İstatistik Araştırma Dergisi Cilt 03 No 01 Sayfa 35-50 Nisan 2004

EKSTREM DEĞER TEORİSİ İLE RİSKİN DEĞERİ (VAR)'IN TAHMİNİ

Ömer ÖNALAN *

ÖZET

Bu çalışmada,Riskin Değeri(VaR)'ı Ekstrem Değer Teorisi'ni kullanarak tahmin ediyoruz.VaR son zamanlarda hızla gelişen bir yöntemdir.Ekstrem değer teorisi tam dağılımdan ziyade,getiri dağılımlarının kuyruklarını modellemektedir. Bu ise getiri dağılımlarının kalın kuyruklara sahip olması durumunda,oynak piyasa koşullarında çok anlamlıdır.

Uzun bir zaman periyodunda,gözlenmiş olan ekstremlerin limit dağılımı,getirilerin kendilerinin dağılımından bağımsızdır.Bu durumda,getiriler için özel bir dağılım varsaymaya gereksinim yoktur. Bu durum, VaR hesabında ekstrem değer teorisine büyük bir avantaj sağlar.Buna karşıt olarak ,normallik varsayımı altında varyans-kovaryans metodu,VaR'ı genellikle eksik tahmin etmektedir.Çalışmada,İMKB endeks getirilerinden elde edilen maksimum ve minimum serilerinin ekstrem değer yaklaşımı ile modellenmesinin oldukca tatminkar olduğu bulunmuş ve bu metoda göre elde edilmiş olan VaR ölçümlerinin,varyans-kovaryans metodu ile elde edilen den çok farklı olduğu görülmüştür.Ekstrem değer teorisine dayanan yaklaşım,geleneksel VaR metodları tarafından göz önüne alınan,geleneksel piyasa koşullarındaki değişimleride kontrol altına almaktadır.

Anahtar Kelimeler: *Riskin değeri(VaR),ekstrem değer teorisi,genelleştirilmiş ekstrem değer dağılımı,kalın kuyruklar, parametre tahmini*

1. GİRİŞ

Finansal kurumlar piyasa riski, kredi riski, likidite riski, işlem riski vb. gibi çeşitli tipte risklerle yüz yüze gelirler. Bunların her biri kurumun sermaye kaybetmesine neden olan farklı risk faktörleriyle ilgilenirler. Finansal riskler bir finansal pozisyonun piyasa değerindeki, beklenmeyen yöndeki değişimleri ifade ederler. *Piyasa riski* piyasa fiyatları veya oranlardaki değişimler yüzünden ortaya çıkan risktir. Günümüzde piyasa

* Yrd.Doç.Dr.,Marmara Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi,İşletme Bölümü, Ressam Namık İsmail Sok.No:1, 34590,Bahçelievler/Istanbul, E-mail : omeronalan@marmara.edu.tr
URL : http://mimoza.marmara.edu.tr/~omeronalan/

riski,yatırım camiasında en çok üzerinde durulan risk türüdür. Piyasanın finansal kurumlar üzerindeki etkisini azaltmak için ilk olarak piyasa riskinin doğru bir şekilde ölçülmesi, sonra da bu riskin etkin bir şekilde yönetilmesi gerekmektedir. BIS (Bank for International Settlements)'ın düzenlemelerini izleyerek birçok banka ve finansal kurum, piyasa risklerini düzenli bir şekilde ölçmeye başlamışlardır. Bu düzenlemeler, *Riskin Değer*" (Riske maruz değer) (VaR) olarak adlandırılan, piyasa risk ölçümüne yol açmıştır.

Finansal kurum açısından, VaR, bir finansal pozisyonun, verilmiş bir zaman periyodu ve verilmiş bir güven seviyesindeki (%95 gibi) maksimum potansiyel kaybı olarak tanımlanabilir. Alternatif olarak, düzenleyici komite açısından VaR, olağandışı piyasa koşulları altında, bir pozisyonun, minimal potansiyel kaybı olarak tanımlanır. Bu kavramların farklı olduğu düşünülmesine rağmen, her iki tanım da, aynı VaR ölçümüne yol açar. VaR, 1990'lardaki finansal felaketlere bir tepki olarak geliştirilmiştir. VaR, veriler bir güven seviyesi ile bir hedef periyottaki en kötü kaybı özetler. VaR, bir finansal kurumun piyasa riskini tek bir sayı ile özetlediği için, popüler bir yaklaşımdır. (Jorion ,2002), (Duffie ve Pan ,1997), (Basel ,1996).

Piyasa risk modeli için en iyi metodolojinin ne olduğu konusunda bir görüş birliği yoktur. Bu nedenle de bugüne kadar birçok farklı metot geliştirilmiştir. Günümüzde uygulamada genel olarak kullanılan üç yaklaşım mevcuttur. J.P. Morgan şirketi tarafından önerilmiş olan *Risk metrik* yaklaşımı, tüm fiyatların birleşik log-normal dağılmış olduğunu kabul eder ve bu yaklaşımın en önemli elemanı günlük olarak güncelleştirilen büyük bir varyans – kovaryans matrisidir. Bu metot ***varyans – kovaryans metodu*** olarak da adlandırılmaktadır. Bu metodun en büyük eksikliği, gerçekte finansal getirilerin genellikle kalın kuyruklu olup, log-normal dağılmamış olmasıdır. Böylece büyük kayıplar, varyans – kovaryans metodu ile kestirilenden çok daha sık ortaya çıkmaktadır.

