H.Ü. İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, Cilt 20, Sayı 2, 2002, s. 141-153

MARKOWİTZ KUADRATİK PROGRAMLAMA İLE PORTFÖY SEÇİM MODELİ UYGULAMASI: İMKB-30 ENDEKSİ İLE AYNI RİSK-GETİRİ YAPISINA SAHİP PORTFÖYÜN BELİRLENMESİ

Aydın ULUCAN

(Yrd. Doç. Dr., Hacettepe Üniversitesi, İşletme Bölümü, 06532, ANKARA aulucan@hacettepe.edu.tr)

Özet:

Bu çalışmada, Markowitz kuadratik programlama ile portföy seçim modelinin İMKB 30 endeksinde yer alan şirketler üzerinde uygulamaları yapılmıştır. Çalışmanın ilk aşamasında kuadratik programlama formundaki standart Markowitz portföy seçim modeli, İMKB 30 endeksi ile aynı risk-getiri yapısındaki portföyü oluşturacak şekilde modifiye edilmiştir. Ardından İMKB 30 şirketlerinin Ağustos 1999-Eylül 2003 arasındaki 50 aylık getiri değerleri kullanılarak beklenen getiri ve varyans-kovaryans matrisi elde edilmiş ve model çözülmüştür. İkinci aşamada standart kuadratik programlama modeli kullanılarak İMKB 30 endeksi ile aynı getiri düzeyinde daha düşük riskli portföy ağırlıkları bulunmuştur. Son olarak da standart kuadratik programlama modeli kullanılarak İMKB 30 endeksi ile aynı risk düzeyinde daha yüksek getirili portföy ağırlıkları bulunmuştur. Ayrıca çalışma ile karmaşık matematiksel altyapısı olan portföy seçim modellerinin elektronik hesap tabloları kullanılarak hızlı ve etkin bir biçimde çözülebileceği de gösterilmiştir.

Abstract:

An Application of the Markowitz Quadratic Programming Portfolio Selection Model: Determination of the Portfolio which has the same Risk-Return Structure with the Ise-30 Indice

In this study, Markowitz portfolio selection model is applied to the ISE 30 companies. In the first part of the study, Markowitz portfolio

---

Anahtar Sözcükler: Portföy optimizasyonu, kuadratik programlama, sermaye piyasaları.
Keywords: Portfolio optimization, quadratic programming, capital markets.

selection model, which is in the form of quadratic programming, was modified to compose a portfolio which has the same risk-return structure with the ISE 30 index. Then using 50 months return values of ISE 30 companies during August 1999-September 2003, expeceted return and variance-covariance matrices were obtained and the model was solved. In the second part, using standart quadratic programming model, portfolio weights which have the same return level with ISE 30 index but have lower risk than ISE 30 index were determined. Finally, using standart quadratic programming model, portfolio weights which have the same risk level with ISE 30 index but have higher return than ISE 30 index were determined. In addition to these, it is shown that complex portfolio selection models can be solved fastly and efficiently using electronic spreadsheets.

GİRİŞ

Sermaye piyasalarında kullanılan endeksler temsil ettikleri hisse senetlerinin belli oranlarla ve belli formüllerle biraraya getirilmeleri ile hesaplanırlar. Pek çok kurumsal ve kişisel yatırımcı endeksin getiri-risk düzeyinde getiri sağlayıp risk üstlenmek istemektedir. Oysa buna ulaşmak isteyen yatırımcı çok sayıda hisse senedini farklı oranlarda elinde bulundurmak zorundadır. Ayrıca hisse senetlerinin fiyatları değiştikçe elindeki portföyün yapısını da değiştirmek zorunda kalacaktır.

Herhangi bir endeksin risk-getiri yapısını temsil eden hisse senetlerinden oluşan portföyün belirlenmesi için kuadratik programlama formundaki Markowitz portföy seçim modeli modifiye edilerek kullanılabilir.

Markowitz portföy seçim modeli, optimal yatırım portföyüne sahip olmak için, portföyde yer alabilecek yatırım araçlarının getiri ve risklerine bakılarak portföy seçimi yapmak için geliştirilmiştir. Günümüzde de artan bir ivmeyle, yeni teoriler ve bilgisayar teknolojisini de kullanarak uygulanmaktadır.

