangwill'in şebeke gösterimi aşağıda yer almaktadır.

### 2.2. ZANGWILL'İN Dinamik Ekonomik Parti Büyüklüğü Üretim Sistemi Modeli:

Zangwill, W-W modelini konkav maliyet altında tek kaynaklı şebeke gösterimi kullanarak çözmüş ve bu gösterime talebi geciktirerek karşılayabilme durumunu da eklemiştir (Zangwill, 1969).

Burada başlangıç envanter düzeyi $I_0$ ve son envanter düzeyi $I_n$ nin sıfır olduğu varsayılmaktadır. Talebi karşılayamama durumuna engel olmak için $I_i \geq 0$ olduğu, negatif üretim durumuna engel olmak içinse $x_i \geq 0$ olduğu kabul edilir.

$P_i(x_i)$ : $x_i$ birimin üretim maliyeti,

$H_i(I_i)$ : $I_i$ birimi elde tutma maliyeti ifade etmektedir.

Bu maliyetler, ekonomik parti büyüklüğü modelleri içindeki maliyetlerdir ve $[0,+\infty)$ aralığında konkavdırlar.

Optimal üretim programı için, amaç fonksiyonu:

$$Min\sum_{i=1}^{n} P_i(x_i) + \sum_{i-1}^{n} H_i(I_i)$$

Kısıtlar,

$$\sum_{i-1}^{n} x_i = \sum_{i-1}^{n} d_i$$

$$x_i + I_{i-1} - I_i = d_i \qquad \text{i=1,......n}$$

$$I_0 = I_n = 0, \qquad x_i \geq 0 \text{ ve } I_i \geq 0 \qquad \text{i=1,.......n}$$

şeklindedir.

Zangwill, WW'nin modelini karşılanamamış talebin, geciktirilerek karşılanabilmesi durumunu göz önüne alarak genişletmiştir. Talebin geciktirilerek karşılandığı üretim çizelgesi formülasyonu aşağıdaki şekilde sunulmuştur.

$$Min\sum_{i=1}^{n} \{P_i(x_i) + H_i^{+}(I_i^{+}) + H_i^{-}(I_i^{-})\}$$

Kısıtlar,

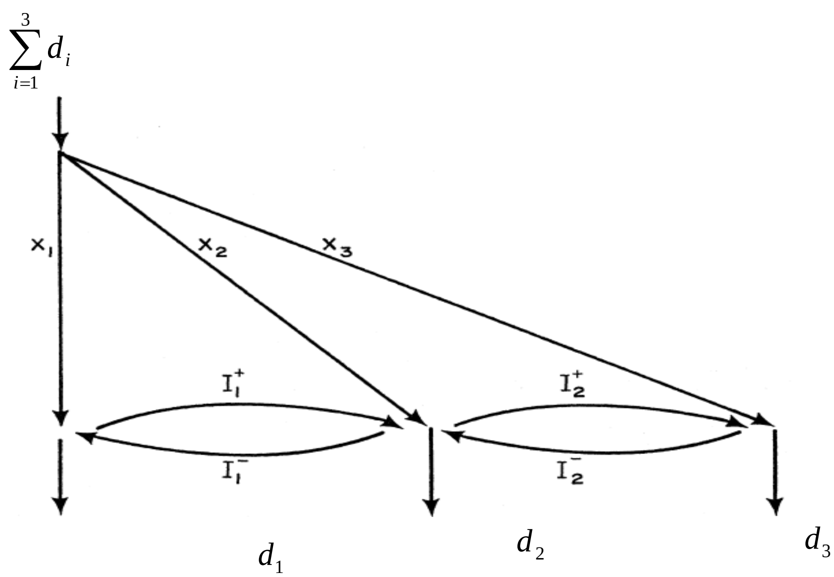
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} d_i ,$$

$$x_i + I_{i-1}^+ - I_{i-1}^- - I_i^+ + I_i^- = d_i \qquad i=1,...,n,$$

$$I_0^+ = I_0^- = I_n^+ = I_n^- = 0,\; x_i \geq 0,\; I_i^+ \geq 0 \text{ ve } I_i^- \geq 0 \qquad i=1,....,n.$$

Şekil 1 de gösterilen durumda, geriye doğru gönderme (backward shipment) durumu ifade ediliyor gibi görünse de, bu tamamen birikmiş talebin, birikmiş envanterden karşılanması durumunu ifade etmektedir.

