SAKARYA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ
SAKARYA UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE

e-ISSN: 2147-835X
Dergi sayfası: http://dergipark.gov.tr/saufenbilder

Geliş/Received
18.11.2016
Kabul/Accepted
03.03.2017

Doi
10.16984/saufenbilder.298954

Dinamik sistemlerin eşlenmesi

Oğul Esen [1*]

ÖZ

Karşılıklı etki-tepki içindeki iki fiziksel sistemin ortak hareketlerini veren denklemler (eşlenmiş Lie-Poisson ve eşlenmiş Euler-Poincaré) elde edilecektir. Eşlenmiş denklemlerin literatürde çokça çalışılmış yarı-direkt çarpım teorisinin genişlemesi olduğu gösterilecektir. İki örnek verilecektir. İlki, köşegen elemanları 1 olan alt ve üst üçgensel matris gruplarının oluşturduğu eşlenmiş Lie grubu üzerinde eşlenmiş Lie-Poisson denklemlerinin yazılmasıdır. İkinci örnek ise ikinci sınıf nilpotent grupların kendiyle eşlenmesi ile elde edilecek Lie grupları üzerinde eşlenmiş hareket denklemlerinin yazılmasıdır. İki yeni açık problem sunulacaktır. Bunlardan ilki, plazma ve akışkan arasında pür geometrik yapının eşlenmiş dinamik düzleminde ele alınması, diğeri ise karşılıklı etki-tepki içindeki iki kesikli sistemin eşlenmesidir.

Anahtar Kelimeler: Eşlenmiş çiftler, Lie-Poisson denklemleri, Euler-Poincaré denklemleri, ikinci sınıf nilpotent grup, kesikli sistemler.

Matching of dynamical systems

ABSTRACT

The equations (matched Lie-Poisson and matched Euler-Poincaré) are written for a couple of mutually interacting physical systems. It is shown that the matched dynamics is a generalization of the well-developed semi-direct product theory. Two examples are provided. The first one is to write the matched equations for the matched pair of upper and lower triangular matrix groups whose diagonal entries are 1. The second example is to write the matched equations for the Lie group obtained by matching a nilpotent group of class two by itself. Two new open problems are presented. One of these is to write pure geometric relation between the plasma and fluid in the framework of the matched dynamics. The other is to match two discrete systems under mutual interaction.

Keywords: Matched pairs, Lie-Poisson equations, Euler-Poincaré equations, nilpotent group of class two, discrete systems.

---

[*] Sorumlu Yazar / Corresponding Author
1 Gebze Teknik Üniversitesi, Temel Bilimler Fakültesi, Matematik Bölümü, Kocaeli - oesen@gtu.edu.tr

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

İki (dinamik/mekanik) sistem ve bu sistemlerin hareket denklemlerini göz önüne alalım. Eğer bu iki sistem karşılıklı etki-tepki ilişkisi içinde ise birbirlerinin hareketlerine müdahale edeceklerdir. Bu nedenle, ikilinin beraber (eşlenmiş) hareketi süresince, sistemler tek başlarına davrandıkları gibi davranamayacaklardır. Diğer bir ifade ile eşlenmiş sistemin hareket denklemlerini yazmak, bireysel hareket denklemlerinin yan yana getirilmesiyle başarılamaz. Eşlenmiş sistemin hareket denklemleri, bireysel hareket denklemlerine bir takım yeni terimler eklenerek elde edilmelidir. Bu ek terimler, sistemlerin kendi geometrileri ve etkileşim türü tarafından belirlenecektir.

Eşlenme için zorunlu olarak iki ayrı sistem gerekmez. Tek bir fiziksel sistemin iki ayrı özelliğinin eşlenmesi başarılıp, sistemin bu iki özelliğini beraber yöneten tek bir hareket denklemi yazılabilir. Örnek olarak, yüklü bir akışkanı Maxwellyen özellikleriyle beraber inceleyerek magneto-hidrodinamik, elektro-hidrodinamik denklemlerini veya yer çekimi etkisi altıntaki Euler topacını rijid dönme ve gravitasyonu beraber içerecek şekilde modellemek verilebilir.

Literatürdeki bu tip örneklerin tümünde bütünleşik sistemin konfigürasyon uzayının iki alt sistemininn bir yarı-direkt çarpımı olduğu, yani iki alt sistemden yalnızca birinin diğeri üzerine etki ettiği, görülmektedir. Bu tip sistemlerin analizi 1980'lerle beraber özellikle D.D. Holm, J.E. Marsden, P.J. Morrison, T. Ratiu ve A. Weinstein tarafından başlatılmıştır [20] [21] [41]. Yarı-direkt çarpım teorisi, katı cisim dinamiği [19], magneto-hidrodinamik, elektro-hidrodinamik [17] [13] [18] [22] gibi akışkanlar teorisi, Maxwell-Vlasov [54] [55] gibi plazma theorisi ve elastisite teorisi [33] kaynaklı birçok sistemin analizinde uygulama alanı bulmuştur. Ayrıca, kontrol teorisi [8], DNA gibi yüklü molekül zincirleri [11], görüntü temsilleri [7], sıvı kristaller [9] gibi çok çeşitli alanlarda da çalışmalar mevcuttur.

1.1. Makalenin Amacı (The purpose of the paper)

Yarı-direkt çarpım teorisinde sistemlerden sadece biri diğerine etki etmektedir. Bu anlamda yarı-direkt çarpım teorisi makalede arayış içinde olduğumuz çift taraflı etki-tepki ilişkisini karşılamamaktadırlar. Karşılıklı etkileşim içerisindeki iki sistemin birbirini etkileyerek oluşturdukları eşlenmiş sistemler konusunda literatürde boşluk bulunmaktadır. Tek taraflı etki, çift taraflı ilişkinin özel bir durumu olacağından motivasyonel olarak ve yol gösterme anlamında yarı-direkt çarpım teorisi değerlidir.

Makalenin üzerinde yoğunlaşacağı ana problem, karşılıklı etki-tepki içindeki (konfigürasyon uzayı Lie grubu olan) iki sistemin (Hamilton ve/veya Lagrange formundaki) bireysel hareket denklemleri ile başlayarak, eşlenmiş sistemin hareketini yönetecek denklem takımını pür geometrik ve analitik bir açıdan belirlemektir. Konfigürasyon uzaylarının Lie grubu seçilmesi etki-tepkinin tanımlanabilmesi için gereklidir.

Kaçınılmaz olarak, birleştirmeyi (eşlenmeyi) bilmek parçalamayı da bilmeyi sağlayacaktır. İki sistemin nasıl eşleneceği belirlendiğinde, verilen bir sistemi birbiri ile etkileşen görece daha basit yapılı iki alt sisteme parçalayıp, verilen sistemin dinamiğini bu alt sistemlerin dinamiğinden inşa etmek de mümkün olacaktır.

Bu makaleye öncül olarak karşılıklı etki-tepki içerisindeki sistemlerin Hamilton dinamiğinin çalışıldığı [13] [14] ile Lagrange dinamiğinin çalışıldığı [15] verilebilir. Makale, öncül çalışmalarda yapılan tartışmaları teknik detaylarından arındırarak, bu çalışmalardaki sonuçları karşılaştırmakta, öncül makalelerde ayrı ayrı kurulan motivasyon ve hesapları tek bir bütün içinde sunmaktadır. Eşlenmiş Lie-Poisson ve eşlenmiş Euler-Poincaré denklemlerinin yeni, daha kısa ve geometrik ispatlarını içermektedir. Lie-Poisson ve Euler-Poincaré denklemlerinin üzerinde durulmasının sebebi, makale içinde kaynaklar üzerinde de tartışılacağı üzere, katı cisimden akışkana, plazmadan kontrol teorisine kadar birçok sistemin bu formlarda yazılabilmesidir.

Makalede, eşlenmiş sistemlerin hareket denklemleri ve yarı-direkt sistemlerin dinamik denklemleri arasındaki ilişki geniş bir literatür taraması eşliğinde açıkça ortaya konmaktadır. Elde edilen teorik sonuçlar özel bir örnek olarak köşegen elemanları 1 olan alt ve üst üçgensel matris gruplarının oluşturduğu eşlenmiş Lie grubu yapısı üzerinde detaylı olarak çalışılacaktır. Konfigürasyon uzayları aynı olan iki fiziksel sistemin eşlenmesi ilk defa bu makalede verilecektir. Bu amaç doğrultusunda konfigürasyon uzayı ikinci sınıf nilpotent grup seçilecektir [12]. İkinci sınıf nilpotent gruplar, aralarında (3 boyutlu uzayda dönme hareketini incelenmesine de imkân veren) kuaterniyonlar grubu, dihedreal grup gibi grupları içeren, çok geniş bir aile oluşturmaktadır ve bu anlamda yapılan çalışma birçok özel durumu içermektedir.