İkincisi olan ***Tarihsel metot,*** normallik varsayımında bulunmaz. En büyük eksikliği, VaR'ın farklı varsayımlara ve zaman periyodunun seçimine duyarlılığının testinde esnek olmamasıdır.

Üçüncüsü ***Monte Carlo Simülasyonu Metodu***" yaklaşımı, geçmiş verileri ve çeşitli senaryoları birleştirebilir. En büyük eksikliği subjektif girişler ve hesapsal zorluktur (Dowd (1998)).

Yukarıda sözü edilen her üç metot ile elde edilen, VaR, risk ölçümü hakkındaki bir örnektir. Bu nedenle mümkün kayıpların büyüklüğü hakkında bilgi vermez. Bir dağılımın kuyruk bölgeleri, nadir fakat bir felaketle sonuçlanan olayları ifade etmek için kullanılabilir. Düzenleyiciler ve risk yöneticileri çoğunlukla dağılımın bu bölgesi ile ilgilenirler.

Olağan olmayan olaylar finansal risk yönetiminde merkezi bir konudur. Şu halde bu *ekstrem (uç)* olayların riskini ölçmemiz gerekmektedir. Bu istemi yerine getirmek için ekstrem değer teorisini kullanılabilir.

1.1. Ekstrem Risklerin Modellenmesi

Riskleri modellemek için kullanılan standart matematiksel yaklaşım olasılık teorisinin dilini kullanmaktır. Riskler, dünyanın öngörülemeyen gelecek durumlarını, kazanç ve kayıpları gösteren değerlere dönüştüren, rastsal değişkenlerdir. Bu riskler bireysel olarak düşünülebileceği gibi şu andaki risklerin önceki risklere bağlı olduğu bir stokastik sürecin bir parçası olarak da görülebilir. Riskin potansiyel değerleri bir *olasılık dağılımı* oluşturur. Risk dağılımının *kuyruğu*'ndaki değerler ***ekstrem olayları*** gösterir. Risk için belirli bir olasılık dağılımı seçmek suretiyle bir model geliştirilebilir.

Bu dağılımı, deneysel verilerin istatistiksel analizi ile tahmin edebiliriz. Bu durumda, dağılımın kuyruk alanının en iyi *tahminini* elde etmek için ekstrem değer teorisi kullanılabilir.

1.2. Ekstrem Risklerin Ölçümü

Riski ölçmekle kastedilen şey ; riskin dağılımını, risk ölçümü olarak bilinen bir sayı ile özetlemektir. En basit anlamda, riskin ortalama ve varyansını hesaplanabilir. Fakat bu ölçümler ekstrem risk hakkında fazla bilgi vermez. Ekstrem değer teorisi, küçük karların bir teorisi olmaktan ziyade, büyük kayıpların teorisi olarak geliştirilmiştir. İstatistikte bir stokastik sürecin ekstrem değerleri, verilmiş bir zaman periyodu üzerinden, en düşük gözlem (minimum) ve en yüksek gözlem (maksimum)'a karşılık gelir. Finansal piyasalarda ise, olağan periyotlar süresince ortaya çıkan ekstrem fiyat hareketleri, hisse senedi piyasasındaki çöküşler, olağan olmayan periyotlardaki krizlere karşılık gelir.

Bu durumda, tam dağılımın yerine, fiyat ve getiri dağılımının kuyrukları üzerine yoğunlaşmak pratik açıdan önemlidir. Kuyrukların parametrik olarak modellenmesi, örneklem deki ekstrem gözlemlerden daha yüksek kuantillere olasılık ataması yapmak içinde uygundur. Böyle bir yaklaşımı, ekstrem değer teorisi sağlar. Bu yaklaşım aynı zamanda kalın kuyruklu dağılımların kuyruk davranışını çalışmak içinde uygundur.

Bu çalışmada bir pozisyonun piyasa riskini hesaplamak için ekstrem değer teorisine dayanan, parametrik bir metod geliştirilmiştir. Ekstreme değer teorisi, ekstrem getirilerin istatistiksel dağılımı hakkında bazı ilginç sonuçlar verir. Şöyle ki, uzun bir zaman periyodunda gözlenmiş olan ekstrem getirilerin limit dağılımı büyük ölçüde, getirinin kendisinin dağılımından bağımsızdır. Bu sonuç ekstrem değer teorisinin gücünü ortaya koyan önemli bir sonuçtur.

Çalışma aşağıdaki şekilde organize edilmiştir. 2.Kısımda ekstreme değer teorisinin önemli sonuçları sunulmuştur. 3. Kısımda riskin değeri kavramı açıklanmış. 4.Kısımda, İMKB bileşik endeksinin deneysel analizi ile ilgili sonuçlar gösterilmiş, 5.Kısımda, ekstrem getirilerin limit dağılımı oluşturulmuş 6.kısımda da, sonuçlar sunulmuştur.

2. EKSTREM DEĞER TEORİSİ

Ekstrem deger teorisi, kökeni (Fisher ve Tippet ,1928), (Gnedenko ,1943) ve (Gumbel ,1958)'in öncü çalışmalarına dayanan, sıra istatistiği teorisinin bir dalıdır.

Teorinin Meteoroloji, Oşinografi, hava kirliliği vb. bir çok alanda uygulaması vardır. (Embrechts, et.al.,1997), (Reiss ve Thomas,2001), (Teugels ve Vynckier ,1996). Fakat teorinin finans alanına uygulanması oldukça yenidir.