**Şekil-1: Talebin Geciktirilerek Karşılanma Durumu**




Şebeke gösterimi bakış açısına göre, elde stok bulundurma durumu ve birikmiş siparişin aynı dönem içerisinde olması karlı bir durum değildir. Bu durumda, bir dönem içerisinde $I_i^+$ ve $I_i^-$ aynı anda pozitif olamaz. Amaç fonksiyonunun konkav bir fonksiyon olarak kabul edildiği ve ağın tek bir kaynağa sahip olduğu minimum maliyetli ağ akış probleminde her düğümün en çok bir yaydan oluşan içeri doğru bir akışa sahip olması özelliğinde bir optimal akış bulunmaktadır. Buradan yola çıkılarak aşağıdaki özellikler geçerli olmaktadır.

a) Üretim i. dönemde ise, i-1. dönemde $I_{i-1}$ sıfır veya negatif olmak zorundadır.

$$I_{i-1}^{+} > 0 \text{ ise } x_i = 0$$

b) Üretim i. dönemde tamamlanmışsa, i. dönem sonunda ki envanter düzeyi negatif olamaz, sıfır olabilir.

$$x_i > 0 \text{ ise } I_i^{-} = 0$$

c) Herhangi bir dönemde elde stok bulunuyorsa, bir sonraki dönemde envanter düzeyi pozitif veya sıfırdır.

$$I_{i-1}^{+} > 0 \text{ ise } I_i^{-} = 0 .$$

Dinamik parti büyüklüğü envanter problemi çözümünün yukarıda verilen özellikleri sağlaması gerekmektedir. Bu durumda, karar değişkenleri için sonlu sayıda olası değerler denenerek sonuca ulaşılabilir.

### 2.3. Optimal (s,S) Politikası

Dinamik envanter politikaları arasında, elde tutma ve ceza maliyetlerinin doğrusal olması halinde, her dönem için optimal politikanın (s,S) türü bir politika olduğu Scarf tarafından ispat edilmiştir (Scarf, 1960). (s,S) modelleri, tüm maliyet ve talep parametreleri değerlerinde optimum maliyete ulaşabilmektedir. Bu modelde her dönem için sipariş noktası (s) ve sipariş-verilecek-üst-stok-düzeyinin (S) belirlenmesi hedeflenmektedir. Eğer bir dönemin başında stok miktarı sipariş noktasının altına düşmüş ise, stok miktarını üst sınıra ulaştıracak kadar sipariş verilmesi gerekmektedir.

(s,S) politikasının dikkate aldığı maliyetler üç ayrı maliyet şeklinde genellenebilir. Bunlar, z kadar bir miktarın sipariş edilmesi halinde karşılaşılan satın alma veya sipariş maliyeti olan c(z); talep karşılandıktan sonra elde kalan stoğun bir fonksiyonu olan elde bulundurma maliyeti h(.); karşılanamayan taleplerin fonksiyonu olan ceza maliyeti p(.) dir. Elde bulundurma ve ceza maliyetleri dönem sonlarında, sipariş maliyeti ise, siparişin verildiği dönemin başında oluşabilmektedir.

Envanter probleminin n adet dönemi kapsadığı ve sistemin x adet stok ile başladığı varsayılmaktadır. Bu durumda, $C_n$ (x) şeklinde tanımlanış ve (2.3.1)'de verilmiş olan fonksiyon, n dönemlik planlama ufkunda beklenen indirgenmiş maliyetleri göstermektedir. İndirgeme faktörü α ile gösterilmekte ve α sıfır ile bir arasında değer almaktadır.

İndirgenmiş beklenen maliyet fonksiyonu:

$$C_n(x) = \min_{y \geq x}\{c(y-x) + L(y) + \alpha \int_0^{\infty} C_{n-1}(y-\varepsilon)\varphi(\varepsilon)d\varepsilon \qquad (2.3.1)$$

şeklindedir.

Açık şekilde görülebileceği üzere, eğer y stok miktarını en aza indiren değer $y_n(x)$ ise, $y_n(x) - x$ en uygun (optimal) başlangıç sipariş değerini ifade etmektedir.

Bir dönemli envanter problemlerinde sipariş maliyeti doğrusal ise yani c(z)=c.z durumu varsa, uygun politika, kritik bir değer $x'$ bulunurak oluşacaktır. Eğer x< $x'$ ise $x'$-x kadar sipariş verilecek, x> $x'$ ise sipariş verilmeyecektir. Bu basit yaklaşım kullanılarak benzer sonuçlar birden fazla dönem için bulunarak, her dönem için birbirinden farklı $x_1', x_2', \ldots$ kritik değerleri hesaplanabilir.

Bu sonuçların sağlanabilmesi için gerekli koşul, y kadar olan stok miktarı için, elde tutma ve ceza maliyetlerini temsil eden L(y) fonksiyonunun konveks olmasıdır. Bu da ancak elde bulundurma ve ceza maliyetlerinin orijinde sıfır değeri alan konveks fonksiyonlar olması demektir.

Eğer sipariş maliyeti doğrusal değilse durum karmaşık olabilir. Doğrusal olmayan basit bir tip elde bulundurma maliyeti aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\mathrm{c(z)} = \begin{cases} 0 & z = 0 \\ K + c.z & z > 0 \end{cases}$$

Burada, K değişkeni yeniden sipariş maliyeti olarak tanımlanmaktadır. Sipariş maliyetinin doğrusal olmadığı durumlarda, tek dönem için optimal politika için bir çift kritik rakamın (s, S) daha sık kullanıldığını gösterilmektedir: "Eğer x<s durumu varsa (S-x) kadar sipariş ver; x>s durumu varsa sipariş verme" şeklinde açıklanmaktadır.