Makalede, iki yeni açık problem de sunulacaktır. İlk açık problem, plazma yoğunluk fonksiyonunun hareketini yönlendiren Vlasov denklemleri ile ideal izotropik akışkanı modelleyen Euler denklemleri arasındaki ilişkinin eşlenmiş hareket denklemleri cinsinden nasıl anlaşılabileceğidir. İkinci açık problem, karşılıklı etki-tepki içerisindeki kesikli sistemler için eşlenmenin nasıl başarılacağıdır. Kesikli sistemler özellikle sayısal çalışmalar için önem arz etmektedir.

1.2. Yöntem (The Method)

Literatürde geometrik mekanik adıyla anılan bir disiplinlerarası çalışma alanına başvurulacaktır [1] [4] [26] [28] [35] [45]. Geometrik mekanik, diferansiyel ve cebirsel geometri, simplektik ve Poisson geometrileri, katmanlar ve demetler teorisi, Lie grubu ve Lie cebirleri, fonksiyonel analiz gibi pür matematik teorilerinin arakesitinde olan, çıkışı ve ilk motivasyonu itibariyle analitik mekanikle olsa da, günümüzde fizik, kimya, biyoloji, finans gibi bilim dalları ile etkileşim içindeki bir aradisiplindir. Geometrik mekanik üzerinde çalıştığı sistemin geometrizasyonunu elde etmeye çalışır. Geometrizasyon sistemin konfigürasyon uzayının tam olarak belirlenmesi, tanjant ve kotanjant demetlerinin tanımlanması, Lagrange ve Hamilton denklemlerinin yazılması, sistem üzerindeki kısıtların geometrik tanımlarının yapılabilmesi, Legendre transformasyonlarının inşası, simetrilerinin belirlenmesi, hareket denklemlerinin indirgemesi gibi işlemlerin bütünüdür. Bu işlemler sonucu sistemin davranışı için kalitatif analiz daha derinlemesine yapılır; kontrol, stabilite, asimtotik davranış gibi çalışmalar analitik bir düzlemde başarılır. Geometrik mekaniğin en zengin yanı, tüm bu geometrizasyon süreçlerinin yeni matematiksel sorular ve sonuçlar da üretmesidir. Bu anlamda teori tek taraflı bir uygulama(-kullanma) ilişkisi değil, iki taraflı kazanım, etkileşim ve motivasyon ilişkisi üretir.

1.3. İçerik (The Contents)

Makale dört ana bölümden oluşmaktadır. Bölüm 2'de temel tanımlar ve konular verilecektir. İlk alt bölümde, bir fiziksel sistemin hareketini yönlendiren Euler-Lagrange ve Hamilton denklemleri sunulacaktır. Bu denklemlerin geometrisinden söz etmemize yardımcı olacak katman ve demetler üzerine tartışma yapılacaktır. İkinci altbölüm simetri ve indirgeme kavramlarını tanıtmaktadır. Lie grupları ve Lie cebirleri tanımlanacak, konfigürasyon uzayı Lie grubu olan fiziksel sistemlerin simetrilerden arındırılmış Euler-Poincaré ve Lie-Poisson denklemleri verilecektir. Bölüm 3'de iki teorem sunulacak ve bu teoremlerde eşlenmiş Euler-Poincaré ve eşlenmiş Lie-Poisson denklemleri yazılacaktır. Bunun için, eşlenmiş Lie grupları, eşlenmiş Lie cebiri ve olası dual ilişkiler verilecektir. 4. Bölümde ise bir önceki bölümde elde edilen eşlenmiş dinamik denklemleri örnekler üzerinde tartışılacaktır. İlk örnek matris grupları için, ikinci örnek ise konfigürasyon uzayı ikinci sınıf nilpotent gruplar için verilecektir. 5. Bölümde ise olası bir takım açık problemler ve bu problemler için çözüm önerileri sunulacaktır. Bunlardan ilki, Vlasov ve Euler denklemleri arasındaki ilişkinin eşlenmiş dinamik anlamında tartışılması, ikinci ise kesikli sistemler için eşlenme problemidir.

2. BAZI TEMEL KONULAR (SOME BASIC CONCEPTS)

2.1. Lagrange ve Hamilton dinamiği (Lagrangian and Hamiltonian dynamics)

Bir sistemde parçacıkların ve/veya sürekli ortamın tüm olası pozisyonları konfigürasyon uzayını oluşturur. Konfigürasyon uzayları çoğu durumda Öklid uzayı olmayıp, katman (manifold) adı verilen geometrik yapılardır [2]. Örneğin katı cisim için konfigürasyon uzayı cismin tüm dönme hareketlerini tanımlamaya izin veren üç boyutlu özel dik grup SO(3)'tür [45]. Başka bir örnek olarak, üç boyutlu uzayda yer tutan sıkışmaz bir akışkan için konfigürasyon uzayı hacim koruyan dönüşümler grubu $Diff_{vol}$ 'dür [22] [28]. Katmanlar sadece yerel olarak Öklid uzayı özelliklerini sağlayabilirler.

Verilen bir n-boyutlu Q katmanına teğet tüm uzaylar, kendisi de bir katman olan $2n$ boyutlu tanjant demeti TQ'yu oluşturur. Eğer bir Öklidyen alt uzay U, Q katmanı için yerel bir örtü (koordinat takımı) olarak seçilirse, TQ yerel olarak $U\times\Re^n$ ile verilir. Q eğer özel olarak bir vektör uzayı W ise $TQ = W\times W$ Kartezyen çarpımı ile global olarak berlirlenir. Tanjant demeti, çalışılan fiziksel sistemin hız faz uzayıdır. Tanjant demeti üzerinde tanımlı bir Lagrange fonksiyonu L, Euler-Lagrange denklem takımını

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{1}$$

üretir [1] [4]. Burada $(q,\dot{q})\in U\times\Re^n$ ikilisi tanjant demeti TQ için seçilmiş bir yerel koordinat sistemidir. Lagrange fonksiyonu L kinetik enerji ile potansiyel enerjinin farkı K-V olarak alınırsa Euler-Lagrange denklemleri (1) Newton'ın ikinci yasasına $m\ddot{q}=-\nabla V$ 'ye indirgenir.

Tanjant uzaylarının lineer cebirsel dualleri kotanjant uzayı olarak adlandırılır ve kendisi de katman olan kotanjant demeti T^*Q'yu meydana getirirler. Kontanjant demeti sistemin momentum faz uzayıdır. Kotanjant demeti kanonik bir simplektik yapı ω (yozlaşmamış kapalı bir 2-form) barındırır [26] [45] [65]. Simplektik yapı sayesinde katman üzerindeki vektör alanları ve fonksiyonların gradyenleri arasında bire-bir bir ilişki elde edilir. Seçilen bir Hamilton fonksiyonu H için gradyeni dH ile ilintili Hamilton vektör alanı X_H

$$i_{X_H}\omega = -dH \tag{2}$$

denklemleri aracılığıyla tanımlanır [4] [28] [35] [45]. Burada, *i* operatörü tensör alanları üzerindeki büzülme operatörüdür. Hamilton vektör alanı X_H'nin ürettiği akış dinamik sistemin hareketini belirler. Yerel olarak seçilen Darboux koordinatları *(q,p)* için denklem (2)'de kapalı olarak verilen Hamilton denklemleri

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{3}$$

şeklinde elde edilir. Eğer Hamilton fonksiyonu *H* momentum değişkeninde toplam enerji fonksiyonu $K+V$ olarak seçilirse Hamilton denklemleri (3), Newton'ın ikinci yasasına indirgenir.

Hamilton dinamiği çalışmak için simplektik yapıya sahip olmak gerek şart değildir. Simplektik yapının yozlaşmama şartını hafifleterek Poisson çerçeveleri elde edilir. Poisson çerçevesi ile donatılmış bir katman Poisson katmanı adını alır [34], [62], [66]. Poisson çerçevesi {.,.} katman üzerindeki tüm türevlenebilir fonksiyonların oluşturduğu uzay üzerinde Leibnitz eşitliğini

$$\{FK,H\} = F\{K,H\} + \{F,H\}K \tag{4}$$

ve Jacobi eşitliğini

$$\{F,\{K,H\}\} + \{K,\{H,F\}\} + \{H,\{F,K\}\} = 0 \tag{5}$$

sağlayan antisimetrik iki-lineer bir operatördür. Burada, *F, K* ve *H* katman üzerinde reel değerli türevlenebilir fonksiyonlardır. Poisson katmanı üzerinde seçilen bir Hamilton fonksiyonu *H* için de Hamilton denklemleri, *z* katman üzerinde olmak üzere,

$$\dot{z} = \{z,H\} \tag{6}$$

ile verilir. Her simplektik katman Poisson'dur fakat tersi doğru değildir [66]. Eğer katman ω simplektik yapısına sahipse,

$$\{F,H\} = \omega(X_F, X_H) \tag{7}$$

eşitliği katman üzerinde bir Poisson çerçevesi tanımlar. Burada X_F ve X_H , *F* ve *H* fonksiyonlarına karşı gelen Hamilton vektör alanlarıdır. Beklendiği üzere, denklem (7) ışığında, Hamilton denklemleri (3) ve (6) kesişir.