Rastsal değişkenlerin toplamının modellenmesinde, merkezi limit teoremi'nin oynadığı rolün aynısını, rastsal değişkenlerin ekstrem değerlerinin dağılımının modellenmesi durumunda, ekstrem değer teorisi oynar. Her iki durumda da teori örnekleme çapını arttırdığımızda dağılımının limit durumunda ne olması gerektiğini söyler.

2.1. Blokların Maksimumu Metodu

Bu yaklaşımda , birbirini takip eden periyotlarda,(örneğin günlük, aylık veya yıllık) değişkenin değerlerinin maksimumu(minimuma) ele alınır. Seçilmiş olan bu gözlemler ekstrem olayları oluşturur ve ***blokların maksimumu*** olarak adlandırılır. Burada,

X : Getiri değişkeni; $X_1, X_2, ...X_n$ ise gözlenmiş getirileri göstermektedir.

2.1.1. Genelleştirilmiş Ekstreme Değer Dağılımı (Maksimumların Dağılımı)

$X_1, X_2,...$ bilinmeyen bir $F(x) = P\{X_i \leq x\}$ dağılım fonksiyonu ile riskleri veya kayıpları gösteren bağımsız aynı dağılıma sahip rassal değişkenleri göstersinler. Örnek maksiması ; $M_1 = X_1$ olmak üzere,

$$M_n = \mathrm{Max}\{X_1, X_2,....,X_n\} \quad , \qquad n \geq 2 \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır ve n tane kayıptan oluşan bu örneklemdeki en *büyük kaybı* ifade eder. Bağımsız ve aynı dağılıma sahip olma varsayımından, M_n'nin birikimli dağılım fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{aligned} P\{M_n \leq x\} &= P\{X_1 \leq x, ..., X_n \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x\}.....P\{X_n \leq x\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} F(x) = F^n(x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Min $\{X_1, X_2,....,X_n\}$ = - Max $\{-X_1, - X_2,..., -X_n\}$, olduğundan, örneğin *miniması*,

$$P\{M_n \leq x\} = 1 - (1 - F(x))^n \tag{2.3}$$

şeklinde ifade edilir.Pratikte getirilerin dağılımı önsel olarak bilinmez, bu nedenle maksimal (minimal) getirilerin de tam dağılımı bilinemez. Deneysel dağılım fonksiyonu, çoğunlukla $F^n(x)$ için iyi bir takdirci değildir. $n \to \infty$'da $F^n(x) \to 0$ veya 1'e yaklaşır. M_n'in limit dağılımı aşağıdaki teoremle verilir.

Fisher–Tippett Teoremi : (X_n) bağımsız aynı dağılımlı rastsal değişkenlerin bir dizisi olsun. $C_n > 0$ ve $d_n \in \Re$ sabitleri ve

$$\frac{M_n - d_n}{C_n} \to H \tag{2.4}$$

olacak şekilde dejenere olmayan bir H dağılım fonksiyonu varsa, bu durumda H, dağılım fonksiyonu aşağıdaki üç dağılım ailesinden birine ait olur.

Frechet $\quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{(-x^{-\alpha})}, & x \rangle 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$

Weibull $\quad \psi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{[-(-x^{-\alpha})]}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \alpha < 0$

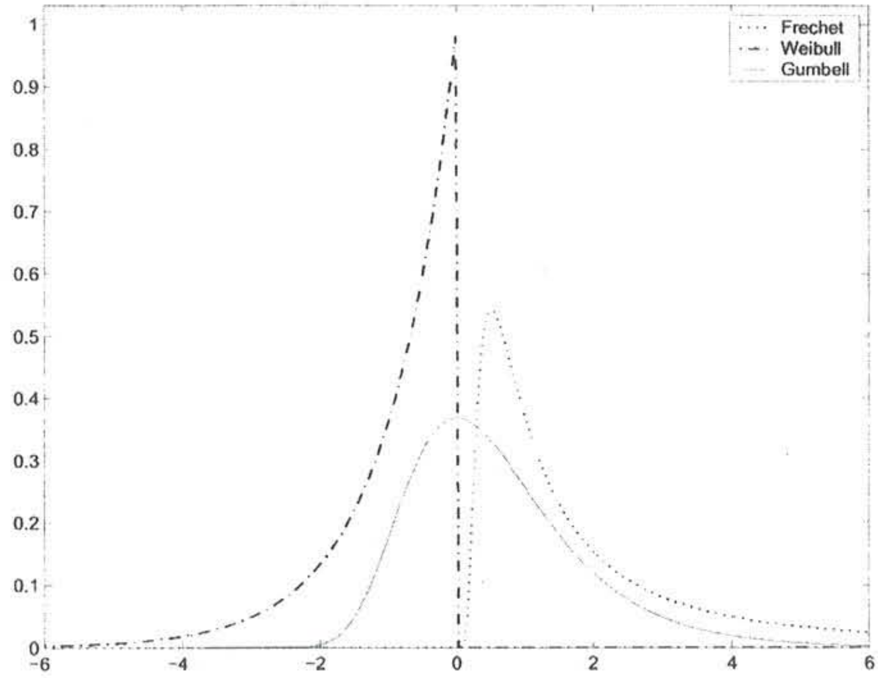
Gumbel $\quad \Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \Re$