Çalışmanın ikinci kısmında Markowitz portföy seçim modeli ve uygulamaları ile iligili literatür sunulmuştur. Üçüncü kısımda kuadratik programlama formundaki Markowitz modeli matematiksel olarak gösterilmiştir. Ayrıca endeksi risk-getir yapısıyla temsil eden portföyü belirleyecek modifiye edilmiş Markowitz modeli de bu kısımda matematiksel olarak gösterilmiştir. Dördüncü kısımda modelin İMKB 30 endeksi üzerinde uygulaması yapılmıştır. Bu kısımda gerekli veri toplanmış, model kurulmuş ve çözümler elde edilerek portföyler ve etkin sınır elde edilmiştir. Çalışmanın son kısmında sonuçlar yorumlanarak potansiyel yeni çalışma alanları vurgulanmıştır.

1. İLGİLİ LİTERATÜR

Markowitz'in 1952 makalesinde ilk defa yayınlayıp, daha sonra kitap haline getirdiği (Markowitz, 1959) ortalama-varyans optimizasyonu modern portföy teorisinin başlangıcı olarak kabul edilir. Bu ilk model, ortalamalar vektörü μ ve kovaryanslar matrisi C ye sahip n adet menkul kıymet içeriyordu. Modelin içerdiği x portföyü ise elde tutulan menkul kıymetlerin vektörüdür ve vektörün bileşenleri toplamı bire eşittir. Menkul kıymetlerin beklenen getiri ve varyansları, $\mu^T x$ ve $x^T Cx$ olarak ifade edilir. Doğrusal kayıtlamalar kümesi altında, etkin sınırlar maximum beklenen getirisi ve minimum varyansı olan portföyler kümesidir. Ayrıca, bu model 0 dan sonsuza değişen bir γ parametresine bağlı olarak parametrik yapıda da ifade edilmiştir.

Daha sonraki formülasyonlara, işlem maliyetlerini de içermesi için $d^T x$ doğrusal ifadesi de eklenmiştir (Pogue, 1970).

n adet beklenen getiri ve n(n+1)/2 adet varyans-kovaryansı hesaplamak bu analizin en güç yanlarından birisidir. Bu nedenle, faktör ve/veya indeks modelleri geliştirilmiştir (Sharpe, 1970; Cohen ve Pogue; 1967, Rosenberg, 1974). Ayrıca senaryo modelleri (Markowitz ve Perold, 1981a) ve çoklu grup modelleri (Elton ve Gruber, 1973) üzerinde çalışılan konular olmuştur.

Markowitz'in portföy seçim modeli, pratikte uygulanabilir olabilmesi için gerçek hayat koşullarını da içerecek şekilde geliştirilmiştir. Bu alanda Pogue'nin (Pogue, 1970) işlem maliyetleri, kısa satışlar borçlanma politikaları ve vergileri de kapsayan çalışması, modelin gerçekçi yapıya sokulmasını iyi ifade ettiği için önemlidir. Yine, Francis'in (Francis, 1978) bankaların aktif-pasif yönetiminde portföy analizini incelediği makalesi de, Markowitz portföy analizinin banka sistemi içinde uygulanabilirliği üzerine anlamlı bir çalışmadır.

Modelin çözümü için gereken algoritmalar ise, parametrik olarak etkin sınırı bulan Markowitz (1956) ve Wolfe (1959)'un "bütünleştirici pivot" algoritmalarıyla başlamıştır. Modeli basitleştirip çözen algoritmalardan birisi, iteratif bir metod olan Von Hohenbalken (1975) algoritmasıdır. Ancak bu algoritma ve bundan türetilmiş diğer algoritmalar (Rudd ve Rosenberg, 1979) oldukça iyi bir yaklaşık sonuç vermesine karşın optimum çözüme ulaşmada çok yavaş kalmaktadırlar ve parametrik değildirler. Markowitz ve Perold'un (1981) ve Perold'un (1984) algoritmaları ise kovaryans matrisinde faktör ve senaryo modelleri kullanır, işlem maliyetlerini ve sınırlarını içerir, ayrıca parametrik çözüme imkan tanır bir yapıdadır. Ancak bu çözüm tekniklerinin tümü simpleks kökenli algoritmalardır.

