

Toprakta Bir Boyutlu Isı İletkenlik Denklemine İncelenmesinde Benzerlik Teorisinin Uygulanması

İmanverdi EKBERLİ^{1*} Coşkun GÜLSER¹ Amrakh MAMEDOV²

¹Ondokuz Mayıs Üniversitesi Ziraat Fakültesi, Toprak Bilimi ve Bitki Besleme Bölümü, Atakum/ Samsun

²AMEA Toprak Bilim ve Tarımsal Kimya Enstitüsü ve Botanik Enstitüsü, Bakü/Azərbaycan

*Sorumlu yazar: iman@omu.edu.tr

Geliş tarihi: 27.07.2015, Yayına kabul tarihi:08.12.2015

Özet: Toprak yüzeyinin anlık ısınması veya soğuması toprak mikro iklimine ve toprak süreçlerine önemli düzeyde etki yapmaktadır. Bu çalışmada, toprak yüzeyinin anlık ısınması veya soğuması durumunda bir boyutlu ısı iletkenliği denklemi incelenmiştir. Denklem çözümü benzerlik teorisi uygulanmıştır. Hata, tamamlayıcı hata fonksiyonları ve Fourier sayısından yararlanılarak çözüm sade biçimde ifade edilmiştir. Yarısız ortamda (toprakta) θ birimsiz sıcaklığı ve $F_{o,y}$ Fourier sayıları arasındaki ilişki (Fourier sayılarının küçük ve büyük değerleri için) gösterilmiştir. Aynı zamanda, elde edilen çözümün kullanılması ile toprak profili boyunca sıcaklık değişiminin tahmin edilmesinin mümkünlüğü sayısal örnek üzerinde gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Toprak sıcaklığı, ısı iletkenliği denklemi, ısınma ve soğuma, birimsiz sıcaklık fonksiyonu, benzerlik teorisi

The Application of Similarity Theory for Investigation of One Dimensional Heat Conductivity Equation in Soil

Abstract: Instant heating and cooling of soil surface has an important effect on soil micro climate and soil processes. In this research, one dimensional heat conductivity equation was investigated in case of instant heating and cooling soil surface conditions. Similarity theory was applied for solution of the equation. The solution was expressed in a simple way with using error, complementary error functions and Fourier number. In semi-infinite media (soil), the relationship between θ dimensionless temperature and $F_{o,y}$ Fourier numbers (for small and large values of Fourier numbers) was shown. The prediction of changes in soil temperature along soil profile using the solution has been also shown on a numerical example.

Key words: Soil temperature, heat conductivity equation, heating and cooling, dimensionless temperature function, similarity theory.

Giriş

Farklı bilim alanlarında yeterli düzeyde teorik ve pratik araştırmaya konu olan (Goldstein et al., 2010a,b) değişik ortamlardaki ısı transferinin gözenekli bir ortam olan toprakta da belirlenmesi büyük öneme sahiptir. Topraktaki ısı transferi toprak sıcaklığına ve toprağın fiziksel, kimyasal, biyolojik özelliklerine, iklim

koşullarına vb. bağlı olup, bitki gelişiminde önemli bir faktördür. Isı transferinin belirlenmesi, ısı iletkenliği denkleminin çözümü ile ilişkilidir. Toprakta ısı iletkenliği çözümü kullanılarak sıcaklığın toprak profilindeki dağılımının tahmin edilmesi mümkün olabilmektedir. Verimliliğin artırılması da topraktaki optimum sıcaklık

ortamının oluşturulması, dolayısıyla ısı transferinin tahmin edilmesi ile ilgilidir. Isı transferinin belirlenmesi, toprak işleme yöntemlerinin uygulanmasında da gereklidir.

Passerat de Silans et al., (1996), ısı iletkenliği denkleminin harmonik (HM), Laplace dönüşümü (LTM), Düzeltilmiş Laplace dönüşümü (CLTM) ve homojen olmayan toprak sisteminde Lettau yöntemi (NHS) ile (Lettau, 1954) elde edilen çözümler karşılaştırılmış ve bu çözümlerin uygulanabilirliği incelenmişlerdir. Aynı zamanda çözümlerden kullanılarak elde edilen ısısal yayılım katsayılarını da karşılaştırılmışlardır. HM, LTM ve CLTM yöntemlerinde toprağın tüm termal özelliklerinin dikey homojenliği varsayılmıştır. Isı iletkenliği denkleminin çözümünün ısı taşınımına uygulanmasında ısısal yayılım katsayısının detaylı olarak belirlenmesi önemlidir. Verhoef et al. (1996), ısı iletkenliği denkleminin çözümünü göz önüne alarak, ısısal yayılım katsayısını belirlemek için beş yöntem (amplitüt, faz, arktanjan, logaritmik, harmonik denklemler) kullanmışlar, amplitüt ve harmonik denklemlerin daha güvenilir sonuç verdiğini göstermişlerdir. Ilıman iklim koşulunda, nemli ve seyrek genç orman altındaki makro gözenekli toprakta ve kar örtüsü altında olan topraklarda sıcaklık değişimlerinin belirlenmesinde de ısı iletkenlik modeli iyi sonuçlar vermektedir (Vogel et al., 2011; Oldroyd et al., 2013).