Fisher – Tippett teoremine göre şayet standartlaştırılmış maksima dejenere olmayan bir dağılıma yakınsıyorsa, o zaman maksimanın dağılımı, gözlenmiş olan verilerin dağılımına bakılmaksızın yukarıdaki üç dağılım ailesinden birine ait olacaktır. İstatistikte, Weibull dağılım fonksiyonu, $F_\alpha(x) = 1 - e^{-x^\alpha}$, $x > 0$ olarak tanımlanır. Weibull dağılım fonksiyonu $\Phi_\alpha(x)$, $(-\infty,0)$ üzerinde yoğunlaşmıştır ve

$\psi_\alpha(x) = 1 - F_\alpha(-x)$, $x < 0$ şeklinde tanımlanmıştır. Yukarıdaki $F_\alpha(x)$ ve $\psi_\alpha(x)$, tam olarak farklı ekstrem davranışlara sahiptirler. Ekstrem değer teorisinde, $\psi_\alpha(x)$, Weibull dağılımı olarak alınır(Embrechts et.al.,1997). Ayrıca tüm mümkün dağılımların kuyrukları, bu üç katağori içinde sınıflandırılır.

i) İnce kuyruklu dağılımlar : Tüm momentleri sonlu, birikimli dağılım fonksiyonu kuyruklarda üstel olarak azalan dağılımlardır.

ii) Kalın kuyruklu dağılımlar : Birikimli dağılım fonksiyonları kuyruklarda bir kuvvet kanununa göre azalan dağılımlardır.



Şekil 1. Frechet,Weibull ve Gumbel dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları

iii) Sonlu kuyruklar ile kalın kuyruklu dağılımlar

Bu kategoriler sadece, α *kuyruk indeks parametresi* kullanılarak biri diğerinden ayrılabilir.

i) Kategorisi için $\alpha = \infty$

ii) Kategorisi için $\alpha > 0$

iii) Kategorisi için $\alpha < 0$

$\xi = 1/\alpha$ alınarak,(Von Mises,1936) ve (Jenkinson,1955) bu üç dağılım ailesi için tek bir parametre ile gösterebilen bir dağılım önermişlerdir. Bu gösterim ***Genelleştirilmiş Ekstreme Değer Dağılımı*** olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$H_\xi(x) = \begin{cases} e^{\left\{-(1+\xi x)^{-1/\xi}\right\}}, & \xi \neq 0, \quad 1+\xi x > 0 \\ e^{\left(-e^{(-x)}\right)}, & \xi = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

$\xi = 1/\alpha$ *şekil parametresi* dir ve H_ξ dağılımınınkuyruk davranışını belirler.

$\alpha = 1/\xi$ *kuyruk indeksi* olarak adlandırılır.

Genelde , F dağılım fonksiyonu,

$$F_{\mu,\sigma}(x) = F[(x-\mu) / \sigma]$$

şeklinde yazılır. *Genelleştirilmiş Ekstrem Değer Modeli* aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$H_{\xi,\mu,\sigma}(x) = H_\xi[(x-\mu)/\sigma] \qquad (2.6)$$

Genelleştirilmiş ekstrem değer tipleri

Baz (gözlenmiş) verilerin F dağılımının kuyruk davranışı genelleştirilmiş ekstrem değer dağılımının ξ şekil parametresi ile belirlenir.

- F dağılımının kuyruğu üstel olarak azalıyorsa, o zaman H_ξ, *Gumbel ailesi* dir ve

$\xi = 0$ olur. *Gumbel ailesinin hareket alanındaki dağılımlar ince kuyrukludur. Normal, lognormal, üstel ve gamma* bu sınıfa giren dağılımlardır.Bu dağılımların tüm momentleri mevcuttur.

- F dağılımının kuyruğu bir kuvvet fonksiyonuna göre azalıyorsa,

$$1\text{-}F(x) = c.x^{-1/\xi} = x^{-\alpha}$$

c bir sabit, o zaman H_ξ dağılımı , *Frechet ailesi* ni gösterir ve bu durumda $\xi > 0$'dır. *Frechet ailesinin hareket alanındaki dağılımlar kalın kuyrukludur. Pareto, Cauchy, Student– t,* $\alpha \in (0,2)$ *karakteristik üssü ile Kararlı Paretian dağılım ve çeşitli karma modeller bu sınıfa girer.* Bu dağılımların tüm momentleri sonlu değildir.Örneğin, $k \geq \alpha = 1/\xi$ için $E[X^k] = \infty$ dur. *Frechet tipi,* finansal veriye en uygun olan sınıftır

- F dağılımının kuyruğu sonlu ise, o zaman H_ξ dağılımı *Weibull ailesi* ni gösterir ve bu durumda,

$\xi < 0$' dır. Weibull ailesinin hareket alanındaki dağılımlar ,üniform dağılım ve beta dağılımıdır. Bu dağılımların tüm momentleri mevcuttur. Yani getiri dağılımları sonsuz kuyruğa sahip olmadığı zaman Weibull dağılımı elde edilir.

Bu teknik sonuçlar, ekstrem değer teorisinin genelliğini göstermektedir. Ekstrem değer dağılımları sadece kuyruk indeksi, ortalama ve ölçek (skala) parametrelerine göre farklılık gösterirler. Bu ise VaR'ın tahmin edilmesinde, ekstrem değer yaklaşımına büyük bir avantaj sağlamaktadır.