Üzerinden 50 yıl geçmesine rağmen yatırım planlamasında halen en kullanışlı ve popüler sayısal yöntem Markowitz'in ortalama-varyans modelidir. Bu metodoloji uygulamada ve teoride hala geliştirilmektedir (King, 1993; Konno ve Yamazaki, 1991; Markowitz ve diğerleri, 1993). Geliştirmeler, yukarıda değinildiği gibi gerçek hayatı daha iyi ifade eden yeni kısıtların eklenmesi şeklinde ve bunun yanısıra, çok dönemli optimizasyon ve simetrik olmayan risklerin modele eklenmesi şeklinde de yapılmaktadır.

2. KUADRATİK PROGRAMLAMA MODELİ VE BU MODELİN ENDEKSİ TEMSİL EDEN PORTFÖYÜ OLUŞTURMAK İÇİN GELİŞTİRİLMİŞ HALİ

Markowitz geliştirdiği standart kuadratik programlama formundaki ortalama-varyans modeli, hedeflenen beklenen getiri düzeyini karşılayacak minimum varyanslı (minimum riskli) portföyü bulmaya çalışır. Modelde amaç fonksiyonu, minimize edilecek portföy varyansıdır ve şu şekilde gösterilir.

$$\text{Min.} \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

Bu matematiksel ifadede, N : mevcut varlık sayısını, σ_{ij} : i ve j varlıkları arasındaki kovaryans değerini (i = 1,..,N), (j = 1,..,N), x_i : karar değişkenlerini göstermek için kullanılmıştır.

Standart Markowitz modelinde iki temel kısıt vardır. Bunlardan birincisi, hedeflenen beklenen getiri düzeyinin karşılanmasını sağlayacak aşağıdaki matematiksel ifadedir.

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i \geq R$$

Burada μ_i : i varlığının beklenen getirisini (i = 1,..,N), R : hedeflenen beklenen getiri düzeyini göstermek için kullanılmıştır. Modeldeki ikinci temel kısıt ise, portföyde bulunan varlıkların ağırlıkları toplamının 1 olmasını sağlayan aşağıdaki ifadedir.

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

Karar değişkenlerinin negatif olamama kısıtı da eklendiğinde aşağıdaki genel model elde edilir.

$$\text{Min.} \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i \geq R$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1,..,N$$

Burada,

N mevcut varlık sayısı,

μ_i i varlığının beklenen getirisi (i = 1,..,N),

σ_{ij} i ve j varlıkları arasındaki kovaryans değeri (i = 1,..,N), (j = 1,..,N), i = j için i varlığının varyans değeri,

R hedeflenen beklenen getiri düzeyi,

x_i i varlığının portföy içindeki oranıdır, (karar değişkeni) (i = 1,..,N).

Standart Markowitz modelindeki n. yatırım enstrümanını endeks olarak alıp, diğer n-1 yatırım enstrümanından endeksle risk ya da getiri düzeyi aynı olan portföyü oluşturmak için, modeli aşağıdaki değişiklikleri içerecek şekilde geliştirilmiştir.

Amaç fonksiyonunda halen n adet enstrümanın (sonuncusu endeks) riskini minimize etmektedir ve değiştirilmemiştir.

Standart modeldeki ilk temel kısıt olan ve hedeflenen beklenen getiri düzeyinin karşılanmasını sağlayan $\sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i \geq R$ kısıtı, n enstrüman yerine n-1 enstrüman için beklenen getiri düzeyi de n. enstrümanın beklenen getiri düzeyi olarak alınıp $\sum_{i=1}^{N-1} x_i \mu_i = \mu_N$ şeklinde yeniden düzenlenecektir. Böylelikle, n-1 adet yatırım enstrümanı arasından oluşturulacak portföyden elde edilecek getirinin endeksin beklenen getirisinin altında kalmaması sağlanacaktır.