Pratikte çok ciddi problemlerle karşılaşılsa da en azından teorik olarak bir sistemin Lagrange ve Hamilton formülasyonunun eşdeğer olması beklenir [61]. Bu eşdeğerlik Legendre dönüşümleri ile sağlanır.

2.2. Simetri ve İndirgeme (Symmetry and reduction)

Eğer bir küme üzerinde, birim elemana sahip, her elemanın tersinin olduğu, birleşme özelliğini sağlayan bir $(g,h)\to gh$ (çarpım) ikili işlem varsa küme özel olarak grup adını alır. Katman üzerinde türevlenebilir bir grup çarpımı tanımlanabilirse katman, Lie grubu olarak adlandırılır [27] [58]. Bir Lie grubu *G*'nin birim elemanına teğet uzayı *V*, G'nin Lie cebiri olarak adlandırılır. Lie cebiri üzerinde, grup çarpımının türevlenmesi ile elde edilen, Jacobi eşitliğini sağlayan antisimetrik iki-lineer bir operatör [.,.] taşır. Bu operatör Lie çerçevesi adını alır. Bu çerçeve sayesinde, Lie cebiri *V*, kendisi üzerine etkir. Daha açık bir ifade ile her seçilen $\xi \in V$ için

$$ad_\xi : V \to V : \eta \to [\xi,\eta] \tag{8}$$

lineer dönüşümleri tanımlanabilir. Bu dönüşümler adjoint temsil adını alır. Bu dönüşümlerin lineer cebirsel dualleri alınarak Lie cebiri *V*'nin dual uzayı *V** üzerine etkisi, diğer bir ifade ile koadjoint temsili $ad_\xi^* : V^* \to V^*$ elde edilir. Adjoint temsil, Lie çerçevesi ve koadjoint temsil arasındaki ilişki, eşlemeler *V* ve duali *V** arasındaki doğal eşlemeyi göstermek üzere, $\xi,\eta \in V$ ve $\mu \in V^*$ için

$$\langle \mu, [\xi,\eta] \rangle = \langle \mu, ad_\xi \eta \rangle = -\langle ad_\xi^* \mu, \eta \rangle \tag{9}$$

şekilde verilir.

Lie grubun tanjant demeti *TG* için diğer katmanlarda genel olarak bulunmayan global trivializasyon (koordinatlama) $G\times V$ mümkündür. Benzer olarak, kotanjant demeti T^*G de grup çarpı Lie cebirinin duali $G\times V^*$ şeklinde bir global ifadeye sahiptir. Bu ifadeler grubun kendi tanjant temeti *TG* ve kotanjant demeti T^*G'ye adjoint ve koadjoint temsiller ile etki etmesini sağlar.

Matematikte simetri grup etkisi ile belirlenir. Özel olarak bir dinamik/mekanik sistem için ise simetri bir Lie grubu ya da Lie cebiri etkisi ile kodlanır [45] [58]. Simetrinin olduğu durumlarda yukarıda bahsedilen Euler-Lagrange denklemleri (1) ve Hamilton denklemleri (3 ve/veya 6) sadeleştirilebilir. Bu literatürde indirgenme adıyla anılır. 1970'lerin ortasında simplektik yapıların simetriler aracılığıyla indirgenmesi, simplektik indirgenme, başarılmıştır [48] [52]. Bu çalışmaların öncülüğünde oluşan literatür oldukça zengindir. Poisson katmanları üzerindeki Hamilton dinamiği/mekaniği de indirgenebilir [44]. Lagrange denklemlerinin simetriler altında indirgenmesi, Lagrange indirgenmesi, ise ilk olarak 1990'ların başında gerçekleştirilebilmiştir [46] [47].

Katı cisimler dinamiği, akışkanlar mekaniği, plazma teorileri gibi bir çok sistemin konfigürasyon uzayı bizatihi Lie grubudur. Bir Lie grubu *G*, kendi tanjant demeti $TG=G\times V$'ye etki eder. Eğer Euler-Lagrange denklemlerini (1) üreten demet üzerindeki bir Lagrange fonksiyonu bu etki altında değişmeden kalıyor ise, Lagrange fonksiyonu Lie cebiri *V* üzerine tek şekilde indirgenir ve cebir üzerinde Euler-Poincaré denklemlerini

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial l}{\partial \xi}\right) - ad_\xi^*\left(\frac{\partial l}{\partial \xi}\right) = 0 \tag{10}$$

verir [10] [47]. Burada ξ Lie cebirinin bir elemanı, ad^* ise denklem (9)'da verilen koadjoint temsil, $l: V \rightarrow \Re$ ise Lie cebiri üzerine indirgenmiş Lagrange fonksiyonudur. Euler-Poincaré denklemleri (10) tüm hareketi simetrilerden arınmış bir şekilde belirler.

Lie cebri *V*'nin lineer cebirsel duali *V** kanonik olarak, Lie-Poisson çerçevesi adıyla anılan, bir Poisson çerçevesi taşımaktadır [12]. Lie-Poisson çerçevesi, *V** üzerinde tanımlı iki fonksiyon *h* ve *f* için

$$\{h, f\}(\mu) = \left\langle \mu, \left[\frac{\partial h}{\partial \mu}, \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] \right\rangle \tag{11}$$

ile verilir [28] [45] [50]. Burada, μ dual uzayın bir elemanı, eşleme içindeki çerçeve ise Lie cebiri *V* üzerindeki Lie çerçevesidir. Poisson denklemleri (6), *V** üzerinde seçilecek bir Hamilton fonksiyonu *h* ve denklem (11)'de verilen Lie-Poisson çerçevesi ile

$$\frac{d}{dt}\mu = ad^*_{\partial h / \partial \mu}(\mu) \tag{12}$$

şeklinde yazılır. Denklem (12) özel olarak Lie-Poisson denklemleri adını alır. Lie-Poisson denklemleri (12), kotanjant demeti *T*G* üzerindeki Hamilton denklemlerinin Lie grubun etkisi ile Poisson indirgenmesi sonucunda da elde edilebilir.

3. DİNAMİK SİSTEMLERİN EŞLENMESİ (MATCHING OF TWO DYNAMICAL SYSTEMS)

3.1. Yarı-direkt Çarpım Teorisi (Semidirect Product Theory)

Bir Lie grubu *G*, bir vektör uzayı *U* üzerine lineer şekilde etki etsin. Bu ikilinin Kartezyen çarpımları $G \times U$ bir Lie grubudur ve yarı-direkt çarpım grubu olarak adlandırılır. Yarı-direkt çarpım uzayları için Euler-Poincaré denklemleri literatürde mevcuttur [9] [10] [22], ayrıca Lie-Poisson denklemleri için de [19] [20] [21] [33] kaynakları önerilebilir.

Yarı-direkt çarpım teorisinde sistemlerden yalnızca biri diğerine etki etmektedir. Bu anlamda yarı-direkt çarpım teorisi makalede arayış içinde olduğumuz çift taraflı etki-tepki ilişkisinin ancak bir özel hali olabilir. Motivasyonel olarak ve yol gösterme anlamında değerlidir.

3.2. Eşlenmiş Lie Grubu Çiftleri (Matched Pairs of Lie groups)

Karşılıklı etki ve tepkinin tanımlanabilmesi için eşlenmesini istediğimiz iki dinamik sistemin konfigürasyon uzayları *G* ve *K* ile göstereceğimiz iki Lie grubu olsun. Toplam sistemin konfigürasyon uzayı topolojik olarak Kartezyen çarpım $G \times K$'dır. Fakat Kartezyen çarpım üzerinde farklı grup yapıları tanımlamak mümkündür. Örneğin, $G \times K$ üzerinde direkt çarpım $(g_1,k_1)(g_2,k_2) = (g_1 g_2, k_1 k_2)$ olarak verilir. Burada $(g_1,k_1),(g_2,k_2)$ elemanları $G \times K$'dan alınmış rasgele elemanlardır.

Eşlenmiş sistemlerin konfigürasyon uzayı olarak, etki-tepki içindeki iki Lie grubu tek bir Lie grubu olarak yazmaya müsaade eden eşlenmiş Lie grubu kullanılacaktır [37] [38] [39] [60]. Eşlenmiş Lie grupları farklı adlar altında farklı araştırmacılar tarafından tanımlanmıştır [32] [36]. Birbirlerine etki eden iki Lie grubu *G* ve *K* göz önüne alındığında, eşlenmiş Lie grubu $G \bowtie K$ ile gösterilecektir. Burada G grubunun K'ya sağdan etkisi $\triangleleft$ ile gösterilir, K grubunun G'ye soldan etkisi $\triangleright$ ile belirtilir ve eşlenmiş Lie grubu $G \bowtie K$ üzerindeki grup çarpımı

$$(g_1,k_1)(g_2,k_2) = (g_1(k_1 \triangleright g_2), (k_1 \triangleleft g_2)k_2) \tag{13}$$

olarak verilir. Birbirine etki eden iki Lie grubu denklem (13)'te verilen grup çarpımı ile eşlemek için grupların karşılıklı etkilerinin bazı uygunluk şartlarını sağlaması gerekir [37] [38] [39] [60]. Direk çarpım ve burada yazdığımız eşlenmiş çarpım (13) arasındaki fark rahatlıkla görülebilir.