2.1.2. Parametre Tahmini

ξ, μ, σ parametrelerinin değerlerini tahmin etmek için bir çok farklı yöntem mevcuttur.

Parametrik Yaklaşım : Gerçekleşmiş ekstremlerin tam olarak bu dağılımdan çekilmiş olduğunu kabul ederek bu parametrelerin tahmin edilmesinden ibarettir. Genel olarak kullanılan iki parametrik teknik,*Ençok olabilirlik* ve *Regresyon* metodudur.

Non parametrik yaklaşım : Ekstremlerin tam olarak asimptotik bir dağılımdan çekilmiş olduğu varsayımında bulunmaz ve doğrudan X değişkenin kuyruğunun tahmin edilmesine dayanır. Hill tahmincisi, Pickands tahmincisi ve Olasılık Ağırlıklandırılmış Momentler Metodu buna örnek olarak verilebilir.

Ençok Olabilirlik Tahmini

$X_1, X_2,..., X_T$, bilinmeyen bir F birikimli dağılım fonksiyonu ile bağımsız aynı dağılımlı kayıpları göstersin. M_T örnek maksimumu olsun. Gözlem serisini,aşağıda verildiği gibi, birbirini kesmeyen, her birinin büyüklüğü eşit ve, n = T/m olan m tane bloğa bölelim.

$$[X_1, X_2,..., X_n| X_{n+1}, X_{n+2},...X_{2n}| ....| X_{(m-1)n+1},......X_{mn}]$$

M_n^j : j .bloğun maksimum değerini göstermektedir(j =1, 2, ...m).

$\{ M_n^{(1)}, M_n^{(2)},....,M_n^{(m)} \}$ kümesi kullanılarak , ξ, σ_n ve μ_n için maksimum olabilirlik fonksiyonu oluşturulur.Bu durumda, $\xi \neq 0$, için Log-Ençok olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$Log(\mu,\sigma,\xi) = -mLog(\sigma) - (1+1/\xi)\sum_{i=1}^{m} Log\left[1+\xi\left(\frac{M_n^{(i)}-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\left[1+\xi\left(\frac{M_n^{(i)}-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}$$

Log-Ençok olabilirlik fonksiyonu $1+\xi\left(\frac{M_n^{(i)}-\mu}{\sigma}\right) > 0$, kısıtı altında maksimize edilir.

Ençok olabilirlik tahmininin yanlılığı, blok büyüklüğü olan n arttırılarak azaltılır ve tahminin varyansı ise blok sayısı, m arttırılarak azaltılır.

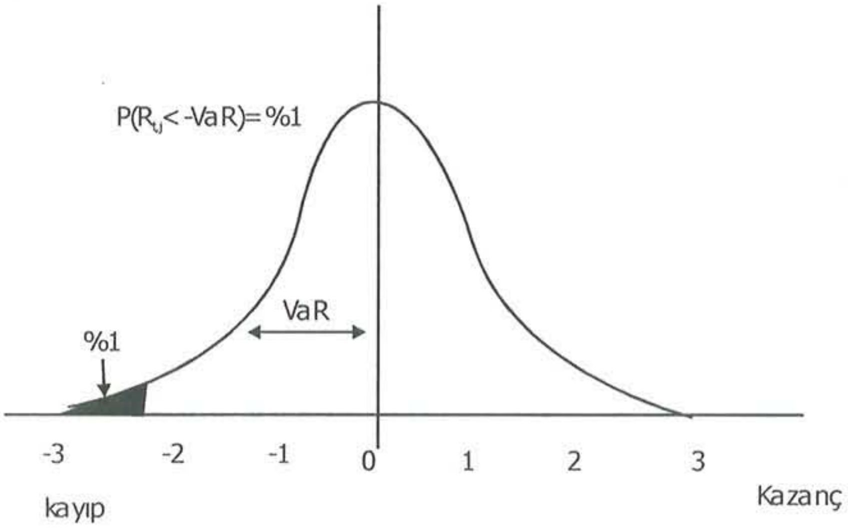
3. RİSKİN DEĞERİ

Finansal kurumlar, menkul kıymetlerin istenmeyen yöndeki fiyat hareketlerinden ortaya çıkan *piyasa risklerini* değerlemek isterler. Piyasa riskini değerlemek için genel olarak kullanılan bir ölçüm *Riskin Değeri(Riske Maruz Değer*)(VaR)'dir. *VaR, normal piyasa koşullarında, belirli bir güven seviyesinde ve belirli bir zaman aralığında beklenen en kötü kaybın miktarını ölçer.*

Formal olarak ifade edilecek olursa, VaR tek yanlı güven aralığının üst sınırı olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$P(R_{t,\tau} < - VaR_c) = 1- c \qquad (3.1)$$

Burada, $R_{t,\tau}$ portföyün (t, t $+\tau$] periyodundaki getirisidir. c ise, güven seviyesi veya hedef olasılıktır. c'nin tipik değerleri 0,95, 0.975 veya 0.99'dur. Böylece gözlenmiş olan zaman serisinin VaR degerlerini hesaplamak için; portföy getiri dağılımlarının %5, %2.5 veya %1 gibi en düşük kuantil lerinin tahmin edilmesi gerekir.