Scarf, elde bulundurma ve ceza maliyetlerinin doğrusal olması halinde veya daha genel ifadeyle L(y)'nin konveks olması halinde (s,S) politikasının tek dönem için en uygun maliyet değerini verdiğini belirtmektedir. Bu maliyet fonksiyonu şu şekilde tanımlanmaktadır.

$$G_n(y) = cy + L(y) + \alpha\int_0^\infty C_{n-1}(y-\varepsilon)\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$$

Stok düzeyi x seviyesindeyken, $G_n(x)>K+G_n(y)$ eşitsizliğini sağlayan bir y değeri var ve bu y değeri y>x koşulunu sağlıyorsa sipariş verilmelidir. Bu eşitsizliği sağlayan y değeri $G_n(y)$ fonksiyonunun değerini minimize etmektedir. Bu şekilde (s, S) politikasının dönemsel değerleri olan $S_n$ ve $s_n$ değerleri belirlenebilir:

$G_n(s_n)>K+G_n(S_n)$

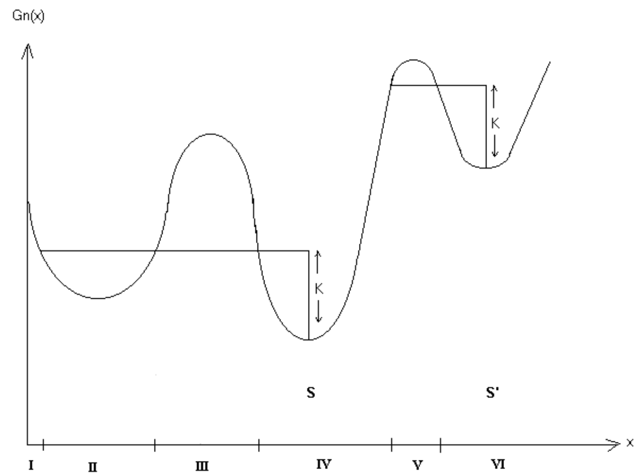
Dönemsel olarak bulunan bu değerler $G_n$ fonksiyonunun minimun olduğu noktayı gösterebilmesine rağmen, bu fonksiyonun birden fazla minimun ve maksimum noktaları olabilir. Scarf, birden fazla minimum ve maximum noktasının bulunmasının, (s,S) politikasının optimumluğunu ortadan kaldıracak kadar büyük olmadığını ifade etmektedir. Bunu ispat edebilmek için, K-konveks bir L(y) fonksiyonu için, a ≥ 0 eşitsizliğini sağlayan bir a değeri kullanılarak,

$$K + G_n(a+x) - G_n(x) - aG'_n(x) \geq 0 \qquad (2.3.2)$$

eşitsizliği sağlanmalıdır.

Şekil 2, $G_n$ (x) fonksiyonunda oluşabilecek maximum ve minimumları göstermektedir:

**Şekil-2: $G_n(x)$ maliyet fonksiyonunun salınımları**




Şekil 2'ye göre, I ve III nolu bölümlerde, stoğu S 'ye kadar çıkaracak miktarda sipariş verilmesi gerekirken, V nolu bölümde ise stoğu $S'$ düzeyine kadar çıkaracak miktarda sipariş verilmelidir. Ayrıca II , IV ve VI nolu bölümlerde sipariş verilmemelidir. Ancak (2.3.2) de verilen eşitsizliğe göre böylesine bir durumun gerçekleşmesi imkansız olarak görülmektedir. Burada, x+a=S eşitliğini sağlayan bir a değeri ve, x'in III. bölgedeki maksimum olduğu nokta dikkate alınarak eşitsizliğe uygulandığında, $G_n'(x) = 0$ olacaktır ve eşitsizlik:

$$K + G_n(S) - G_n(x) \geq 0$$

haline gelecektir ve bu durum grafiğe aykırı düşmektedir.

Sonuç olarak salınımlar arasındaki büyüklük değerleri K değerini aşmayacak, bu salınımlar da (s,S) politikasının optimalliğini engellemeyecektir. Bu salınımlar arasında en uygun maliyeti üreten s ve S değerleri aranan optimum değerler olacaktır (Can, 2000).

Literatürde (s,S) politiklarına yönelik bir çok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmaların bir kısmı optimal çözüme ulaşırken bir kısmı yaklaşık çözümü veya sezgisel yaklaşımı vermektedir.

### 2.4. SILVER'ın Sezgisel Yaklaşımı

Stokastik dinamik parti büyüklüğü envanter problemleri konusunda ilk yapılan çalışma Silver'in sezgisel çalışmasıdır (Silver,1978). Bu çalışma, dönemsel ortalama maliyeti hesaplayan Silver ve Meal sezgisel yaklaşımını temel alır (Silver, Meal 1973).