İklim değişikliğinin bitki gelişimine, topraktaki karbon ve azot değişimine etkisinin belirlenmesi, küresel iklim değişikliğinin bölgesel düzeydeki etkisinin araştırılmasının önemli konularından birisidir. Bu değişiklik yeraltı ve yerüstü suların kalitesine, kullanılabilirliğine, toprak verimliliğe vb. etki yapmaktadır. Bu değişikliğin değerlendirilmesi için toprak sıcaklığının belirlenmesi ve tahmin edilmesi, dolayısıyla ısı iletkenliği ve kütle taşınımı modellerinin yapılması ve bölgesel düzeyde kullanılması gereklidir (Luo et al., 1992; Alvenäs and Jansson, 1997; Kustas and Norman, 1999; van der Keur et al., 2001; Lin et al., 2003; Zhang et al., 2003; Muerth and Mauser, 2012; Ekberli ve Sarılar, 2015).

Ortamdaki ısı iletkenliğini ifade eden diferansiyel denklemin çözümü ve ısısal parametreler farklı yaklaşımlar ve yöntemlerle belirlenebilmektedir (Luikov and Mikhailov, 1959; Luikov, 1967; İsacenko i dr., 1981; Passerat de Silans et al., 1996; Ghasemi, 2014; Underwood, 2014; Nowamooz et al., 2015). Horton et al., (1983), harmonik analiz yönteminden faydalanarak toprağın ısı iletkenliği denkleminin çözümünü Fourier serisi biçiminde belirlemiş ve toprak sıcaklığının tahmin edilmesinde kullanmışlardır. Evet et al., (2012) ise, Fourier serisi biçimindeki çözümden kullanarak toprağın ısısal yayılım, ısı iletkenliği ve ısı akımını belirlemişlerdir. Isı iletkenliği denkleminin çözümünden kullanarak toprağın sıcaklık alanının tahmin edilmesi ve düzenlenmesi için, toprağın farklı derinliklerinde (en az iki) sıcaklık değerlerinin belirlenmesi, bu ölçümlere bağlı olarak ısısal yayılımın değerlendirilmesi gerekmektedir (Wang, 2012; Huang et al., 2014). Dong et al., (2015), toprak neminin tahmin edilmesinde sıcaklık değerlerinden ve bu değerlere bağlı olarak ısı iletkenliği modelini kullanmışlardır.

Isı iletkenliği denkleminin çözümünde kullanılan benzerlik teorisi çözümün elde edilmesini, ortamdaki sürecin incelenmesini ve çözümün uygulamasını kolaylaştırmaktadır (İsacenko i dr., 1981; Gilding, 1982; Okoya, 2001; Afify, 2009; İhsak, 2010; Samanta and Guha, 2012; Xu et al., 2015). Bu yöntem ilk kez akışkanlar mekaniği alanına ait problem çözümüde, bağımsız değişkenlerin sayısını azaltarak temel denklemin sadeleştirilmesinde Blasius (1908) tarafından kullanılmıştır.

Bu çalışmanın amacı, toprağın bir boyutlu ısı iletkenliği denkleminin birimsiz sıcaklık fonksiyonu dahil edilerek benzerlik teorisine göre incelenmesidir.

Materyal ve Yöntem

Toprakta ısı iletkenliğinin tek boyutlu $(t = f_3(x, \tau); \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0)$ olduğu

varsayıldığında, toprağın aşağı katmanlarına doğru yönelen ısı akımı aşağıdaki Fourier

denklemini ifade edilebilir (Luikov, 1967):

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}$$
 [burada, q (Joule/m².sn)-ısı

akımının yoğunluğu olup, birim alandan ısının taşınım hızıdır; λ (Joule/m.sn.K)-ısı iletkenliği; t (K veya °C)- sıcaklık; x (cm) mesafedir]. Isı akımı denklemini topraktaki sıcaklığın yüksek olan kısımdan düşük kısma naklini, yani yüksek potansiyelden düşük potansiyele akımını ifade etmektedir. Topraktaki bir boyutlu ısı taşınım süreci, ısı akımı ifadesinden yararlanılarak elde edilen ısı iletkenlik denklemi, $t_\tau(x, \tau) = at_{xx}(x, \tau)$

(τ -zaman, san; a -ısısal yayılım katsayısı, cm²san⁻¹) ile ifade edilmektedir (İsacenko et al., 1981). Isı iletkenlik denklemi, bu çalışmada toprak sıcaklığının profil boyunca dağılımının tahmin edilmesi için oluşturulacak modelin materyalini oluşturmaktadır. Toprak sıcaklığı modelinin oluşturulması için, benzerlik teorisine uygun olarak birimsiz sıcaklık fonksiyonu dahil edilerek, ısı iletkenlik denklemine ait analitik çözüm yöntemi kullanılmıştır.

Bulgular ve Tartışma

Yarısonsuz ortam (toprak) yüzeyinin anlık ısınması veya soğuması durumunda bir boyutlu ısı iletkenlik denkleminin incelenmesi

Yarısonsuz ortamın (toprağın) ($y > 0$) sınırında ($y = 0$) sıcaklığın anlık değişimi durumunda, toprağın

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} (0 \leq y < \infty, \tau > -\infty) \quad (1)$$
 (burada, t -toprak sıcaklığı, °C; τ -zaman, san; a -ısısal yayılım katsayısı, cm²san⁻¹; y - mesafe, cm) ısı iletkenliği denkleminin çözümünü inceleyelim.