Şekil 2. Normal dağılıma göre VaR

VaR'ın yukarıdaki tanımından ,aşağıdaki ifade elde edilebilir.

$$1-c=F_R(-VaR_c)=\int_{-\infty}^{-VaRc} f_R(x)dx \tag{3.2}$$

burada $F_R(x)=P(R\leq x)$, portföy getirisi (R) nin birikimli dağılım fonksiyonu , $f_R(x)$'ise (R)'nin olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Eğer getiriler bir parametrik dağılımla modellenebiliyorsa VaR'lar dağılımın parametrelerinden türetilebilir. Portföyün tek bir menkul kıymetten oluştuğunu ve bu menkul kıymetin getirilerinin ise normal dağılmış olduğu kabul edilsin. VaR'lar ortalama (μ) ve standart sapma(σ) ile tam olarak belirlenebilir.Bu durumda, VaR degerinin hesaplanması, standart normal dağılımın (1-c) kuantili,(Z_{1-c})'nin bulunmasına indirgenmiş olur.

$$1-c=\int_{-\infty}^{-VaRc}\phi_{\mu,\sigma}(x)dx=\int_{-\infty}^{Z_{1-c}}\phi_{0,1}(z)dz \tag{3.3}$$

Buna göre VaR değeri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$-\mathrm{VaR}_c = Z_{1-c}\,\sigma + \mu$$

Burada $\phi_{\mu,\sigma}$ (x), μ ortalama ve σ standart sapmalı normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

4. DENEYSEL ANALİZ

4.1. Veriler

Çalışmada, İMKB100 endeksinin günlük logaritmik getirileri kullanılmıştır. Veriler 1.1.1998 ve 3.1.2002 tarihleri arasını kapsamaktadır.

4.2. Normallik Testi

Bir gözlemler serisinin normal dağılıma uygunluğu çeşitli yöntemlerle test edilebilir.Bu çalışmada, endeks getiri serisinin normal dağılıma uygunluğunu test etmek için, çarpıklık-basıklık ölçüsü,QQ grafiği ve Jarque-Bera istatistiği kullanılmıştır.

$$\hat{S} = \text{Çarpıklık} = \frac{m_3}{s^3} \quad \text{ve} \quad \hat{K} = \text{Basıklık} = \frac{m_4}{s^4}$$

$$m_k = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_t - \overline{X})^k, \qquad s^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(X_t - \overline{X})^2$$

T : Gözlemlerin sayısı

Normallik varsayımı altında, çarpıklık = 0, Basıklık = 3'dür

Jarque – Bera İstatistiği

Getirilerin normal dağılmış olduğu hipotezi Jarque – Bera istatistiği kullanılarak test edilebilir. Bu istatistik, tahmin edilen çarpıklık ve basıklığın bir fonksiyonudur ve aşağıdaki şekilde verilir:

$$JB = \frac{T}{6}\left(\hat{S}^2 + \frac{(\hat{K}-3)^2}{4}\right)$$

Normallik varsayımını reddedebilmek için JB ne kadar büyük olmalıdır? Getirilerin normal dağılmış olduğu hipotezi altında JB, 2 serbestlik dereceli bir ki-kare dağılımına sahiptir. %5 anlam seviyesinde bir test için 2 serbestlik dereceli ki-kare dağılımının sağ kuyruğunun kritik değeri : $\chi^2_2(0.05) = 5.99$ dir. Eğer JB > 5.99 ise

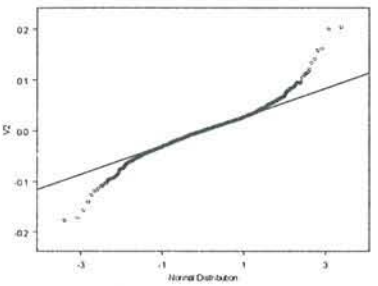
$$H_0 = \{\text{Getiriler normal dağılmıştır}\}$$

sıfır hipotezini reddedebiliriz. p-değeri, $P(X_2^2 \geq JB)$ olasılığı ile belirlenir.Eğer p değeri 0.05 veya daha küçükse, getiriler normal dağılmamıştır.

Tablo 1. Log endeks getirileri için özet istatistikler

Ortalama $\hat{\mu}$	Stan.Sap. $\hat{\sigma}$	Çarpıklık $\hat{S}$	Basıklık $\hat{K}$	JB istatistiği
0,13%	3,66%	0,41625	3,99314	74,52263

Yukarıdaki tablodan da görülebileceği gibi *getiri dağılımı asimetrik* olup *hafif sola çarpık* ve normal dağılıma göre *daha sivri ve kalın kuyruklu* dur.Bu sonuşlar aşağıda verilmiş olan QQ-grafiği tarafından da desteklenmektedir.



Şekil 3. İMKB100 endeks getirilerinin QQ-grafiği

Varyans–kovaryans metodu ile hesaplanmış olan VaR değerleri gerçek VaR değerlerini eksik tahmin edecektir. Özellikle % 95 den daha yüksek güven seviyelerinde bu hata daha da büyüyecektir.

5. EKSTREM DEĞER YAKLAŞIMI

Ekstrem değer yaklaşımı kullanılarak VaR'ın tahmin edilmesi aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır.

Adım1. *Getiri sıklığının seçilmesi*; Bu genelde likidite ve pozisyon riskinden etkilenmektedir. Bu çalışmada günlük log-getiriler kullanılmaktadır..