Denklem (13)'deki etkilerden sadece biri ($\triangleleft$ veya $\triangleright$) göz alındığında, yarı-direkt çarpıma ulaşırız. Her iki etki de ihmal edildiğinde denklem (13)'deki çarpım direkt çarpıma düşer. Denklem (13)'de gözüken çift taraflı etki-tepki ilişkisi bizim aradığımız konfigürasyon uzayı tanımı için hayatidir.

Verilen iki Lie grubu *G* ve *K*'nın Lie cebirleri sırasıyla *V* ve *W* olsun. Eşlenmiş Lie grubu $G \bowtie K$'nın Lie cebiri $V \bowtie W$, vektör uzayı olarak *V* ve *W*'nun direkt toplamı, cebirsel olarak ise, herhangi iki eleman $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2)$ için

$$\begin{aligned}[(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2)] = ([\xi_1,\xi_2]_V + \eta_1 \triangleright \xi_2 - \eta_2 \triangleright \xi_1, \\ [\eta_1,\eta_2]_W + \eta_1 \triangleleft \xi_2 - \eta_2 \triangleleft \xi_1)\end{aligned} \tag{14}$$

şeklinde verilen Lie çerçevesi ile donatılmış durumdadır. Burada $[\xi_1,\xi_2]_V$ Lie çerçevesi *V* üzerinde, $[\eta_1,\eta_2]_W$ Lie çerçevesi W üzerindedir. Denklem (14)'deki $\triangleleft$ ve $\triangleright$ ile gösterilen etkiler, denklem (13)'de gözlenen grup düzeyindeki etkilerin türevlenmesiyle elde edilir. Etki-tepki ilişkisi içindeki bu yapı eşlenmiş Lie cebiri adını alır.

Eğer iki sistem birleştirilirken konfigürasyon uzayındaki grup yapısı direkt çarpım olarak alınırsa, Lie cebiri düzeyinde denklem (15)'deki etki-tepki terimlerinin hiçbiri gözükmeyecektir. Eğer bütünleşik sistem için konfigürasyon uzayı yarı-direkt çarpım ile donatılırsa, denklem (14)'deki terimlerin yalnız yarısı gözlemlenebilir. Konfigürasyon uzaylarının her ikisinin de birbiri üzerine etki ettiği sistem çiftlerine eşlenmiş sistem çifti, bunların oluşturduğu bütünleşik sisteme de eşlenmiş sistem diyeceğiz.

3.3. Eşlenmiş Çiftler Üzerinde Hamilton Dinamiği (Hamiltonian Dynamics on Matched Pairs)

Sıradaki teorem, beraber hareket için *eşlenmiş Lie-Poisson denklemlerini* belirlemektedir [13] [14].

Teorem 1 $G\bowtie K$ bir eşlenmiş Lie grubu, $V\bowtie W$ bu grubun eşlenmiş Lie cebiri olsun. Lie cebirinin dual uzayı $V^*\times W^*$ üzerindeki bir Hamilton fonksiyonu $h=h(\mu,\nu)$ için, denklem (12)'de genel yapısı verilen Lie-Poisson denklemleri şu şekildedir: $\mu,\nu\in V^*\times W^*$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mu &= ad^*_{\partial h/\partial \mu}(\mu)+\mu\overset{*}{\triangleleft}(\partial h/\partial \nu)+a^*_{\partial h/\partial \nu}\,\nu,\\ \frac{d}{dt}\nu &= ad^*_{\partial h/\partial \nu}(\nu)+(\partial h/\partial \mu)\overset{*}{\triangleright}\nu+b^*_{\partial h/\partial \mu}\,\mu.\end{aligned} \tag{15}$$

İspat 1 Burada, öncelikle denklem (14) ile verilen Lie cebiri V'nin W üzerine etkisi $\triangleleft$, ve Lie cebiri W'nun V üzerine etkisi $\triangleright$'nin duallerinin alınması gerekmektedir. V'nin W üzerine etkisi $\triangleleft$ iki farklı şekilde dual üretir. Sırasıyla $\eta\in W$ ve $\xi\in V$ sabit kabul edilerek,

$$\begin{aligned}&\overset{*}{\triangleright}: V\times W^*\to W^*: (\xi,\nu)\to \xi\overset{*}{\triangleright}\nu\\ &a^*: W\times W^*\to V^*: (\eta,\nu)\to a_\eta{}^*\nu\end{aligned} \tag{16}$$

dönüşümleri aşağıdaki denklemler aracılığıyla tanımlanır:

$$\begin{aligned}&\left\langle \xi\overset{*}{\triangleright}\nu,\eta\right\rangle=\left\langle \nu,\eta\triangleleft\xi\right\rangle\\ &\left\langle a_\eta{}^*\nu,\xi\right\rangle=\left\langle \nu,a_\eta\xi\right\rangle=\left\langle \nu,\eta\triangleleft\xi\right\rangle.\end{aligned} \tag{17}$$

Benzer olarak, Lie cebiri W'nun V üzerine etkisi $\triangleright$ için de iki ayrı dual tanımlanabilir. Dual dönüşümler

$$\begin{aligned}&\overset{*}{\triangleleft}: V^*\times W\to V^*: (\mu,\eta)\to \mu\overset{*}{\triangleleft}\eta\\ &b^*: V\times V^*\to W^*: (\xi,\mu)\to b_\xi{}^*\mu\end{aligned} \tag{18}$$

aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}&\left\langle \mu\overset{*}{\triangleleft}\eta,\xi\right\rangle=\left\langle \mu,\eta\triangleright\xi\right\rangle\\ &\left\langle b_\xi{}^*\mu,\eta\right\rangle=\left\langle \mu,b_\xi\eta\right\rangle=\left\langle \nu,\eta\triangleright\xi\right\rangle.\end{aligned} \tag{19}$$

Adjoint temsilin dualizasyonu denklem (9)'da tarif edildiği şekilde yapılırsa eşlenmiş Lie cebiri $V\bowtie W$'nin duali $V^*\times W^*$ üzerine koadjoint temsili, denklemler (17) ve (19)'da elde edilen dual etkiler türünden,

$$\begin{aligned}ad^*_{(\xi,\eta)}(\mu,\nu)=(&ad^*_\xi\,\mu+\mu\overset{*}{\triangleleft}\eta+a_\eta{}^*\nu,\\ &ad^*_\eta\,\nu+\xi\overset{*}{\triangleright}\nu+b_\xi{}^*\mu)\end{aligned} \tag{20}$$

olarak elde edilir. İspatın kalanı, Hamilton fonksiyonunun kısmi türevlerinin $\xi=\partial h/\partial\mu$ ve $\eta=\partial h/\partial\nu$ alınması ve de Lie-Poisson denklemi (12)'ye yerleştirilmesi ile başarılır.■

Teorem 1'deki Lie-Poisson denklemlerine eşlenmiş Lie-Poisson denklemleri diyeceğiz. Konfigürasyon grubu içindeki etki-tepki ilişkisi ((13)'deki eşlenmiş grup yapısı), infinitesimal düzeyde Lie çerçevesinde ((14)'deki eşlenmiş Lie cebiri yapısı) kendini göstermekte, dualizasyon ile de bu hareket denklemleri (15)'daki ek terimleri belirlemektedir. Burada elde ettiğimiz eşlenmiş Lie-Poisson denklemleri yarı-direkt çarpım teorisini de içermektedir. Etkileri belirleyen $\triangleleft$ ve $\triangleright$ operatörlerinden biri sıfır operatörü seçildiğinde, ek terimlerin yarısı kaybedilecek ve yarı-direkt Lie-Poisson denklem takımına ([20] [21] [33]) ulaşılacaktır.

Durumu daha açık olarak görmek için V^* ve W^* için yazılmış bireysel Lie Poisson denklemleri

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mu &= ad^*_{\partial h/\partial \mu}(\mu),\\ \frac{d}{dt}\nu &= ad^*_{\partial h/\partial \nu}(\nu)\end{aligned} \tag{21}$$

ile eşlenmiş Lie Poisson denklemleri (15)'i karşılaştırmak mümkündür. (15)'de verilen denklem takımının sağ taraftaki ilk terimleri V^* ve W^* üzerindeki bireysel Lie-Poisson denklemlerinden gelen terimlerdir. Sağ taraftaki ikinci ve üçüncü terimler ise Lie cebirleri V ve W'nun birbirine etki etmesi sonucudur.