$\tau = 0$ anında tüm yarısonsuz ortamın sıcaklığı t_0 , $\tau > 0$ anında ise $y = 0$ yüzeyinde sabit t_y sıcaklığı olmaktadır. $t_y > t_0$ durumunda yarısonsuz ortamda ısı akımı gerçekleşmekte ve sıcaklık yavaş yavaş artmaktadır. Eğer $t_0 > t_y$ ise yarısonsuz ortam soğumakta ve sıcaklık değerleri azalmaktadır. $t_y > t_0$

durumundaki sıcaklığın dağılımı Şekil 1'de gösterilmiştir.

$t_0 > t_y$ durumundaki sıcaklığın dağılımını belirlemek için, (1) denkleminin aşağıdaki sınır koşullarında çözülmesi gerekmektedir:

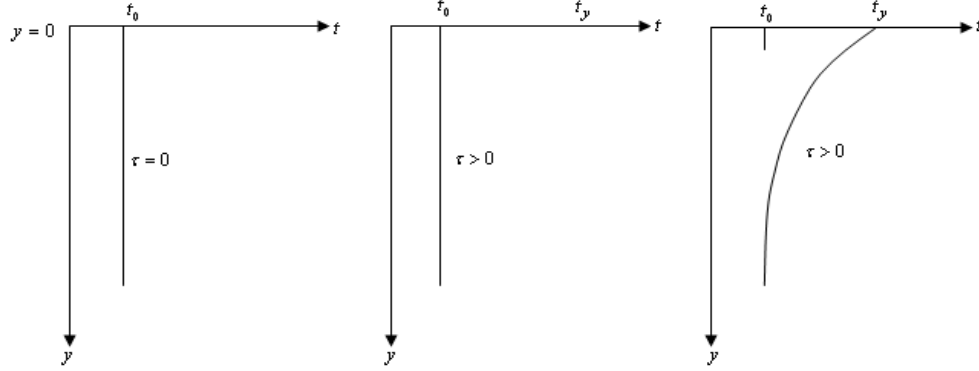
$$\begin{aligned} t = t_0, \quad \tau = 0, y > 0 \text{ ise} \\ t = t_y, \quad \tau > 0, y = 0 \text{ ise} \quad (2) \\ t \rightarrow t_0, \quad \tau > 0, y \rightarrow \infty \text{ ise} \end{aligned}$$

(1), (2) problemi boyut analizi ve benzerlik teorisi kullanılarak çözülmektedir.

Herhangi bir ortamdaki fiziksel süreçleri ifade eden denklemin terimleri, süreci ifade eden temel değişkenleri kapsayan diferansiyel ifadelerden oluşmaktadır. Bu durumda, diferansiyel ifadelerin sonlu ifadelerle dönüştürülmesi yönteminin belirlenmesi gereklidir. Benzerlik teorisi diferansiyel ifadeler içeren terimlerin basit cebirsel ifadelerle dönüşümünü sağlayan genel yöntemin elde edilmesine imkan sağlar. Bu yöntemde gerçek süreç basit ve koşullu durumla değiştirilmekte, tüm diferansiyel ifadeler ise ortamdaki sürecin gerçekleştiği zamanda sabit değerlerini sağlamaktadır. Benzerlik teorisi kullanılarak boyutlu fiziksel parametreler birleştirilerek boyutsuz bir ifade biçiminde gösterilir. Boyutsuz ifade sayısı, bu ifadeyi oluşturan parametreler sayısından daha az olmakta ve boyutsuz ifadeye yeni bir değişkenmiş gibi bakılmaktadır. Denklem boyutsuz bir ifade dahil edildiğinde, aranan fonksiyonda şekilsel olarak değişkenler azalmakta ve sürecin incelenmesi kolaylaşmaktadır. Bundan başka, yeni boyutsuz değişkenler ayrı ayrı faktörlerin etkisini göstermekle beraber, boyutsuz değişkenlerin birleşimi incelenen süreçlerdeki fiziksel ilişkilerin kolay belirlenmesine imkan sağlar. Benzerlik teorisi her hangi bir ortamdaki model veya laboratuvar sonuçlarının benzer başka bir ortam sürecinde de uygulanabilirliği koşullarının tespitinde kullanılmaktadır. Boyutsuz değişken sayısının belirlenmesinde Buckingham π teoremi kullanılmaktadır: $N \geq 2$ sayıda boyutlu değişkene sahip ve bu değişkenler içerisinde $K \geq 1$ sayıda temel boyutla (kütle,

uzunluk, zaman vb.) ifade edilen değişkenlerden oluşmuş, fiziksel denklemlerin boyutsuz biçime dönüştürülmesi sonucunda boyutsuz değişken sayısı $N - K$ olmaktadır

(Buckingham, 1914; Bridjmen, 1934; Kirpiçev i Konakov, 1949; Sedov, 1967; Guhman, 1973; Moiseev i İvanova , 2000; Moiseev, 2004).



Şekil 1. Yüzey sıcaklığının aniden yükselmesi durumunda yarısonsuz ortamın ısınması
Figure 1. Heating semi-infinite media in case of instant rising of surface temperature.