Portföyde yer alan varlıkların ağırlıkları toplamının 1 olmasını sağlayan modeldeki ikinci temel kısıt da, n enstrüman yerine n-1 enstrüman içereceğinden, $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$ kısıtı, $\sum_{i=1}^{N-1} x_i = 1$ olarak değişecektir.

Amaç fonksiyonunda riski minimize edilen n adet enstrümandan, n-1 tanesinin ağırlıkları toplamı 1 olarak yukarıda kısıtta tanmılandıktan sonra, n. enstrüman olan endeksin de bu n-1 enstrümana ağırlık olarak karşı gelmesi için $x_N = -1$ kısıtının modele eklenmesi gerekmektedir. Böylece x_N değişkeni diğer değişkenlerin aksine sınırsız olarak tanımlanacaktır. Diğer bir değişle, x_N üzerinde negatif olamama kısıtı bulunmayacaktır. Yapılan değişiklik ve eklemeleri içeren kuadratik programlama modeli aşağıda görülmektedir.

$$\text{Min.} \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{N-1} x_i \mu_i = \mu_N$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} x_i = 1$$

$$x_N = -1$$

$$x_N \text{ sınırsız}$$

$$0 \le x_i \le 1, \quad i = 1,..,(N-1)$$

Burada,

N mevcut varlık sayısı,

μ_i i varlığının beklenen getirisi (i = 1,..,N),

σ_{ij} i ve j varlıkları arasındaki kovaryans değeri (i = 1,..,N), (j = 1,..,N), i = j için i varlığının varyans değeri,

x_i karar değişkenleri, varlığın portföy içindeki oranıdır. ($0 \le x_i \le 1$), (i=1,..,(N-1))

x_N Karşılaştırılacak varlığın portföydeki oranı. –1 sabit değerini almalıdır.

μ_N Karşılaştırılacak varlığın(endeksin) beklenen getirisidir.

Bir sonraki kısımda, yukarıda açıklanan modelin İMKB30 endeksi ve onu oluşturan hisse senetleri üzerinde uygulaması yapılacaktır.

3. UYGULAMA VE BULGULAR

Çalışmanın uygulama bölümünde İMKB30 endeksi ile risk-getiri yapısı aynı olan portföy belirlenecektir. Bunun için bir önceki kısımda sunulan modelde kullanılacak veri toplanmıştır. Öncelikle İMKB 30 endeksini oluşturan şirketlerin ve İMKB30 endeksinin Ağustos 1999 – Eylül 2003 arasındaki aylık getirileri belirlenmiştir. Böylece 30 hisse senedinin ve İMKB30 endeksinin toplam 50'şer aylık getiri değerleri elde edilmiştir.

Markowitz kuadratik programlama ile portföy seçim modelini çözmek için MS Excel hesap tablosu yazılımı içinde yer alan Solver eklentisi kullanılmıştır. Aylık getiriler, modelin amaç fonksiyonu parametrelerini oluşturan varyans-kovaryans matrisi ve model Şekil 1'de görülmektedir.

	B	C	D	...	...	AE	AF	AG	AH
2	**AYLIK GETİRİ TABLOSU (Ağutos 1999 - Eylül 2003 arası)**								
3	**Getiriler**	**Hisse 1**	**Hisse 2**	**...**	**...**	**Hisse 29**	**Hisse 30**	**İMKB 30**	
4	**08.1999**	-0.244	0.038	...	...	-0.283		-0.180	
5	**09.1999**	0.128	-0.069	...	...	0.193		0.159	
:	:	:	:	...	...	:	:	:	
51	**07.2003**	-0.068	-0.094	...	...	-0.025	-0.013	-0.024	
52	**08.2003**	0.123	0.105	...	...	0.143	0.100	0.125	
53	**09.2003**	0.284	0.089	...	...	0.234	-0.058	0.146	
54	**Ortalama Getiriler**	*0.027*	*0.027*	...	...	*0.019*	*-0.011*	*0.013*	
55									
56	**VARYANS-KOVARYANS MATRİSİ**								
57		**Hisse 1**	**Hisse 2**	**...**	**...**	**Hisse 29**	**Hisse 30**	**İMKB 30**	
58	**Hisse 1**	0.054	0.036	...	...	0.043	0.033	0.043	
59	**Hisse 2**	0.036	0.051	...	...	0.034	0.042	0.039	
:	:	:	:	...	...	:	:	:	
:	:	:	:	...	...	:	:	:	
86	**Hisse 29**	0.043	0.034	...	...	0.048	0.038	0.041	
87	**Hisse 30**	0.033	0.042	...	...	0.038	0.067	0.041	
88	**İMKB 30**	0.043	0.039	...	...	0.041	0.041	0.043	
89									**Toplam Portföy Ağırlığı**
90	**Portföy Ağırlıkları**	**0%**	**0%**	**...**	**...**	**0%**	**0%**	**0%**	**100%**
91								**-100%**	
92		**Portföy Getirisi**	**0.0000**					**Portföy Varyansı**	**0.0000**
93		**Hedeflenen Getiri**	**0.0131**					**Standart Sapma**	**0.0000**