3.4. Eşlenmiş Çiftler Üzerinde Lagrange Dinamiği (Lagrangian Dynamics on Matched Pairs)

Sıradaki teorem, beraber hareket için eşlenmiş Euler-Poincaré denklemlerinin yazımını verir [15].

Teorem 2 $V\bowtie W$ eşlenmiş Lie cebiri ve $l=l(\xi,\eta)$ bu cebir üzerindeki bir Lagrange fonksiyonu olmak üzere, Euler-Poincaré denklemleri şu şekildedir: $(\xi,\eta)\in V\bowtie W$ için,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial l}{\partial\xi} &= -ad^*_\xi\left(\partial l/\partial\xi\right)+\frac{\partial l}{\partial\xi}\overset{*}{\triangleleft}\eta+a^*_\eta\frac{\partial l}{\partial\eta},\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial l}{\partial\eta} &= -ad^*_\eta\left(\partial l/\partial\eta\right)-\xi\overset{*}{\triangleright}\frac{\partial l}{\partial\eta}-b^*_\xi\frac{\partial l}{\partial\xi}.\end{aligned} \tag{22}$$

İspat 2 Öncelikle tek bir değişken için tanımlanan denklem (10)'da verilen Euler-Poincaré denklemlerini hatırlayalım. Euler-Poincaré denklemlerini eşlenmiş Lie cebiri $V\bowtie W$ üzerinde yazmak için denklem (20)'de verilen $V\bowtie W$'nun duali $V^*\times W^*$ üzerine koadjoint temsilini hatırlayalım. İspat, koadjoint temsilde $\mu=\partial l/\partial\xi$ ve $\nu=\partial l/\partial\eta$ alınarak kolayca tamamlanır. ■

Hamilton formülasyonunda olduğu gibi eşlenmiş Euler-Poincaré denklemleri (22), yarı-direkt çarpım teorisini de içermektedir. Etkileri belirleyen $\triangleleft$ ve $\triangleright$ operatörlerinden biri sıfır operatör seçildiğinde, ek terimlerin yarısı kaybedilecek ve yarı-direkt Euler-Poincaré denklem takımına ulaşılacaktır.

4. ÖRNEKLER (EXAMPLES)

4.1. Matris Grupları İçin Bir Örnek (An Example for Matrix Groups)

Bir önceki bölümde elde ettiğimiz teorik sonuçları bir örnek üzerinde tartışalım. Bunun için öncelikle eşlenmiş bir Lie grubu çifti tanımlamamız gerekecek. Lie grubu G'yi köşegen elemanları *1* olan üst üçgensel matris grubu, Lie grubu H'yı ise köşegen elemanları 1 olan alt üçgensel matris grubu olarak seçelim ve grupların karşılıklı etkilerini $A \in G$ ve $B \in H$ için

$$B \triangleright A = I + (B^{-1})^T (A - I),$$
$$B \triangleleft A = I + (B - I)(A^{-1})^T \qquad (23)$$

olarak tanımlayalım [39]. Bu tanımda, I birim matris, $(B^{-1})^T$ ise B matrisinin tersinin transpozesidir.

Lie grubu G'nin Lie cebiri V köşegen elemanları sıfır olan üst üçgensel matrisler, Lie grubu H'nin Lie cebiri W ise köşegen elemanları sıfır olan alt üçgensel matrislerden oluşmaktadır. Her iki Lie cebiri için Lie çerçevesi matris komütatörüdür. Tanımlarından rahatlıkla görülebileceği gibi G, H, V ve W üç boyutludur. Denklem (23)'ten türev alarak Lie cebirlerinin karşılıklı etkisi $X \in V$ ve $Y \in W$ olmak üzere

$$Y \triangleleft X = -YX^T \text{ ve } Y \triangleright X = -Y^T X \qquad (24)$$

şeklinde elde edilir.

Matrisler üzerinde iz operatörü aracılığıyla tanımlanan bir iç çarpım $\langle X_1, X_2 \rangle = tr(X_1{}^T X_2)$ mevcuttur. İç çarpımın varlığı, Lie cebirleri ile dual uzaylarının eş yapılı olduğunu gösterir. Diğer bir ifade ile $V^*=V$ ve $W^*=W$'dur. Bu iç çarpım ile donatılmış matris uzayları ve nokta çarpımı ile donatılmış $\Re^3$ arasında tanımlı

$$\Re^3 \leftrightarrow V = V^* : (a,b,c) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\Re^3 \leftrightarrow W = W^* : (d,e,f) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix}, \qquad (25)$$

dönüşümleri iç çarpım koruyan dönüşümlerdir. Hesaplar sırasında bir karışıklığa sebep olmamak için dual elemanları $\mu \in V^*$ ve $\nu \in W^*$ olarak göstermeye devam edelim.

Üzerinde çalışacağımız matrix elemanları şu şekilde belirleyelim:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in V, \qquad \mu = \begin{pmatrix} 0 & r & s \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in V^*,$$
$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \in W, \qquad \nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 \\ v & w & 0 \end{pmatrix} \in W^*. \qquad (26)$$

Lie cebirleri üzerindeki adjoint operatör matris komütatörüdür. Lie cebirlerinin kendi dual uzayları üzerine koadjoint temsilleri, elemanlar denklem (26)'da belirtildiği gibi olmak üzere, denklem (9)'da verilen tanımla hesap edilir:

$$ad^* : V \times V^* \to V^* : (X,\mu) \to ad_X{}^* \mu = \begin{pmatrix} 0 & cs & 0 \\ 0 & 0 & -as \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$ad^* : W \times W^* \to W^* : (Y,\nu) \to ad_Y{}^* \nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -fv & 0 & 0 \\ 0 & dv & 0 \end{pmatrix}.$$

(27)

Diğer yandan, denklem (16) ile tanımlanan karşılıklı dual etkiler

$$\overset{*}{\triangleright} : V \times W^* \to W^* : (X,\nu) \to X \overset{*}{\triangleright} \nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -av & 0 \end{pmatrix}, \qquad (28)$$
$$a^* : W \times W^* \to V^* : (Y,\nu) \to a_\eta{}^* \nu = \begin{pmatrix} 0 & -fv & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (29)$$

olarak elde edilir. Denklem (18) ile tanımlanan dual etkiler ise şu şekildedir:

$$\overset{*}{\triangleleft} : V^* \times W \to V^* : (\mu,Y) \to \mu \overset{*}{\triangleleft} Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ds \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (30)$$
$$b^* : V \times V^* \to W^* : (X,\mu) \to b_X{}^* \mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (31)$$

Şimdi, $V^* \times W^*$ üzerinde tanımlı herhangi bir Hamilton fonksiyonu $h=h(\mu,\nu)$ tarafından belirlenen eşlenmiş Lie-Poisson denklemleri (15)'i çalıştığımız özel örnek için yazmaya çalışalım. Denklem (25)'te verilen dönüşümler gereğince kısmi türevler

$$\frac{\partial h}{\partial \mu}=\left(\frac{\partial h}{\partial r},\frac{\partial h}{\partial s},\frac{\partial h}{\partial p}\right)\leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & \partial h/\partial r & \partial h/\partial s\\ 0 & 0 & \partial h/\partial p\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{32}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \nu}=\left(\frac{\partial h}{\partial u},\frac{\partial h}{\partial v},\frac{\partial h}{\partial w}\right)\leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \partial h/\partial u & 0 & 0\\ \partial h/\partial v & \partial h/\partial w & 0\end{pmatrix},$$

şeklinde seçilebilir. Denklem (27)-(30)'da verilen terimlerin denklem (15)'e yerleştirilmesi ile, seçtiğimiz matris grupları üzerindeki eşlenmiş Lie-Poisson denklemlerini şu şekilde yazarız:

$$\dot r=\frac{\partial h}{\partial p}s-\frac{\partial h}{\partial w}v,\qquad \dot p=-\frac{\partial h}{\partial r}s-\frac{\partial h}{\partial u}s, \tag{33}$$
$$\dot u=-\frac{\partial h}{\partial w}v-\frac{\partial h}{\partial p}s,\qquad \dot w=\frac{\partial h}{\partial u}v-\frac{\partial h}{\partial r}v.$$

Burada, s ve v türevleri sıfır olması nedeniyle keyfi sabitlerdir.

Eğer, *G* ve *H* birbirlerine karşılıklı olarak etki etmeseydi yani konfigürasyon uzayı üzerinde direkt grup çarpımı tanımlansaydı, eşlenmiş Lie-Poisson denklemleri (33)'te elde edilen çapraz terimler (eşitliklerin sağ taraflarındaki ikinci terimler) gözlenemeyecekti. Denklem (33)'deki karşılıklı etkileşimi yok ederek, diğer bir ifade ile ikinci terimleri göz ardı ederek kanonik Hamilton denklemi (3) çiftine ulaşılır. Gerçekten de, bu durumda, denklem (33)'deki ilk satır ve ikinci satır iki ayrı kanonik Hamilton denklemine

$$\dot r=\frac{\partial k(r,p)}{\partial p},\qquad \dot p=-\frac{\partial k(r,p)}{\partial r}, \tag{34}$$
$$\dot w=\frac{\partial f(w,u)}{\partial u},\qquad \dot u=-\frac{\partial f(w,u)}{\partial w}$$

indigenir. Burada, daha net bir yazım için Hamilton fonksiyonu $k=k(r,p)$'i s sabit olmak üzere $sh(r,p)$, Hamilton fonksiyonu $f=f(w,u)$ ise v sabit olmak üzere $vh(w,u)$ olarak seçilmiştir.