(1), (2) problemini çözmek için, benzerlik teorisine uygun olarak belirli olmayan boyutsuz sıcaklık fonksiyonu dahil edilir:

$$\theta = \frac{t - t_0}{t_y - t_0} \quad (3)$$

θ boyutsuz sıcaklık fonksiyonu, $t(y, \tau)$ fonksiyonunun sağladığı denklemi sağlamaktadır:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (4)$$

(2) sınır koşulları ve (3) ifadesi göz önüne alındığında, sınır koşulları daha basit biçimde ifade edilir:

$$\begin{aligned} \theta(y, 0) &= 0, \\ \theta(0, \tau) &= 1, \\ \theta(\infty, \tau) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

y koordinatının dışında uzunluk boyutu ile yalnız ısısal yayıma özgü $\sqrt{a\tau}$ uzunluğu ifade edildiğinde, θ 'nın değeri

$$y\tau^\beta a^\gamma = LT^\beta \left(\frac{L^2}{T}\right)^\gamma = L^{1+2\gamma} T^{\beta-\gamma} = L^0 T^0 \Rightarrow \begin{cases} 1+2\gamma=0 \\ \beta-\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}, \alpha = -\frac{1}{2} \text{ olarak, } y, \tau, a$$

değişkenlerinin mümkün olan boyutsuz birleşimi $y\tau^\beta a^\gamma = y\tau^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} = \frac{y}{\sqrt{a\tau}}$ olur.

benzerlik teorisile belirlenmektedir. θ boyutsuz fonksiyonu $N = 3$ (uzunluk- L , zaman- T , ısısal yayınım- $\frac{L^2}{T}$) sayıda boyutlu değişkene sahip olup, N değişkenleri içerisinde $K = 2$ sayıda değişken (uzunluk- L , zaman- τ) ise temel boyutlarla ifade edilmektedir. π teoremine göre, θ boyutsuz fonksiyonu temel boyutlarla ifade edilen değişkenlerin birleşmesinden oluşan $N - K = 1$ sayıda boyutsuz değişkene bağlı olmaktadır. Bu durumda boyut yöntemine göre, $y^\alpha \tau^\beta a^\gamma$ ifadesi sıfır boyutlu olup, aşağıdaki eşitlik sağlanmaktadır:

$$y^\alpha \tau^\beta a^\gamma = L^0 T^0$$

Boyutsuz değişkenin kuvveti de birimsiz olduğu için, α, β ve γ sayıları sınırlanmamakta ve her hangi bir sayının ± 1 'e eşit olması mümkündür. $\alpha = 1$ ise,

$$\text{Böylece, } \eta = \frac{y}{2\sqrt{a\tau}} \quad (6) \text{ ve}$$

$$\theta = f\left(\frac{y}{2\sqrt{a\tau}}\right) = f(\eta) \text{ (çözümün basit}$$

biçimde alınması için 2 çarpanı kullanılmıştır) olarak, boyut analizine göre θ boyutsuz fonksiyonu y ve τ değişkenlerine değil, ancak η boyutsuz değişkenine bağlı olur.

y eksenini $\sqrt{\tau_1/\tau_2}$ katı kadar uzatmakla, ortamdaki sıcaklığın τ_1 zamanındaki yayılımının τ_2 zamanındaki yayılımından elde etmek mümkün olduğundan, denklemin farklı t zamanlarına uygun çözümleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{d\theta}{d\eta} \left(-\frac{1}{4} \frac{y}{\sqrt{a}} \frac{1}{\tau^{3/2}} \right) = \frac{d\theta}{d\eta} \left(-\frac{1}{4} \frac{y}{\sqrt{a\tau}} \frac{1}{\tau} \right) = \frac{d\theta}{d\eta} \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{\tau} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{1}{2\sqrt{a\tau}}, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= \frac{1}{2\sqrt{a\tau}} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{a\tau}} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \frac{1}{2\sqrt{a\tau}} = \frac{1}{4} \frac{1}{a\tau} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2}.\end{aligned}$$

Bu durumda, (4) denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$-\eta \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (7)$$

(6) ifadesinde, $y = 0$ değeri $\eta = 0$ değerine $\tau = 0$ ve $y = \infty$ değerleri ise $\eta = \infty$ değerine uygun olduğu için (5) sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}\theta(\infty) &= 0, \\ \theta(0) &= 1.\end{aligned} \quad (8)$$

η 'nin benzerlik değişkeni olarak kabul edilmesi sonucunda, (4) kısmi türevli diferansiyel denklemi η değişkenine bağlı (7) basit diferansiyel denkleme dönüşmekte, y ve τ değişkenlerine uygun (5) sınır koşulları ise (8) biçiminde ancak η ile ifade edilmektedir. Bu yaklaşım benzerlik teorisi doğruluğunun "sonsal" ("a posteriori") ispatı olmaktadır.

$\varphi = \frac{d\theta}{d\eta}$ dönüşümü yapılırsa, (7) denklemi

aşağıdaki biçimde olur:

$$-\eta \varphi = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{d\eta} \quad \text{veya} \quad -\eta d\eta = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{\varphi}.$$

İntegrali alınırsa, $-\eta^2 = \ln \varphi - \ln c_1 \Rightarrow -\eta^2 = \ln \frac{\varphi}{c_1}$

(burada, $\ln c_1$ integral sabitidir) olarak,

birbirine "benzer" olmaktadır. Bu nedenle, η birimsiz parametresi benzerlik değişkeni olarak tanımlanmaktadır.