Silver ve Meal sezgisel yaklaşımınına göre, bir dönemdeki elde tutma ve sipariş maliyeti ortalaması C(t), t adet dönemdeki talepler ise sırasıyla ($d_1$ , $d_2$ , …, $d_t$) şeklinde ifade edilmektedir. Maliyetlerin tümü bütün dönemler için sabit olarak kabul edilmektedir.

Bu durumda her bir dönem için ortalama maliyet,

$$C(t) = \frac{\mathrm{C_o + C_h d_2 + 2C_h d_3 + ... + (t-1)C_h d_t}}{t} = \frac{C_o + C_h \sum_{i=1}^{t} (i-1)di}{t} \qquad (2.4.1)$$

şeklinde olacaktır.

Bu yöntem kullanılarak, t=1, 2, .. değerleri sırasıyla denenerek, en uygun maliyete ulaşan dönem sayısı bulunacaktır. Maliyet fonksiyonu konveks bir fonksiyon olarak kabul edilmekte ve bu konveks fonksiyonda C(t+1) > C(t)'yi sağlayan ilk t değeri siparişin içermesi gereken en uygun dönem sayısını vermektedir. Bu işlemlerin tümü (t+1) inci dönemden başlayarak planlama ufkunun sonuna kadar sürdürülecektir.

Silver'in sezgisel yaklaşımı (Silver,1978) üç adımdan oluşmaktadır. İlk adım, ne zaman sipariş verileceğini, ikinci adım siparişin kaç dönemi kapsayacağını, üçüncü adım ise sipariş miktarını bulmaya yöneliktir.

Sezgisel yaklaşımın ilk adımını oluşturan, "ne zaman sipariş verilecek" sorusunun cevabında hizmet düzeyinin belirleyici olduğu ifade edilmektedir. Siparişin olmadığı herhangi bir dönemde, o döneme ait talebi karşılayabilmek amacıyla o döneme ait emniyet faktörü dikkate alınmalıdır. Sipariş verilmeyen için emniyet faktörü $k_a$ aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$k_a = \frac{x - d_{(-L,1)}}{\sigma_{(-L,1)}}$$

Bu tanımda, x o dönemki stok seviyesini, $d_{(t,v)}$ t'den v'ye kadar olan sürede beklenen talebi, $\sigma_{(t,\ v)}$ ise bu zaman dilimindeki tahmin hatasının standart sapmasını göstermektedir.

İki adet hizmet ölçüsü tanımlamaktadır: $P_1$ ve $P_2$. $P_1$ tedarik dönemlerinde istenilen stoksuz kalmama olasılığını, $P_2$ ise talebin stoktan karşılanma oranını ifade etmektedir. Hedeflenen emniyet faktörünün $k_r$ ile, bir birim normal rastsal değişkenin u ile, en son verilen sipariş miktarının $Q_{mr}$ ile gösterildiği durumda hizmet ölçüleri aşağıdaki şekilde ifade edilecektir:

$P(u \geq k_r) = 1 - P_1$ ve $1 - P_2 = \sigma_{(-L,1)}\, G_u(k_r) / Q_{mr}$

İfadede kullanılan $\sigma_{(-L,1)}\ G_u(k_r)$ normal dağılımlı hatalar için beklenen stoksuz kalma değerini ifade etmektedir. $G_u(k)$ fonksiyonun açılımı şöyledir:

$$G_u(k) = \int_k^{\infty} (u_0 - k) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u_0^2/2) du_0$$

Eğer bir dönem için $k_a < k_r$ ise, o dönem istenen hizmet düzeyinin yakalanmama ihtimali bulunmaktadır. Bunu önleyebilmek için de o dönem sipariş verilmesi gerekmektedir. Sonuç olarak, her dönem için emniyet faktörü hesaplanarak, sipariş veilip verilmeyeceğine karar verilmektedir.

İkinci adımda yer alan "siparişin kaç dönemi kapsayacağı" sorusunun cevabı deterministik bir çözüm olan Silver-Meal sezgiseli kullanılarak açıklanmaya çalışılmıştır. Burada uygun olarak seçilen bir emniyet stoğu kullanılarak, talebin değişkenliğine karşı önlem alınmaya çalışılmıştır.

Son adımda ise üst emniyet seviyesi (S) ve sipariş miktarı belirlenmeye çalışılmakta ve şu şekilde ifade edilmektedir:

Burada, S = Q+X olduğundan,

$Q + X = s_{(-T-1-L)} + b\sigma_{(-L,\ T-1-L)} + d_{(-L,\ T-1-L)}$ $T = 2, 3, \ldots$ şeklindedir.