Tersten bir okuma yapalım ve denklem (34)'de verilen iki kanonik Hamilton sistemi ile işe başlayalım. Bu iki sistem beraber hareketleri süresince denklem (23)'de verilen karşılıklı etki tepki ilişkisine girdiklerinde, eşlenmiş sistem için hareket denklemleri eşlenmiş Lie-Poisson denklemleri (33)'tür. Eşlenmiş Lie-Poisson denklemleri (33)'ün sağdaki ilk terimleri denklem (34)'deki bireysel hareketlerden gelir. İkinci terimler ise (23)'te belirlenen karşılıklı etki tepkinin sonucudur.

4.2 İkinci Sınıf Nilpotent Grupların Eşlenmesi (Matching of Nilpotent Groups of Class Two)

Diğer bir uygulama olarak, *G*'yi ikinci sınıf bir nilpotent Lie grubu olarak seçelim [12]. Böyle bir grup kendi ile eşlenerek $G\bowtie G$ denklem (13)'de verilen grup yapısı inşa edilebilir [39]. Burada, grubun kendi üzerine sol etkisi iç otomorfizma $k\triangleright g=kgk^{-1}$ ile sağ etkisi ise $k\triangleleft g=g^{-1}kg$ ile verilecektir. Bu durumda, Lie cebirlerinin birbirleri üzerine etkileri Lie çerçevesi

$$\eta\triangleright\xi=\eta\triangleleft\xi=[\eta,\xi] \tag{35}$$

olarak hesap edilir. Bu özel seçim için, eşlenmiş Lie cebiri $V\bowtie V$ üzerindeki Lie çerçevesi

$$\begin{aligned}[(\xi_1,\eta_1)(\xi_2,\eta_2)]=(&[\xi_1,\xi_2]+[\eta_1,\xi_2]-[\eta_2,\xi_1]\\ &,[\eta_1,\eta_2]+[\eta_1,\xi_2]-[\eta_2,\xi_1])\end{aligned} \tag{36}$$

şeklinde hesaplanır.

Lie cebiri etkilerinin dualizasyonu, (17) ve (19) denklemleri ışığında

$$\xi\overset{*}{\triangleright}\nu=ad_\xi{}^*\nu,\qquad a^*_\eta\,\nu=-ad_\xi{}^*\nu, \tag{37}$$
$$\mu\overset{*}{\triangleleft}\eta=-ad_\eta{}^*\mu,\qquad \mu\overset{*}{\triangleleft}\eta=-ad_\eta{}^*\mu$$

bulunur. Eşlenmiş Lie cebir $V\bowtie V$'nin duali $V^*\times V^*$ üzerinde koadjoint temsili

$$\begin{aligned}ad^*_{(\xi,\eta)}(\mu,\nu)=(&ad^*_\xi\,\mu-ad^*_\eta\,(\mu+\nu),\\ &ad^*_\eta\,\nu+ad^*_\xi\,(\mu+\nu))\end{aligned} \tag{38}$$

olup $V^*\times V^*$ üzerinde seçilecek bir Hamilton fonksiyonu $h=h(\mu,\nu)$ için eşlenmiş Lie-Poisson denklemleri (15) şu şekildedir:

$$\frac{d}{dt}\mu=ad^*_{\partial h/\partial\mu}(\mu)-ad^*_{\partial h/\partial\nu}(\mu+\nu), \tag{39}$$
$$\frac{d}{dt}\nu=ad^*_{\partial h/\partial\nu}(\nu)-ad^*_{\partial h/\partial\mu}(\mu+\nu).$$

$V\bowtie V$ üzerinde seçilecek bir Lagrange fonksiyonu $l=l(\xi,\eta)$ için ise eşlenmiş Euler-Poincaré denklemleri (22) şu şekilde verilir:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial l}{\partial\xi}=-ad^*_\xi\left(\partial l/\partial\xi\right)-ad^*_\eta\left(\frac{\partial l}{\partial\xi}+\frac{\partial l}{\partial\eta}\right), \tag{40}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial l}{\partial\eta}=-ad^*_\eta\left(\partial l/\partial\eta\right)-ad^*_\xi\left(\frac{\partial l}{\partial\xi}+\frac{\partial l}{\partial\eta}\right).$$

Tüm değişmeli gruplar ikinci sınıf nilpotent gruptur. Öte yandan değişmeli olmayan nilpotent grup ailesi de geniştir, örneğin (3 boyutta dönme hareketine karşılık gelen) kuaterniyonlar grubu, dihedral grup gibi. Burada dikkat çekilmesi gereken nokta, genel olarak, bir Lie grubu G'nin kendi ile eşlenmesinin, uygunluk şartları gereği mümkün olmamasıdır.

5. BAZI İLERİ GÖZLEMLER (SOME FURTHER OBSERVATIONS)

5.1. Plazma Ve Akışkan (Plasma and Fluid)

İlk olası ileri çalışma, plazma hareketini yöneten Vlasov denklemleri ile akışkan hareketini yöneten Euler denklemleri arasındaki ilişkinin elde edilmesidir.

Plazmanın geometrisi kabaca şu şekildedir [49]. Yüklü bir parçacık üç boyutlu bir *Q* katmanında bulunsun. Bu katmanın kotanjant demeti *T*Q* bir simplektik katmandır. Vlasov denklemleri, momentum faz uzayı *T*Q* üzerinde tanımlı plazma yoğunluk fonksiyonu *f=f(q,p)*'nin değişimini belirler:

$$\frac{df}{dt}+\frac{p}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial q}-e\nabla\phi\cdot\frac{\partial f}{\partial p}=0. \tag{41}$$

Burada, *m* tek bir yüklü parçacığın kütlesini, *e* ise elektrik yükünü vermektedir. *Φ* potansiyel fonksiyonudur ve relativistik olmayan durumlarda Poisson denklemi ile kontrol edilir.

Plazmanın konfigürasyon uzayı kotanjant demeti üzerindeki simplektik yapıyı koruyan kanonik difeomorfizmalar grubu $Diff_{can}(T^*Q)$'tur. $Diff_{can}(T^*Q)$ sonsuz boyutlu bir Lie grubudur. Bu grubun Lie cebiri ise *T*Q* üzerindeki Hamilton vektör alanları uzayı $X_{ham}(T^*Q)$'dur. Bu vektör uzayının duali üzerinde Vlasov denklemleri (41)'in Lie-Poisson formülasyonu elde edilir [49] [54]. Vlasov denklemlerinin jeodezik formdaki Euler-Poincaré formülasyonu için ise literatürde çalışmalar mevcuttur [28].

Akışkan için Euler denklem çifti

$$\frac{\partial X}{\partial t}+(X\cdot\nabla)X=\frac{1}{\rho}\nabla P,\quad \dot{\rho}+\nabla\cdot(\rho X)=0 \tag{42}$$

olarak verilir [28]. Burada X parçacıkların hızını belirleyen bir vektör alanı, *P* basınç ve *ρ* ise özkütle fonksiyonudur. Değişik akışkan teorileri için değişik konfigürasyon uzayları tanımlanabilse de Euler denklemleri (42) için konfigürasyon uzayı *Q* üzerindeki difeomorfizmalar grubu ve türevlenebilir fonksiyonlar uzayının çarpımdır. Bu grup kısaca $Diff(Q)\times F(Q)$ ile gösterilir. Bu grup sonsuz boyutludur. $Diff(Q)\times F(Q)$'nun Lie cebiri ise *Q* katmanı üzerindeki tüm vektör alanları uzayı ve fonksiyon uzayının çarpımı $X(Q)\times F(Q)$'dur. Euler denklemleri (42)'in Hamilton ve Lagrange formülasyonları literatürde derinlemesine çalışılmıştır [10] [17] [33] [55].

Burada dikkat çekici nokta, akışkanın konfigürasyon uzayı olan $Diff(Q)\times F(Q)$'nun plazmanın konfigürasyon uzayı olan $Diff_{can}(T^*Q)$'nun altgrubu olmasıdır. Fiziksel olarak bu, plazmayı elektriksel yükten arındırılarak bir akışkan gibi düşünmenin mümkün olması ile bağlantılıdır. Plazma ve akışkanın konfigürasyon uzayları arasındaki yakın bağ, Hamilton formülasyonları arasındaki ilişki ve de plazma yoğunluk fonksiyonun momentleri son zamanlarda araştırmacıların dikkatini tekrar bu konulara çekmiştir [23] [24] [29].