(4) denkleminin ve (5) sınır koşullarının η değişkeni ile ifade edilmesi için, τ ve y değişkenlerinin kısmi türevlerinin η 'ya göre kısmi türevle ifade edilmesi gerekir. (4) denklemine dahil olan kısmi türevler aşağıdaki gibi yazılır:

$$\varphi = c_1 e^{-\eta^2} = \frac{d\theta}{d\eta} \quad \text{veya} \quad d\theta = c_1 e^{-\eta^2} d\eta \quad (9)$$

elde edilir. (9) ifadesinin integrali alınırsa,

$$\theta = c_1 \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + c_2 \quad (10)$$

olur. Burada, η integral değişkeni, c_2 ikinci integral sabiti olup, $\theta(0) = 1$ koşuluna göre ise $c_2 = 1$ olmaktadır. $c_2 = 1$ sabiti,

$$\theta(\infty) = 0 \quad \text{koşulu} \quad \text{ve} \quad \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

belirli integrali (Diktin i Prudnikov, 1965) (10)'da göz önüne alınırsa, $c_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ olarak,

$$\theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \quad (11)$$

bulunur. (11) çözümünde integrale ifade olunan fonksiyon fiziksel problemlerin çözümünde yaygın olarak kullanılmakta olan hata fonksiyonu (Gauss integral hata veya Kramp fonksiyonu)- $erf\eta$ olmaktadır:

$$erf\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta.$$

Bu durumda, θ 'nın ifadesi $\theta = 1 - erf\eta = erfc\eta$ (12) (burada, $erfc\eta$ tamamlayıcı hata fonksiyonudur) gibi yazılır. $erf\eta$ ve $erfc\eta$ fonksiyonlarının değerleri Çizelge 1 ve Şekil 2'de gösterilmiştir. $erf\eta$ fonksiyonu

$erf(0) = 0$ ve $erf(\eta \rightarrow \infty) = 1$ (pratik olarak $\eta > 2.7$ olduğunda; öyle ki, $erf(2.7) = 0.9999$) olarak $[0, 1]$ aralığında değişmektedir.

Böylece, τ zamanının ve y mesafesinin fonksiyonu olan (3) boyutsuz sıcaklığı (12) ifadesi ile gösterilmektedir. Bu ifade başlangıç parametrelerine göre (a, τ, y) aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\frac{t-t_0}{t_y-t_0} = erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{a\tau}}\right) \quad (13)$$

(13) denkleminin bir parametresi olan ısısal yayılım L^2/τ boyutuna sahip olduğundan, sıcaklığın değişim zamanının τ olması durumunda sıcaklık dağılımının derinliği $\sqrt{a\tau}$ düzeyinde olacaktır. Sıcaklık değişiminin L derinliğine etki yapması için ise gerekli olan zaman L^2/a olur. Bu boyut oranlarının bazı ortamlarda (toprakta) sıcaklık etkilerinin değerlendirilmesinde kullanılması mümkündür. Aynı zamanda (13) çözümünden görüldüğü gibi, τ zamanında ortamdaki sıcaklık değişimi ısısal yayılımın etki mesafesine bağlıdır.

Çizelge 1. Hata $(erf(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du)$ ve tamamlayıcı hata $(erfc(\eta) = 1 - erf(\eta))$

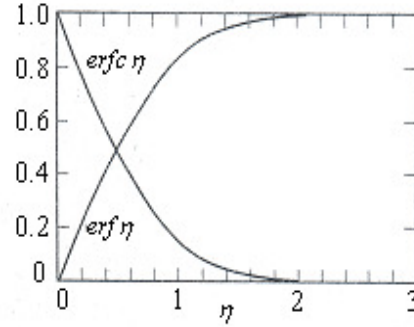
fonksiyonunun bazı değerleri

Table 1. Some values of error $(erf(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du)$ and complementary error

$(erfc(\eta) = 1 - erf(\eta))$ functions

η	$erf\eta$	$erfc\eta$	η	$erf\eta$	$erfc\eta$
0	0	1.0	0.80	0.7421	0.2579
0.02	0.0226	0.9774	0.85	0.7707	0.2293
0.04	0.0451	0.9549	0.90	0.7969	0.2031
0.06	0.0676	0.9324	0.95	0.8209	0.1791
0.08	0.0901	0.9099	1.0	0.8427	0.1573
0.10	0.1125	0.8875	1.1	0.8802	0.1198
0.15	0.1680	0.8320	1.2	0.9103	0.0897
0.20	0.2227	0.7773	1.3	0.9340	0.0660
0.25	0.2763	0.7237	1.4	0.9523	0.0477
0.30	0.3286	0.6714	1.5	0.9661	0.0339
0.35	0.3794	0.6206	1.6	0.9763	0.0237
0.40	0.4284	0.5716	1.7	0.9838	0.0162
0.45	0.4755	0.5245	1.8	0.9891	0.0109
0.50	0.5205	0.4795	1.9	0.9928	0.0072
0.55	0.5633	0.4367	2.0	0.9953	0.0047
0.60	0.6039	0.3961	2.2	0.9981	0.0019
0.65	0.6420	0.3580	2.4	0.9993	0.0007
0.70	0.6778	0.3222	2.6	0.9998	0.0002
0.75	0.7112	0.2888	2.8	0.9999	0.0001

(13) çözümünde, $y = 0$ olduğunda $erfc(0) = 1$ olarak $t = t_y$ elde edilir. $\tau = 0$ veya $y \rightarrow \infty$ ise $erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{a\tau}}\right) = 0$ ve $t = t_0$ olur. Şekil 2'de y ve τ değişkenlerinin keyfi değerleri için θ veya $\frac{t-t_0}{t_y-t_0}$ çözümünün şekilsel biçimi $erfc\eta$ fonksiyonunun eğrisiyle gösterilmiştir.v



Şekil 2. Hata ve tamamlayıcı hata fonksiyonu

Figure 2. Error and complementary error functions.