Burada b, emniyet stoğunu ifade etmektedir. Tahmin hatalarına karşılık $b\sigma_{(-L,\ T-1-L)}$ ifadesi kullanılmıştır. b için 0 ve 0.1 rakamları arasında bir değer önerilmektedir. (2.4.1) eşitliği kullanılarak, $s_{(T-1-L)}$ değişkenini açmak mümkündür:

$$s_{(T-1-L)} = d_{(T-1-L,\ T)} + k_r'\sigma_{(T-1-L,\ T)}$$

Burada $k_r'$, T-1-L anından T anına kadar istenen hizmet düzeyine ulaşmak için gereken emniyet stoğunu göstermektedir. Üç adımda elde edilen değerlerin doğruluğu her adım için denendikten sonra, $k_r'$ aşağıdaki ifade kullanılarak da kontrol edilmelidir:

$$G_u(k_{r'}) = \frac{d_{(0,T)}}{\sigma_{(T-1-L,T)}}(1 - P_2)$$

$d_{(0,T)}$, T dönemine kadar olan tahmini talep değerlerinin toplamını [Q=D(1)+D(2)+...+D(T)] göstermektedir.

**2.5. Servis Düzeyi Kısıtı Altında BOOKBINDER–TAN Sezgisel Yaklaşımı ve TARIM - KINGSMAN Optimizasyonu:**

Tarım ve Kingsman, dinamik parti büyüklüğü problemleri için, dinamik ve stokastik talebi karşılamaya yönelik olarak, servis düzeyi kısıtı altında (R, S) politikasını kullanan bir yöntem önermişlerdir (Tarım, Kingsman, 2004). Önerilen yöntem, Bookbinder ve Tan'ın, dinamik ve stokastik talep altında, statik-dinamik belirsizlik startejisinden hareket etmektedir (Bookbinder, Tan, 1988). Bu strateji, öncelikle planlama ufku başında tedarik dönemlerini belirlemekte ve daha sonra belirlenen bu dönemler için, sipariş miktarını bulmaktadır. Bookbinder ve Tan’nın çalışması, sipariş dönemlerini ve bu dönemlerdeki sipari miktarlarını tek seferde hesaplayamamaktadır. Bu nedenle, çalışmaları sezgisel olarak kabul edilmektedir.

Tarım ve Kingsman’nın araştırmaları, tahmin edilen talebin gerçekleşmemesi durumunda, mevcut stokların oluşan talebi karşılayamayacağını veya planlanandan daha fazla stok bulundurma sonuçlarını yaratacağını öngörmektedir. Stoksuz kalmama durumunu engellemeye yönelik olarak bulundurulacak emniyet stoğunun da, daha fazla stok miktarına ve daha yüksek sipariş maliyetine yol açacağı ifade edilmektedir. Bu nedenlerle, envanter problemlerinin çözümüne yönelik olarak yapılan çalışmaların, öngörü hatalarını dikkate almasının ve dinamik-stokastik talebi karşılamaya yönelik hazırlanmasının daha gerçekçi olacağı iddia edilmektedir.

Tarım ve Kingsman, Bookbinder ve Tan'nın yöntemine karşılık, sipariş zaman ve miktarlarının birlikte tespit edebileceği, böylelikle bu iki unsurun birbirine olan bağımlılığının ihmal edilmediği bir yöntem önermektedir. Bu yöntemin minimum değer hedeflenen amaç fonksiyonu şöyledir:

$$E\{TM\} = \int_{d_1}\int_{d_2}\cdots\int_{d_N}\left\{\sum_{t=1}^{N} C_o\delta_t + C_h X_t\right\} g_1(d_1)g_2(d_2)\ldots g_N(d_N)d(d_1)d(d_2)\ldots d(d_N)$$

Kısıtlar ise şöyledir:

$$U_t - M\delta_t \leq 0 \quad t = 1,\ldots,N,$$
$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{t}\left(U_i - d_i\right) \quad t = 1,\ldots,N,$$
$$\Pr\{X_t \geq 0\} \geq \alpha_t \quad t = 1,\ldots,N,$$
$$U_t \geq 0, \quad \delta_t \in \{0,1\} \quad t = 1,\ldots,N,$$

M büyük bir tam sayıdır.

Tarım ve Kingsman, m adet sipariş döneminin olduğu N planlama ufkuna sahip bir sistemde, bu dönemleri $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ ile ifade etmektedir. Bu dönemlerle ilgili: $T_j \geq T_{j-1}$ ve $T_m \leq N$ geçerlidir. Bu tanıma göre, her döneme ait $U_t$ sipariş miktarları, $T_1$, $T_2$, … , $T_m$ sipariş dönemleri dışında 0 olacaktır. Bir dönemden diğerine aktarılan stok miktarı ise artık şöyle ifade edilmektedir:

$$X_t = X_0 + \sum_{j=1}^{i} U_{T_j} - \sum_{k=1}^{t} d_k,$$
$$T_i \leq t < T_{i+1},$$
$$i = 1,\ldots,m$$