Vlasov ve Euler denklemlerinin eşlenmiş dinamik sistemler ile ilişkisi şu şekilde beklenmektedir. Plazmanın konfigürasyon uzayı kanonik dönüşümler grubu $Diff_{can}(T^*Q)$'nun eşlenmiş bir Lie grubu olarak ifadesi mümkündür [56]. Bu ayrışmada parçalardan bir tanesi akışkanın konfigürasyon uzayı $Diff(Q)\times F(Q)$ olarak seçilebilir. İnfinitesimal düzeyde ise, [23]'de verilen Schouten cebiri yapısı kullanılarak, $Diff_{can}(T^*Q)$'nun Lie cebiri $X_{ham}(T^*Q)$ eşlenmiş bir Lie cebiri yapısına kavuşabilir. Eşlenmiş parçalardan bir tanesi Euler denklemleri için hız faz uzayı olan $X(Q)\times F(Q)$ olacaktır. Bu tip bir ifade elde edildiğinde, Vlasov deklemleri eşlenmiş bir denklem takımı heline gelir ve bir parçasını Euler denklemleri oluşturur. Bu başarılınca, plazma ve akışkan arasındaki fiziksel ilişki tam bir geometrik altyapıya kavuşacaktır. Tüm bu süreçte difeomorfizma grupları hakkındaki pür geometrik çalışmalara da ihtiyaç duyulacaktır [3] [5] [59]. Difeomorfizma grupları sonsuz boyutludur. Sonlu boyutlu uzaylarda kullanageldiğimiz türev ve integral gibi en temel kavramları tanımlamak bile zorluklar içerebilir [31].

5.2. Kesikli Sistemlerin Eşlenmesi (Matching of Discrete Systems)

Şu ana kadar önerdiğimiz modellerde eşlenmiş sistemler için hareket denklemleri yazılırken sadece sürekli sistemler göz önüne alınmıştır. Oysa ki, parçacıkların kesikli hareket ettiği sistemler için de aynı tartışma mümkündür [57] [63] [64]. Kesikli sistemlerde bu tartışmayı sürdürebilmek için ise parçacıkların konum ve hız bilgisinin ötesinde bilgilere de ihtiyaç vardır. Örneğin, parçacıkların hız bilgilerini birinci türev ile ilişkilendirirsek, kesikli durumda ikinci ve/veya daha yüksek mertebe türev ile ilgili bilgiler (parçacığın jet koordinatları) gereklidir. Burada tanjant demetleri konfigürasyon uzayının Kartezyen çarpımı ile değiştirilir. Bu da Lie grubu (ve Lie cebiri) ile yapılan simetri tartışmasını Lie grupoidi (ve Lie cebiroidi) denilen yapıya genişletmekle mümkün olur [67]. Kısaca, kesikli durumda konfigürasyon uzayı Lie grupoidi olan sistemler, ve bunların olası etkileşimleri düşünülür [40].

Literatürde Euler-Lagrange ve Hamilton denklemlerinin kesikli versiyonları mevcuttur [25] [51]. Kesikli sistemler için simetri barındırdıkları zaman indirgenme teoremleri de mevcuttur [30] [42] [43].

Karşılıklı etki-tepki içindeki kesikli sistemlerin (konfigürasyon uzayı Lie grupoidi olan sistemler) eşlenmesi problemi literatürde henüz hiç bir çalışmada analiz edilmemiştir. Var olan örneklere bakıldığında kesikli iki sistemin birlikte oluşturduğu bütünleşik bir sistemin (sistemlerden yalnızca birinin diğeri üzerine etki ettiği durumda bile) az sayıda çalışma göze çarpmaktadır [6]. Oysaki tıpkı Lie grupları gibi, Lie grupoidleri de birbirleri üzerine etki edebilmektedirler [53] [67]. Yani eşlenmiş kesikli sistem çiftlerini düşünmenin önünde hiçbir teknik engel yoktur. Şurası açıktır ki; kesikli dinamik sistemlerin yapısı sürekli sistemlerden çok temel farklılıklar içereceklerinden bu tip bir analiz geometrik olarak farklı yöntemler talep edecektir.

6. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Parçacıkların hareketinin sürekli olduğu bir çok fiziksel sistem konfigürasyon uzayları Lie grupları olan iki alt sistemden oluşmuştur. Fakat literatürde bu yöndeki örnekler incelendiğinde, varolan tüm örneklerde bütünleşik sistemin konfigürasyon uzayının kendisini oluşturan alt sistemlerin konfigürasyon uzaylarının bir yarı-direkt çarpımı olduğu, yani iki sistemden yalnızca birinin diğeri üzerine etki ettiği, görülmektedir. Dolayısıyla, karşılıklı etkileşim içerisindeki iki sistemin birbirini etkileyerek oluşturdukları eşlenmiş sistemler konusunda literatürde büyük bir boşluk bulunmaktadır. Makale literatürdeki eşlenmiş sistemlerin dinamiği ile ilgili boşluğu doldurmaktadır. Karşılıklı etkileşim içindeki iki sistemin oluşturduğu eşlenmiş bir sistemin Lagrange ((22)'de verilen eşlenmiş Euler-Poincaré denklemleri) ve Hamilton denklemlerinin ((15)'de verilen eşlenmiş Lie-Poisson denklemleri) bu sistemlerin tek tek sahip oldukları dinamik denklemleri ile ilişkisi elde edilmiştir. Elde edilen bu teorik sonuçlar matris grupları ve ikinci sınıf nilpotent gruplar için açık ve detaylı olarak çalışılmıştır. Son kısımda, eşlenmiş dinamik denklemlerinin kinetik teori ve kesikli dinamik için olası etkileri iki açık problem sunularak tartışılmıştır.

İnşa edilen yapılar hiçbir özel koşul barındırmadığından etki-tepki içindeki ve bazı uygunluk koşulları sağlayan tüm ikili sistemler için kullanılabilir. Modellerin, matematik, fizik, kontrol teori, kimya, biyoloji, finans gibi disiplinlerden gelecek problemlerde de uygulama bulması beklenir.

KAYNAKÇA (REFERENCES)

[1] R. Abraham ve J. E. Marsden, Foundation of Mechanics, Massachusetts: Benjamin/Cummings Publishing Company, 1978.

[2] R. Abraham, J. E. Marsden ve T. Ratiu, Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, Springer Science Business Media, 1998.

[3] M. Adams, T. Ratiu ve R. Schmidt, "The Lie group structure of diffeomorphism groups and invertible Fourier integral operators with applications," içinde *Infinite dimensional Groups with Applications*, New York, Springer, 1985, pp. 1-69.

[4] V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, SpringerVerlag, 1978.

[5] A. Banyaga, The Structure of Classical Diffeomorphism Groups, Dortrecht: Kluwer, 1997.

[6] A. Bobenko ve Y. B. Suris, "Discrete Lagrangian Redcution, discrete Euler-Poincaré Eqautions, and Semidirect Products," *Letters in Mathematical Physics,* cilt 491, pp. 79-93, 1999.

[7] M. Brouveris, F. Gay-Balmaz, D. D. Holm ve T. S. Ratiu, "he Momentum Map Representation of Images," *Journal of Nonlinear Science,* cilt 21, pp. 115-150, 2011.

[8] L. Colombo ve D. M. de Diego, "Higher-order variational problems on Lie groups and optimal control applications," *J. Geom. Mech,* no. 64, pp. 451-478., 2014.

[9] L. Colombo ve H. O. Jacobs, "Lagrangian Mechanics on Centered Semi-direct Products," *Geometry, Mechanics, and Dynamics*, New York, Springer, 2015, pp. 167-184.

[10] H. Cendra, D. D. Holm, J. E. Marsden ve T. S. Ratiu, "Lagrangian reduction, the Euler-Poincaré equations, and semidirect products," *Translations of the American Mathematical Society-Series,* cilt 2, no. 186, pp. 1-26, 1998.

[11] D. C. Ellis, F. Gay-Balmaz, D. D. Holm, V. Putkaradze ve T. S. Ratiu, "Symmetry reduced dynamics of charged molecular strands," *Archive for rational mechanics and analysis,* cilt 3, no. 197, pp. 811-902, 2010.

[12] E. I. Khukhro, Nilpotent Groups and Their Automorphisms, Walter de Gruyter, 1993.

[13] O. Esen, M. Pavelka ve M. Grmela, "Hamiltonian Coupling of Electromagnetic Field and Matter," *arXiv preprint,* p. arXiv:1607.02023, 2016.

[14] O. Esen ve S. Sütlü, "Hamiltonian dynamics on matched pairs," *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics,* cilt 13, p. 24 sayfa, 2016.

[15] O. Esen ve S. Sütlü, "Lagrangian dynamics on matched pairs," *Journal of Geometry and Physics,* cilt 111, pp. 142-157, 2017.