$\frac{a\tau}{y^2}$ oranı ısı iletkenliğinin y koordinatı

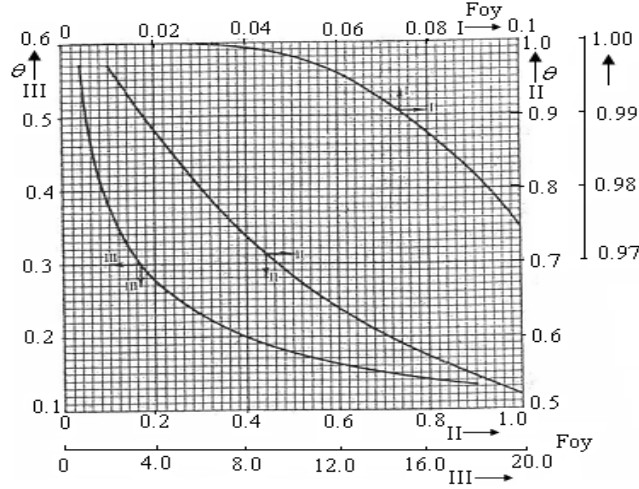
için boyutsuz Fourier sayısı olmaktadır:

$F_{oy} = \frac{a\tau}{y^2}$. Bu durumda, (13) çözümü

$$\frac{t-t_0}{t_y-t_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F_{oy}}}\right) \text{ veya}$$

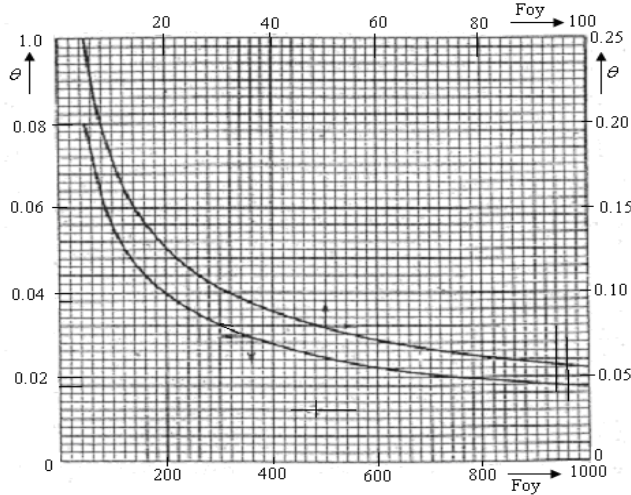
$$\frac{t_y-t}{t_y-t_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{F_{oy}}}\right) \text{ (14) gibi olur.}$$

Pratik hesaplamalarda kullanılmakta olan boyutsuz sıcaklık (θ) ve 0.02 -1000 Fourier sayıları arasındaki bazı $\theta = f(F_{oy})$ eğrileri Şekil 3 ve 4'te gösterilmiştir (Lıkov, 1967).



Şekil 3. Yarısonsuz ortamda θ sıcaklığı ve F_{oy} Fourier sayıları arasındaki ilişki (Fourier sayılarının küçük değerleri için)

Figure 3. The relationship between θ temperature and F_{oy} Fourier numbers (for small values) in a semi-infinite media.



Şekil 4. Yarısonsuz ortamda θ sıcaklığı ve F_{oy} Fourier sayıları arasındaki ilişki (Fourier sayılarının büyük değerleri için)

Figure 4. The relationship between θ temperature and F_{oy} Fourier numbers (for large values) in a semi-infinite media.

Homojen Toprak Profili için Çözümün uygulanması

Toprak sıcaklığının ve termal özelliklerinin profil boyunca dağılımı üzerine tanecik yoğunluğu, hacim ağırlığı, organik madde, nem içeriği ve nispi doygunluk gibi toprak özelliklerinin etki ettiği bilinmektedir (Ekberli ve ark., 2005). Elde edilen çözüm, masif yapıda, kum bünyeli (%92.3 kum, %4.6 silt, %3.1 kil), kireç içeriği %0.4, EC değeri 0.13 dS/m, ve organik madde içeriği %0.10 olan, özellikle bünye bakımından homojen kabul edilen 50 cm toprak katmanında toprak sıcaklığının yüzeyden alt katmanlara doğru belirli bir zaman diliminde iletiminin tahmin edilmesi

için uygulanmıştır. Toprak yüzeyinde $\tau = 5$ saat içerisinde yüzey sıcaklığının $t_y = t(0, \tau) = 25^\circ C$; toprak derinliği (y eksen) boyunca sabit ortalama sıcaklığın $t_0 = 20^\circ C$; ısısal yayılım katsayısının $a = 8.35 \cdot 10^{-6} m^2 \text{san}^{-1}$ olduğu kabul edilen 50 cm'lik toprak profilinin her bir 5 cm katmanındaki sıcaklık değişimi aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

Diğer katmanlar için yapılan benzer hesaplamalar sonucu masif kum bünyeli nem içeriğince homojen olan 50 cm lik toprak katmanındaki sıcaklık değişimi Şekil 5'de verilmiştir.