Bookbinder ve Tan, $U_t$ yerine, beklenen stok düzeyindeki değişikliği ifade edebilecek $V_{Ti} \in R$ değişkenini tanımlamıştır:

$$U_{T_1} = V_{T_1}$$
$$U_{T_2} = V_{T_2} + d_{T_1} + \ldots + d_{T_2 - 1}$$
$$\vdots$$
$$U_{T_m} = V_{T_m} + d_{T_{m-1}} + \ldots + d_{T_m - 1}$$

Böylelikle bir dönemden diğerine aktarılan stok miktarı şöyle ifade edilebilecektir:

$$X_t = X_0 + \sum_{j=1}^{i} V_{T_j} - \sum_{k=T_i}^{t} d_k, T_i \leq t < T_{i+1}, i = 1, \ldots, m$$

Görülmektedir ki, $X_t$ , en son sipariş döneminden bulunulan döneme kadar oluşan talebe bağlı olmaktadır.

i. sipariş dönemindeki üst stok seviyesi olarak açıklanabilecek $R_{Ti}$ değişkeni aşağıdaki gibi tanımlanınca:

$$R_{T_i} = X_0 + \sum_{j=1}^{i} V_{T_j}$$

$X_t$ şu şekilde ifade edilebilecektir:

$$X_t = R_{T_i} - \sum_{k=T_i}^{t} d_k, T_i \leq t < T_{i+1}, i = 1, \ldots, m$$

Böylelikle Bookbinder ve Tan'ın önerdikleri çözüm, bu yeni $R_{Ti}$ ve $T_i$ değişkenleri için iki aşama yerine tek aşamada çözülebilecek hale gelmiştir.

Çözümü kolaylaştırmak için, Tarım ve Kingsman yeni bir ifade önermektedir:

$X_t = r_t - d_t, t = 1,...,N$ Bu ifadeye göre, eğer t döneminde herhangi bir sipariş verilmemiş ise, $r_t$ , $X_{t-1}$ 'e eşit olacaktır. Bu durum farklı bir şekilde gösterilebilir:

$$\left.\begin{aligned} r_t - X_{t-1} &\leq M\delta_t \\ r_t &\geq X_{t-1} \end{aligned}\right\} \quad t = 1,...,N$$

Görülmektedir ki, $\delta_t$ = 1 olduğu dönemlerdeki $r_t$ değerleri aslında $R_{Ti}$ 'leri ifade edecektir:

$$r_{T_i} = R_{T_i}, i = 1,...,m$$

Servis düzeyininin olasılıksal ifadesi yukarıdaki düzenlemelerin ışığında yeni bir hal alacaktır:

$$\Pr\left\{R_{T_i} \geq \sum_{k=T_i}^{t} d_k\right\} \geq \alpha_t, \quad t = 1,...,N$$

Bu ifade tekrar düzenlendiğinde,

$$X_t \geq G^{-1}_{d_{T_i}+d_{T_i+1}+...+d_t}(\alpha_t) - \sum_{k=T_i}^{t} d_k, \quad T_i \leq t < T_{i+1}, \quad i = 1,...,m$$

haline gelecektir.

$G_{d_{T_i}+d_{T_{i+1}}+...+d_t}(.)$ , $d_{T_i} + d_{T_{i+1}} + ... + d_t$ ifadesinin toplam olasılık dağılım fonksiyonu olarak kullanılmaktadır. Tarım ve Kingsman tarafından G'nin artan fonksiyon olduğu varsayılmakta, bu nedenle $G^{-1}$ fonksiyonu bire-bir tanımlanan bir fonksiyon olarak ifade edilmektedir.

$G_{d_{T_i}+d_{T_{i+1}}+...+d_t}(.)$ fonksiyonu, sadece $T_i$ değerleri belirlendikten sonra çözülebilmektedir. Oysa uygun sipariş dönemleri uygun $G_{d_{T_i}+d_{T_{i+1}}+...+d_t}(.)$ değerleri bulunmadan belirlenemeyecektir. Bu döngüden kurtulmak için Tarım ve Kingsman karışık tamsayı programlama yöntemi kullanmışlardır. Problem ufkunun sınırlı olması dolayısıyla, $G_{d_{T_i}+d_{T_{i+1}}+...+d_t}(.)$ değerlerinini tüm durumlar için ifade edilebileceğini savunmaktadır. Bunu sağlamak için sadece 1 ve 0 değerleri alabilen $I_{tj}$ değişkeni tanımlanmıştır. Bu değişken, eğer en son sipariş t-j+1 döneminde verilmişse 1, aksi halde 0 olabilmektedir. Bu değişken kullanılarak yukarıdaki ifadeler tekrar düzenlenebilir:

$$G^{-1}_{d_{T_i}+d_{T_{i+1}}+...+d_t}(\alpha_t) = \sum_{j=1}^{t} G^{-1}_{d_{t-j+1}+d_{t-j+2}+...+d_t}(\alpha_t).I_{tj}, t = 1,...,N$$

$$X_t \geq \sum_{j=1}^{t}\left( G^{-1}_{d_{t-j+1}+d_{t-j+2}+...+d_t}(\alpha_t) - \sum_{k=t-j+1}^{t} d_k \right) I_{tj}, \quad t = 1,...,N$$