Adım2. *Blok (periyot) uzunluğunun seçimi*; Bunun için örnek uzunluğu T, birbirini kesmeyen, herbiri n-tane getiri gözleminden oluşan alt periyotlara bölünmektedir. (Christofferson,1998) 10 veya 15 ticaret gününe bölmenin, gözlemlerin bağımsız ve aynı dağılmış olması için yeterli olacağını önermektedir.(Longin,2000) ise bir aylık (21 günlük) periyot uzunluğunu kullanmaktadır. Bu çalışmada ise 20 günlük blok uzunlukları kullanılmaktadır.

Adım3. *Maksimum getirileri, M_n'yi seçmek.*

Adım4. Maksumların limit dağılımı için parametre tahmini; Üç parametre, olasılık ağırlıklandırılmış momentler metoduna göre tahmin edilecektir.

Tablo 2. Genelleştirilmiş ekstrem değer dağılımının parametrelerinin tahminleri

Maksima	μ	α	ξ
n=20	0,05623757	0,0246110	0,068374

Ekstrem değer dağılımının karakterini gösteren en önemli parametre ξ şekil parametresidir. Yukarıdaki tablodan da görülebileceği gibi ξ = 0,068374 olarak bulunmuştur. Bu değer maksimumların dağılımının *Frechet* ailesi'ne ait olduğunu göstermektedir.

Adım5. Ekstrem değer dağılımı kullanılarak VaR'ı hesaplamak: Standartlaştırılmış maksimumlar serisi ve genelleştirilmiş ekstrem değer dağılımı kullanılarak Var aşağıdaki şekilde hesaplanabilir; $M = (M_n^{(j)}; j = 1,2,...m)$ olmak üzere,

$$p = P(M \leq VaR) = \exp\left[-(1+\hat{\xi}(VaR-\hat{\mu})/\hat{\sigma}\right]^{-1/\hat{\xi}}$$

$$VaR_p = \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}}\left[(-\ln(p))^{-\hat{\xi}} - 1\right]$$

p, maksimum getirinin VaR eşiğini geçmeme olasılığıdır. p güven seviyesini gösterir ve %95, %99 alınabilir. Böylece farklı güven seviyelerindeki VaR kolayca hesaplanabilir.

Tablo 2. Normal ve maksimumlar için genelleştirilmiş ekstrem değer dağılımı ile hesaplanmış VaR değerleri

Normal	%95 VaR	%99 VaR
n=20	0.0615	0.086444
Maksimumlar		
n = 20	0,13724	0,1891999

Ekstrem değer yaklaşımı ile bulunan VaR değerlerini varyans kovaryans değerleriyle hesaplanan VaR ile karşılaştırırsak sırasıyla %95 için VaR_{95} = 0,0615 ve %99 için VaR_{99} = 0,086444 olduğu görülür.

Böyle bir sonuç, getiri serilerinin kalın kuyruklu olması durumunda, normal dağılımı kullanmanın yarattığı eksik sonuçlara işaret etmektedir: Normal dağılım varsayımı altında VaR ın büyük ölçüde eksik tahmin edilmiş olduğu görülmektedir.

Olasılık Ağırlıklandırılmış Momentler Metodu

Bu kısımda ,genelleştirilmiş ekstrem değer dağılımının parametrelerinin olasılıklar ile agırlıklandırılmış momentler metodu kullanılarak nasıl takdir edileceği açıklanmaktadır.

- Olasılıklarla ağırlıklandırılmış r. momentler aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$w_r = \int_0^1 Q(p)p^r dp = E\{Q(p)p^r\}$$

burada p, [0,1] aralığı üzerinde bir üniform dağılıma sahiptir.n-çapındaki bir rastsal örneklemden elde edilen $x_{1,n} > ... > x_{n,n}$ sıra istatistiği için, karşılık gelen örnek değerleri;

$$\hat{w}_r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{j,n} P_{j,n}^r \quad , \quad r = 0,1,2$$

dir.

$$P_{j,n} = \frac{n - j + \frac{1}{2}}{n} \quad veya \quad \frac{n-j+1}{n+1} \quad (= E(U_{j,n}) \quad veya \quad U_{j,n}$$

$$P_{j,n}^r = (P_{j,n})^r \quad veya \quad E\{(U_{j,n})^r\}$$

μ, σ ve ξ' parametrelerinin olasılıklarla ağırlıklandırılmış moment takdircileri,bu parametrelerinteorik değerleri yerine ,örnekten elde edilmiş olan $\hat{w}_0 = \bar{x}$, $\hat{w}_1$ *ve* $\hat{w}_2$ değerleri konularak bulunur.

$$m_1 = 2w_1 - w_0 \quad ve \quad m_2 = 3w_2 - w_0$$

olarak tanımlansın.

i) $\xi < 1$ olan Genelleştirilmiş ekstrem deger dağılımı için ξ parametresi aşağıdaki denklem çözülerek takdir edilir..