Örneğin, toprağın $y = 0.5$ m derinliğindeki Fourier sayısı bulunur:

$$F_{oy} = \frac{8.35 \cdot 10^{-6} m^2 \text{san}^{-1} \cdot 18000 \text{san}}{0.25} = 0.60 \cdot \theta = \text{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{F_{oy}}} \right) = f(F_{oy}) \text{ eğrisinden (Şekil 3)}$$

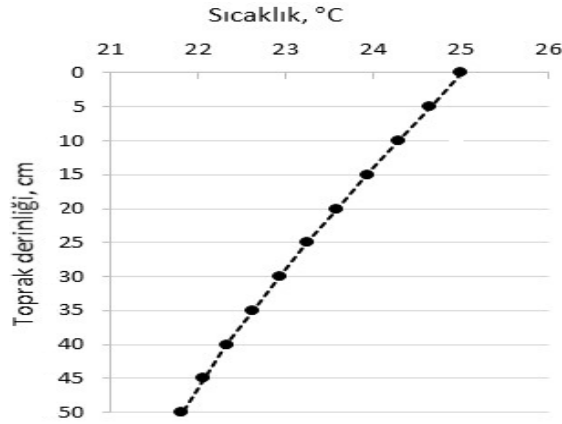
$\theta = 0.642$ bulunur.

$$\frac{t_y - t}{t_y - t_0} = \text{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{F_{oy}}} \right) \text{ (14) ifadesine göre, } \theta = \frac{t_y - t}{t_y - t_0} = 0.6420 \text{ olarak } t(y, \tau) = 21.79^\circ C \text{ elde}$$

edilir.

$$\text{Benzer biçimde, } \frac{t - t_0}{t_y - t_0} = \text{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{a\tau}} \right) \text{ (13) ifadesinden } \frac{t - 20}{25 - 20} = \text{erfc}(0.65) = 0.3580$$

(Çizelge 1) olarak $t(y, \tau) = 21.79^\circ C$ bulunur.



Şekil 5. Fiziksel ve kimyasal özelliklerce homojen kabul edilen toprak profili boyunca sıcaklık değişimi.

Figure 5. Change in temperature through soil profile which is assumed as homogenous physical and chemical properties.

Sonuç

Benzerlik teorisine göre boyutsuz sıcaklık fonksiyonu dahil edilmiş ve bu yöntemle dayanarak toprak yüzeyinin anlık ısınması veya soğuması durumunda bir boyutlu ısı iletkenliği denkleminin çözümü incelenmiştir. Hata, tamamlayıcı hata fonksiyonlarını ve Fourier sayısının çözümde kullanımı gösterilmiş, elde edilen çözüm sayısal örnekle desteklenmiştir. Toprağın yüzey ve derinlik boyunca ortalama sıcaklığının, ısısal yayılım katsayısının deneysel olarak belirlenmesi sonucunda, elde edilen çözümün fiziksel ve kimyasal özellikler bakımından homojen olan toprak katmanlarına uygulanması mümkün gözükmektedir.

Kaynaklar

- Afify, A.A., 2009. Similarity solution in MHD: Effects of thermal diffusion and diffusion thermo on free convective heat and mass transfer over a stretching surface considering suction or injection. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 14: 2202–2214.
- Alvenäs, G. and Jansson, P.E., 1997. Model for evaporation, moisture and temperature of bare soil: calibration and sensitivity analysis. *Agricultural and Forest Meteorology*, 88: 47-56.
- Blasius, H., 1908. Grenzsichten in flüssigkeiten mit kleiner reibung, *Z. Math. Phys.*, 56: 1–37.
- Bridjmen, P.V., 1934. *Analiz razmernostey*. ONTİ Press, Moskova-Leningrad, 119 s.
- Buckingham, E., 1914. On Physically Similar Systems: Illustrations of the Use of Dimensional Analysis. *Phys. Rev.*, 4: 345.
- Ditkin, V.A. i Prudnikov, A.P., 1965. *Spravočnik po operasionnomu işçisleniyu*. Vışşaya Şkola Press, Moskova, s. 7-30.
- Dong, J., Steele-Dunne, S.C., Judge, J. and van de Giesen, N., 2015. A particle batch smoother for soil moisture estimation using soil temperature observations. *Advances in Water Resources*, 83: 111–122.
- Ekberli, İ., Gülser, C. ve Özdemir, N., 2005. Toprakların termo-fiziksel özellikleri ve ısısal yayılım katsayısının değerlendirilmesi. *O.M.Ü. Zir. Fak. Dergisi*, 20(2): 85-91.
- Ekberli, İ. ve Sarılar, Y., 2015. Toprak sıcaklığı ve ısısal yayılımının belirlenmesi. *Anadolu Tarım Bilimleri Dergisi*, 30 (1): 65-76.
- Evet, S.R., Agam, N., Kustas, W.P., Colaizzi, P.D. and Schwartz, R.C. 2012. Soil profile method for soil thermal diffusivity, conductivity and heat flux: Comparison to soil heat flux plates. *Advances in Water Resources*, 50: 41–54.
- Ghasemi, S.E., Hatami, M. and Ganji, D.D., 2014. Thermal analysis of convective fin with temperature-dependent thermal conductivity and heat generation. *Case Studies in Thermal Engineering*, 4: 1–8.
- Gilding, B.H., 1982. Similarity solutions of the porous media equation. *Journal of Hydrology*, 56 (3–4): 251-263.
- Goldstein, R.J., Ibele, W.E., Patankar, S.V., Simon, T.W., Kuehn, T.H., Strykowski, P.J., Tamma, K.K., Heberlein, J.V.R., Davidson, J.H., Bischof, J., Kulacki, F.A., Kortshagen, U., Garrick, S., Srinivasan, V., Ghosh, K. and Mittal, R. 2010a. Heat transfer—A review of 2004 literature. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53: 4343–4396.
- Goldstein, R.J., Ibele, W.E., Patankar, S.V., Simon, T.W., Kuehn, T.H., Strykowski, P.J., Tamma, K.K., Heberlein, J.V.R., Davidson, J.H., Bischof, J., Kulacki, F.A., Kortshagen, U., Garrick, S., Srinivasan, V., Ghosh, K. and Mittal, R. 2010b. Heat transfer—A review of 2005 literature. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53: 4397–4447.
- Guhman, A.A., 1973. *Vvedeniye v teoriya podobiya*. Vışşaya Şkola Press, Moskova, 254 s.