En son verilen sipariş dönemini tespitte kullanılmakta olan $I_{tj}$ değişkeni, bir planlama ufkunda sadece bir tane en son sipariş verilen dönem bulunması sebebiyle şu şekilde ifade edilebilmektedir:

$$\sum_{j=1}^{t} I_{tj} = 1, t = 1,..., N.$$

Tarım ve Kingsman, yukarıdaki ifadeyi değişik durumlarda test etmektedir. Yapılan testler sonucunda aşağıdaki ifadeler oluşturulabilir:

$$I_{tj} \geq \delta_{t-j+1} - \sum_{k=t-j+2}^{t} \delta_k, t = 1,..., N, j = 1,..., t \quad , \quad \sum_{j=1}^{t} I_{tj} = 1, t = 1,..., N$$

Sonuç olarak beklenen toplam maliyet amaç fonksiyonu ve şartlar tekrar oluşturulabilir: Karar yöntemi olarak Bookbinder ve Tan'ın statik-dinamik belirsizlik startejisi kullanıldığı için, sipariş dönemleri, $\delta_t$ ve $I_{tj}$, talepler belli olmadan planlama ufkunun başında belirlenmelidir. Dolayısıyla stokastik hale gelen $r_t$, $X_t$ ve $d_t$ değişkenleri beklenen olarak ifade edilmelidir. Bu sebeble yukardaki ifadeler şu hale gelmektedir:

$$\text{Min}\, E\{TM\} = \sum_{t=1}^{N} C_o \delta_t + C_h E\{X_t\}$$

$$E\{X_t\} = E\{r_t\} - E\{d_t\}, \qquad t = 1,...,N$$
$$E\{r_t\} \geq E\{X_{t-1}\}, \qquad t = 1,...,N$$
$$E\{r_t\} - E\{X_{t-1}\} \leq M\delta_t, \qquad t = 1,...,N$$
$$E\{X_t\} \geq \sum_{j=1}^{t}\left( G^{-1}_{d_{t-j+1}+d_{t-j+2}+...+d_t}(\alpha_t) - \sum_{k=t-j+1}^{t} E\{d_k\} \right) I_{tj}, \qquad t = 1,...,N$$
$$\sum_{j=1}^{t} I_{tj} = 1, \qquad t = 1,...,N$$
$$I_{tj} \geq \delta_{t-j+1} - \sum_{k=t-j+2}^{t} \delta_k, \qquad t = 1,...,N, \quad j = 1,...,t,$$
$$E\{X\}, E\{r\} \geq 0, \quad \delta, I \in \{0,1\}$$

Bu model ile sipariş dönem ve miktarları aynı anda, tüm planlama ufku için bir defada bulunmaktadır.

Dinamik (R,S) politikası kullanılarak, planlama ufku başında sipariş verilecek dönemler (R) ve sipariş miktarları tek seferde belirlenerek yaklaşık optimal tedarik planına ulaşılabilmektedir. Dinamik (R,S) modeli optimum maliyet değerlerine oldukça yakın sonuçlar üretebilmesi nedeniyle, bir envanter planının içermesi gereken düşük maliyet kriterini önemli ölçüde sağlamaktadır. Bu çalışmanın temel eksikliği ise oluşturulan yöntemin, sipariş verilmesi planlanan dönemde sipariş vermeye mutlaka yönelmesidir. Bunun yerine, belirlenebilecek bir s değeri ile ancak o değerin altına düşüldüğünde sipariş verilmesi toplam sipariş maliyetini düşürücü etki gösterebilecektir.