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{3^\xi - 1}{2^\xi - 1} \quad \text{yani,} \quad \xi = 7.8590.C - 2.9554C^2$$

$$C = \frac{\ln 2}{\ln 3} - \frac{m_1}{m_2} \quad , \quad \sigma = \frac{m_1 \xi}{(2^\xi - 1)\Gamma(1-\xi)}, \quad \mu = w_0 + \frac{\sigma}{\xi}\{1 - \Gamma(1-\xi)\}$$

burada,

$$\Gamma(v)=\int_0^{\infty} t^{v-1}e^{-vt}dt \qquad \text{Gamma fonksiyonudur.}$$

ii) $\xi < 1$ olan Genelleştirilmiş Pareto dağılımının parametrelerinin takdiri;

$$\xi = 3 - 2\left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right)^{-1}$$

$$\sigma = m_1\,(2-\xi)\,(1-\xi) \qquad \mu = w_0 - \frac{\sigma}{1-\xi}$$

6. SONUÇ

Bu çalışmada, ekstrem değer teorisinin dağılımın kuyrukları ile ilişkili bir risk ölçümü olan VaR 'ın hesaplanmasında nasıl kullanılabileceği gösterildi. İlk olarak, İMKB 100 endeksinin tarihsel getiri dağılımının normalden büyük ölçüde saptığı gösterilmiştir. Getiri dağılımının negatif çarpık ve normalden daha büyük bir basıklık ile kalın kuyruklu olduğu görülmüştür. İMKB çok oynak bir piyasa olduğundan, riskin ölçümü için tam olasılık dağılım fonksiyonundan ziyade dağılımın kuyruklarının modellenmesi daha gerçekçi bir yaklaşım olacaktır. Bu nedenle ekstrem değer yaklaşımının kullanımı anlamlıdır.

İkinci olarak, maksimumlar için genelleştirilmiş ekstrem değer dağılımının, şekil parametresinin pozitif çıkması, limit dağılımının bir Frechet tipi dağılım olduğunu gösterir.

Üçüncü olarak, kalın kuyruklu dağılımlarla karakterize edilen piyasalar için ekstrem değer yaklaşımı ile hesaplanan VaR değeri, varyans – kovaryans metodu ile hesaplanan VaR değerinden anlamlı şekilde farklıdır.

Ekstrem değer yaklaşımının, getiriler için bir dağılım kabul etmeye gereksinimi yoktur. Böylece, model riski iyice azaltılmış olur.

Sonuç olarak, Genelleştirilmiş ekstrem değer dağılımı parametrik bir modeldir, % 99 gibi yüksek güven seviyeleri için örnek dışı VaR hesaplamalarıda mümkündür.Bu yaklaşım kredi riskinin değerini hesaplamak içinde kullanılabilir. Genel olarak, piyasa riski, kredi riski ile ilişkilidir. Çünkü her ikisinide etkileyen genel faktörler aynıdır.

KAYNAKLAR

Bassle Committee On Banking Supervision (1996), *Ammendment to Capital Accord to Incorparate Market Risks*, http://www.bis.org.

BEIRLANT,J.,TEUGELS,J.,VYNCKIER,P.(1996),*PraticalAnalysis of Extreme Values*, Leuven University Press, Leuven.

CRRISTOFFERSEN,P.F.(1998),*Evaluation Interval Forecasts*. International Economic Review, 39. (4), 841-862.

DOWD, K.(1998), *Beyond Value at Risk,* Wiley, Chichester.

DUFFIE,D.,PAN,J.,(1997), *An Overview of Value – at Risk*, The Journal of Derivatives, Spring, 7-49.

EMBRECHTS, P.,KLUPPELBERG,C.,MIKOSCH, T.(1997),*ModellingExtreme Events for Insurance and Finance*, Springer – Verlag, Berlin.

FISHER,R.A.,TIPPETT, L.H.C. (1928), *Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample*, Proceedings of Cambridge Philosophical Society, 24, 180-190.

JENKINSON, A.F.(1955),*The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Meteorological Elements,* Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 81, 145-158.

GNEDENKO,B.V.(1943),*Sur la distribution limite du terme maximum d une serie aleatoire.* Annals of Mathematics 44,423-453.

GUMBEL,E.J.(1958),*Statistics of Extremes*. Columbia University Press,Newyork.

JORION, P. (2001). *Value at Risk,* Irwin, Chicago.

LONGIN, F.M. (2000). *From Value at Risk to Stress Testing : The Extreme Value Approach,* Journal of Banking and Finance, 24, 1097-1130.

MISES,R.Von(1936),*La distribution de la plus grande de n valeur.*Reprinted in Selected Papers II,Amer.Math.Soc.,Providence,R.I.(1954),271-294.

REISS,R.D.,THOMAS,M.(2002).*Statistical Analysis of Extreme Values* (2nd Edition), Birkhauser.

ESTİMATİNG VALUE - AT RİSK WİTH EXTREME VALUE THEORY

ABSTRACT

We estimate Value at Risk (VaR) using the extreme value theory. VaR is a method emerging recently in risk management. Extreme value theory models the tails of the return distribution rather than the whole distribution, which is more meaningful during the volatile market conditions, under which the distribution of returns almost has fat tail. Risk managers are more concerned on the tail. The limit distribution of extreme returns observed over a long time period is independent of the distribution of returns itself. In this case, it is *not necessary to assume a specific distribution for returns, which is a great advantage of extreme value theory on VaR calculation. In contrast, variance – covarience method with normality assumption usually under estimates the risk value. The maxima ve minima series from İstanbul stock exchange index returns are found to be satisfactorily modelled within an extreme value framework and the Var measures generated with this method are found to be much different from those generated by variance – covariance method. The approach based extreme value theory to compute VaR cover market conditions ranging from usual environment considered by the ordinary VaR methods to the financial crises which are focus of stress testing. Moreover, extreme value approach can also be used to calculate credit VaR.*

Key Words: Value-at Risk(VaR),Extreme value theory,Generalized extreme value theory,Heavy tails, Parameter estimation.