- Horton R, Wierenga P.J. and Nielsen D.R., 1983. Evaluation of methods for determining the apparent thermal diffusivity of soil near the surface. *Soil Science Society of America Journal*, 47: 25-32.
- Huang, F., Zhan, W., Ju, W. and Wang, Z., 2014. Improved reconstruction of soil thermal field using two-depth measurements of soil temperature. *Journal of Hydrology*, 519: 711–719.
- Ihsak, A., 2010. Similarity solutions for flow and heat transfer over a permeable surface with convective boundary condition. *Applied Mathematics and Computation* 217: 837–842.
- İsacenko, V.P., Osipova, V. A. i Sukomel, A.S., 1981. *Teploperedaça*. Energoizdat Press, Moskova, 417s.
- Kirpiçev, M.V. i Konakov, P.K., 1949. *Matematıçeskiye osnovı teori podobiya*. AN SSSR Press, Moskova-Leningrad, 98 s.
- Kustas, W.P. and Norman, J.P., 1999. Evaluation of soil and vegetation heat flux predictions using a simple two-source model with radiometric temperatures for partial canopy cover. *Agricultural and Forest Meteorology*, 94: 13-29.
- Lettau, H.H., 1954. Improved models of thermal diffusion in the soil. *Trans. Am. Geophys. Union*, 35: 121-132.
- Lin, X., Smerdon, J.E., England, A.W. and Pollack, H.N., 2003. A model study of the effects of climatic precipitation changes on ground temperatures. *Journal of Geophysical Research*, 108(D7): 4230.
- Luikov, A.V., 1967. *Teoriya teploprovodnosti*. Vişşaya Şkola Press, Moskova, 599 s.
- Luikov, A.V. i Mikhailov, Y.A., 1959. *Teoriya perenosa energii i veşestva*. İzdatelstvo Akademii Nauk BSSR, Minsk, 332 s.
- Luo, Y., Loomis, R.S. and Hsiao, T.C., 1992. Simulation of soil temperature in crops. *Agricultural and Forest Meteorology*, 61(1-2): 23-38.
- Moiseev, K.G., 2004. Application of similarity theory for the study of soil compaction phenomena. *Pocvovedeniye*, 8: 934-936.
- Moiseev, K.G. i İvanova, K.F., 2000. *Primeneniye teori podobiya pri izučenii sdviga pocv*. *Pocvovedeniye*, 10: 1233-1237.
- Muerth, M. and Mauser, W., 2012. Rigorous evaluation of a soil heat transfer model for mesoscale climate change impact studies. *Environmental Modelling & Software*, 35: 149-162.
- Nowamooz, H., Nikoosokhan, S. and Lin, J., Chazallon, C., 2015. Finite difference modeling of heat distribution in multilayer soils with time-spatial hydrothermal properties. *Renewable Energy*, 76: 7-15.
- Okoya, S.S., 2001. Similarity temperature profiles for some nonlinear reaction - diffusion equations. *Mechanics Research Communications*, 28(4): 477-484.
- Oldroyd, H.J., Higgins, C.W., Huwald, H., Sekler, J.S. and Parlange, M.B., 2013. Thermal diffusivity of seasonal snow determined from temperature profiles. *Advances in Water Resources*, 55: 121–130.
- Passerat de Silans, A.M., Monteny, B.A. and Lhomme, J.P., 1996. Apparent soil thermal diffusivity, a case study: HAPEX-Sahel experiment. *Agricultural and Forest Meteorology*, 81: 201-216.
- Samanta, S. and Guha, A., 2012. A similarity theory for natural convection from a horizontal plate for prescribed heat flux or wall temperature. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55: 3857–3868.
- Sedov, L.İ., 1967. *Metodı podobiya i razmernosti v mehanike*. Nauka Press, Moskova, 428 s.
- Underwood, C.P., 2014. An improved lumped parameter method for building thermal modelling. *Energy and Buildings*, 79: 191–201.
- van der Keur, P., Hansen, S., Schelde, K. and Thomsen, A., 2001. Modification of DAISY SVAT model for potential use of remotely sensed data.

- Agricultural and Forest Meteorology, 106: 215-231.
- Verhoef, A., van den Hurk, B.J.J.M., Jacobs, A.F.G. and Heusinkveld, B.G., 1996. Thermal soil properties for vineyard (EFEDA-I) and savanna (HAPEX-Sahel) sites. *Agricultural and Forest Meteorology*, 78: 1-18.
- Vogel, T., Dohnal, M. and Jana Votrubova, J., 2011. Modeling heat fluxes in macroporous soil under sparse young forest of temperate humid climate. *Journal of Hydrology*, 402: 367-376.
- Wang, Z.H., 2012. Reconstruction of soil thermal field from a single depth measurement. *Journal of Hydrology*, 464: 541-549.
- Xu, G., Li, Y., Deng, H., Li, H. and Yu, X., 2015. The application of similarity theory for heat transfer investigation in rotational internal cooling channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 85: 98-109.
- Zhang, Y., Chen, W. and Cilhar, J., 2003. A process -based model for quantifying the impact of climate change on permafrost regimes. *Journal of Geophysical Research*, 108(D22): 4695.