[16] F. Gay-Balmaz ve C. Tronci, "Vlasov moment flows and geodesics on the Jacobi group," *Journal of Mathematical Physics,* cilt 53, p. 123502, 2012.

[17] D. D. Holm ve B. A. Kupershmidt, "Noncanonical Hamiltonian-formulation of ideal magnetohydrodynamics," *Physica D,* cilt 7, p. 330–333, 1983.

[18] P. J. Morrison ve J. M. Greene, "Noncanonical hamiltonian density formulation of hydrodynamics and ideal magnetohydrodynamics," *Phys. Rev.*

Lett., cilt 48, pp. 569–569, 1982.

[19] T. Ratiu, “Euler-Poisson equations on Lie algebras and the N-dimensional heavy rigid body,” *American journal of mathematics,* pp. 409-448, 1982.

[20] J. E. Marsden, T. Ratiu ve A. Weinstein, “Semidirect products and reduction in mechanics,” *Transactions of the American Mathematical Society,* cilt 281, no. 1, pp. 147-177, 1984.

[21] J. E. Marsden, T. Ratiu ve A. Weinstein, “Reduction and Hamiltonian structures on duals of semidirect product Lie algebras,” *Cont. Math. AMS,* cilt 28, pp. 55-100, 1984.

[22] D. D. Holm, J. E. Marsden ve T. Ratiu, “The Euler–Poincaré equations and semidirect products with applications to continuum theories,” *Advances in Mathematics,* cilt 137, no. 1, pp. 1-81, 1998.

[23] J. Gibbons, D. D. Holm ve C. Tronci, “Geometry of Vlasov kinetic moments: a bosonic Fock space for the symmetric Schouten bracket,” *Physics Letters A,* cilt 37223, pp. 4184-4196, 2008.

[24] J. Gibbons, D. D. Holm ve C. Tronci, “Vlasov moments, integrable systems and singular solutions,” *Physics Letters A,* cilt 3727, pp. 1024-1033, 2008.

[25] O. Gonzalez, “Time integration and discrete Hamiltonian systems,” *Journal of Nonlinear Science,* cilt 65, pp. 449-467, 1996.

[26] V. Guillemin ve S. Sternberg, Symplectic Techniques in Physics, Cambridge University Press, 1990.

[27] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Academic press, 1979.

[28] D. D. Holm, Geometric Mechanics, Imperial College Press, 2008.

[29] D. D. Holm ve C. Tronci, “Geodesic Vlasov Equations And Their Integrable Moment Closures,” *Journal Of Geometric Mechanics,* cilt 1, pp. 181-208, 2009.

[30] S. M. Jalnapurkar, M. Leok, J. E. Marsden ve M. West, “Discrete Routh reduction,” *Journal of Physics A: Mathematical and General,* cilt 39, no. 19, p. 5521, 2006.

[31] A. Kreigl ve P. W. Michor, The Convenient Setting of Global Analysis, American Mathematical Soc, 1997.

[32] Y. Kosmann-Schwarzbach ve F. Magri, “Poisson-Lie groups and complete integrability. I. Drinfeld bigebras, dual extensions and their canonical representations,” *Annales de l'IHP Physique théorique,* cilt 49, no. 4, pp. 433-460, 1988.

[33] B. A. Kupershmidt ve T. Ratiu, “Canonical maps between semidirect products with applications to elasticity and superfluids,” *Communications in Mathematical Physics,* cilt 902, pp. 235-250, 1983.

[34] C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau ve P. Vanhaecke, Poisson Structures, Springer Science & Business Media, 2012.

[35] P. Libermann ve C. M. Marle, Symplectic Geometry and Analytical Mechanics, Springer Science & Business Media, 1987.

[36] J. H. Lu ve A. Weinstein, “Poisson Lie groups, dressing transformations, and Bruhat decompositions,” *Journal of Differential Geometry,* cilt 312, pp. 501-526, 1990.

[37] S. Majid, “Physics for algebraists: Non-commutative and non-cocommutative Hopf algebras by a bicrossproduct construction,” *Journal of Algebra,* cilt 1301, pp. 17-64, 1990.

[38] S. Majid, “Matched pairs of Lie groups associated to solutions of the Yang-Baxter equations,” *Pacific Journal of Mathematics,* cilt 1412, pp. 311-332, 1990.

[39] S. Majid, Foundations of Quantum Group Theory, Cambridge University Press, 2000.

[40] J. C. Marrero, D. M. d. Diego ve E. Martínez, “Discrete Lagrangian and Hamiltonian mechanics on Lie groupoids,” *Nonlinearity,* cilt 19, no. 6, p. 1313, 2006.

[41] J. E. Marsden, G. Misiolek, J. P. Ortega, M. Perlmutter ve T. Ratiu, Hamiltonian Reduction by Stages, Berlin: Springer-Verlag, 2007.

[42] J. E. Marsden, S. Pekarsky ve S. Shkoller, “Discrete Euler-Poincaré and Lie-Poisson equations,” *Nonlinearity,* cilt 12, no. 6, p. 1647, 1999.

[43] J. E. Marsden, S. Pekarsky ve S. Shkoller, “Symmetry reduction of discrete Lagrangian mechanics on Lie groups,” *Journal of geometry and physics,* cilt 361, pp. 140-151, 2000.

[44] J. E. Marsden ve T. Ratiu, “Reduction of Poisson manifolds,” *Letters in Mathematical Physics,* cilt 112, pp. 161-169, 1986.

[45] J. E. Marsden ve T. Ratiu, Introduction to Mechanics and Symmetry, Springer Science & Business Media, 1999.

[46] J. E. Marsden ve J. Scheurle, "Lagrangian reduction and the double spherical pendulum,” *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP,* cilt 441, pp. 17-43, 1993.

[47] J. E. Marsden ve J. Scheurle, “The reduced Euler-Lagrange equations,” *Fields Institute Comm,* cilt 1, pp. 139-164, 1993.

[48] J. Marsden ve A. Weinstein, “Reduction of

symplectic manifolds with symmetry," *Reports on mathematical physics,* cilt 51, pp. 121-130, 1974.

[49] J. E. Marsden ve A. Weinstein, "The Hamiltonian structure of the Maxwell-Vlasov equations," *Physica D,* cilt 43, pp. 394-406, 1982.

[50] J. E. Marsden, A. Weinstein, T. S. Ratiu, R. Schmid ve R. G. Spencer, "Hamiltonian systems with symmetry, coadjoint orbits and plasma physics," içinde *IUTAM-ISIMM symposium on modern developments in analytical mechanics*, Torino, 1982.

[51] J. E. Marsden ve M. West, "Discrete mechanics and variational integrators," *Acta Numerica,* cilt 10, pp. 357-514, 2001.

[52] K. R. Meyer, "Symmetries and integrals in mechanics," içinde *Dynamical systems*, 1973, pp. 259-273.

[53] T. Mokri, "Matched pairs of Lie algebroids," *Glasgow Mathematical Journal,* cilt 39, no. 2, pp. 167-181, 1997.

[54] P. J. Morrison, "The Maxwell-Vlasov equations as a continuous Hamiltonian system," *Physics Letters A,* cilt 805, pp. 383-386, 1980.

[55] P. J. Morrison ve J. M. Greene, "Noncanonical Hamiltonian density formulation of hydrodynamics and ideal magnetohydrodynamics," *Physical Review Letters,* cilt 4501, p. 790, 1980.

[56] H. Moscovici ve B. Rangipour, "Hopf algebras of primitive Lie pseudogroups and Hopf cyclic cohomology," *Advances in Mathematics,* cilt 2203, pp. 706-790, 2009.

[57] J. Moser ve A. P. Veselov, "Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials," *Communications in Mathematical Physics,* cilt 139, no. 2, pp. 217-243, 1991.

[58] P. J. Olver, Applications of Lie groups to Differential Equations, Springer Science & Business Media, 2000.

[59] L. Polterovich, The Geometry of the Group of Symplectic Diffeomorphism, Birkhäuser, 2001.

[60] M. Takeuchi, "Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras," *Communications in Algebra,* cilt 98, pp. 841-882, 1981.

[61] W. M. Tulczyjew, "The Legendre transformation," *In Annales de l'IHP Physique théorique,* cilt 27, no. 1, pp. 101-114, 1977.

[62] I. Vaisman, Lectures On the Geometry of Poisson Manifolds, Birkhäuser, 1994.

[63] A. P. Veselov, "Integrable discrete-time systems and difference operators," *Functional Analysis and its Applications,* cilt 22, no. 2, pp. 83-93, 1988.

[64] A. Weinstein, "Lagrangian mechanics and groupoids," *Fields Inst. Commun,* cilt 7, pp. 207-231, 1996.

[65] A. Weinstein, Lectures on Symplectic Manifolds, American Mathematical Soc, 1977.

[66] A. Weinstein, "The local structure of Poisson manifolds," *Journal of differential geometry,* cilt 183, pp. 523-557, 1983.

[67] K. Mackenzie, Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry, Cambridge university press, 1987.