## SONUÇ

Bu çalışma da anlatılan matematiksel stok kontrol modelleri ve çözüm yöntemleri, çok aşamalı envanter sistemlerinin planlanmasında kullanılan yaklaşımlara dayanmaktadır. Parti büyüklüğü konusunda yapılan bir çok çalışma sonlu zaman peiyodu altında bilinen talebi karşılamaya yöneliktir. Oysa gerçek koşullarda talebin tam olarak bilinebilmesi her zaman mümkün olamamaktadır. Yapılan araştırmada, öncelikle parti büyüklüğü kuramının en bilinen modellerinden biri olan ve talebin statik olduğu durumu varsayan ekonomik sipariş miktarı modelinden bahsedilmiştir. Daha sonra, dinamik parti büyüklüğü yapısı sunularak bu konudaki çalışmalar yer verilmiştir. Dinamik envanter politikaları arasında, her dönem için optimal politikanın (s,S) türü bir politika olduğunu gösteren Scarf ‘ın optimal (s,S) politikasından ve (s,S) politikasına yönelik, stokastik dinamik parti büyüklüğü problemleri konusunda ilk yapılan çalışmalarda biri olan Silver'ın dinamik talebe yönelik yaklaşık maliyet değerlerine ulaşan çalışması sunulmuştur. Dinamik (*s*,*S*) modeli genel varsayımlar altında maliyet bakımından optimum sipariş planını veriyor olduğu halde, uygulama açısından bazı sakıncaları da taşımaktadır. Bu sakıncaların en başında (*s*,*S*) modeli altında ileriye dönük planlama yapmanın zorluğu gelmektedir. Yöneticiler hangi dönemde sipariş vereceklerini talep gerçekleşene kadar bilmemekte ve planlarını sürekli revize etmek durumunda kalabilmektedirler. Bu çalışmalar kurulum veya sipariş dönemlerini planlama ufku başında sabitleyen ve planlama ufku boyunca gerçekleşen talep belirsizliği ile baş edebilen modellerin önemine işaret etmektedir. Sipariş dönemlerini planlama ufku başında sabitleyen ve talep belirsizliği ile baş edebilen politikalar arasında Bookbinder ve Tan (1988) tarafından önerilmiş olan sezgisel yaklaşım önemli bir yer tutmaktadır. Servis düzeyi esas alınarak geliştirilen bu sezgisel yaklaşım iki aşamalıdır. İlk aşamada sipariş dönemleri (R) sabitlenmekte, ikinci aşamada ise sabitlenen sipariş dönemleri için sipariş-verilecek-üst-stok-düzeyileri (S) hesaplanmaktadır. Bu yaklaşımda, sipariş zamanları ve sipariş-verilecek-üst-stok-düzeyileri arasındaki bağımlılık ihmal edilmiştir. Tarım ve Kingsman (2004) ise bu bağımlılık ilişkisini dikkate alarak, servis düzeyi kısıtı altında, optimal planı verecek olan bir model önermişlerdir. Bu iki çalışmada önerilen modeller “dinamik (*R*,*S*)” modelleri olarak sınıflandırılabilir. Özellikle, talebin stokastik ve durağan olmayan yapısını dikkate alan son çalışmalar dinamik parti büyüklüğü kuramında büyük önem taşımaktadır.

## KAYNAKÇA

Bookbinder, J.H. and J.Y. Tan (1988) “Strategies for the Probabilistic Lot-Sizing Problem with Service-Level Constraints”, **Management Science**, 34, 1096-1108.

Can, M. (2000) **Belirsiz Talep Altında Envanter Modellemesi ve (s, S) ve (t; S) Karşılaştırması**, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Ankara: Hacettepe Üniversitesi.

Debodt, M.A., L.F. Gelders, L.N. Wassenhove (1984) “Lot Sizing Under Dynamic Demand Conditions: a Review”, **Engineering Costs and Production Economics**, 8, 165-187.

Gupta Y.P. and Y. Keung (1990) “A Review of Multi-Stage Lot-Sizing Models”, **International Journal of Operations and Production Management**, 10, 57-73.

Harris, F.W. (1915) "Operations and cost", **Factory Management Series**, Chicago: Shaw, 48-52.

Karimi, B., F. Ghomi and J.M. Wilson (2003) “The Capacitated Lot Sizing Problem: a Review of Models and Algorithms”, **The International Journal of Management Science**, 31, 365-378.

Lee H.L. and Nahmias (1993) **S. Logistics of Production and Invemtory**, S.C. Graves, A.H.G. Rinnory Kan and P.H. Zipkin (eds.), **Handbooks in Opertions Research and Management Science**, Vol: 4, North-Holland.

Scarf, H. (1960). “The Optimality of (s,S) Policies in the Dynamic Inventory Problem”, K.J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes, **Mathematical Methods in the Social Sciences 1959**, Stanford University Press, 196-202.

Silver E.A. and H.C. Meal (1973) "A Heuristic for Selecting Lot Size Requirements For the Case of a Deterministic Time-Varying Demand Rate and Discrete Opportunities for Replenishment", **Production and Inventory Management**, 14(2), 64-74.

Silver, E. (1978) "Inventory Control Under a Probabilistic Time-Varying, Demand Pattern," **AIIE Transactions**, 10, 371-379.

Taha, A.H. (1987) **Operations Research an Introduction,** (4th ed.), NewYork: Macmillan Publishing Co.

Tarim, S.A. and B.G. Kingsman (2004) “The Stochastic Dynamic Production/Inventory lot-Sizing Problem with Services-Level Constraints”, **International Journal of Production Economics**, 88, 105-119.

Wagner, H.M. and T.M. Whitin (1958) "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model", **Management Science**, 5: 89-96.

Winston, W. (1994) **Operations Research**, USA: Duxbury Press.

Zangwill, W. (1969) “A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production System-A Network Approach”, **Management Science**, 15(9), 506-52.