Şekil 1. Excel'de Oluşturulan Model Ve Parametreleri

Modeldeki alan tanımlamaları ve kullanılan formüller Tablo 1'de, Solver parametreleri de Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 1. Modeldeki Alan Tanımlamaları Ve Kullanılan Formüller

Aralık	Tanım
C54:AG54	Ortalama Getiriler
C58AG88	Varyans-Kovaryans Matrisi
C90:AG90	Karar Değişkenleri, Varlıkların Portföydeki Payı
AH90	Portföy Ağırlıkları toplamı
D92	Portföy Getirisi
D93	Hedeflenen Getiri
AH92	Portföy Varyansı
AH93	Portföy Standart Sapması

Hücre	Formül
C54	=AVERAGE(C4:C53) C54:AG54 aralığına kopyalanmıştır
C58	=COVAR($C$4:$C$53;C4:C53) C58:AG58 aralığına kopyalanmıştır
C88	=COVAR($AG$4:$AG$53;C4:C53) C88:AG88 aralığına kopyalanmıştır
AH90	=SUM(C90:AF90)
D92	=SUMPRODUCT(C54:AF54;C90:AF90)
AH92	=SUMPRODUCT(MMULT(C90:AG90; C58:AG88);C90:AG90)
AH93	=SQRT(AH92)

Tablo 2. Solver Parametreleri

Quadratik programlama formundaki modelin çözülmesi ile İMKB30 endeksi ile aynı risk ve getiri düzeyine sahip portföy elde edilmiştir. Elde edilen

Amaç Fonksiyonu	Karar Değişkenleri	Kısıtlar
Min. $AH$92	$C$90:$AG$90	$AG$90=$AG$91 $AH$90=1 $C$90:$AF$90>=0 $D$92=$DG$93

portföy içerisindeki hisse senetlerinin ağırlıkları Tablo 3'de görülmektedir.

Tablo 3. İMKB 30 Endeksi İle Aynı Risk Ve Getiri Düzeyine Sahip Portföy Ağırlıkları

H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10	
%12.9	-	-	-	-	-	-	-	-	*%3.6*	
H11	**H12**	**H13**	**H14**	**H15**	**H16**	**H17**	**H18**	**H19**	**H20**	
-	-	-	*%7.5*	*%3.1*	*%7.2*	-	-	-	*%7.2*	
H21	**H22**	**H23**	**H24**	**H25**	**H26**	**H27**	**H28**	**H29**	**H30**	**Toplam**
-	*%1.4*	-	*%11.6*	*%12.5*	-	*%2.0*	*%13.6*	*%1.9*	*%15.3*	*%100*

Tablodan görüldüğü gibi portföyde 13 hisse senedi çeşitli ağırlıklarla yer almaktadır. Portföyün beklenen getirisi İMKB 30 endeksinin 50 aylık ortalama getirisi olan %1.3'dür. Portföy riski ise İMKB 30 endekisinin 50 aylık verisinin varyans değeri olan 0.0459'dur.

Yukarıda ağırlıkları elde edilmiş olan portföyü oluşturan karar verici, risk-getiri yapısıyla İMKB 30 endeksini temsil eden portföye sahip olacaktır. Ancak bu portföye sahip olmak en iyi yatırım kararının verildiği anlamına gelmemektedir. Karar verici aynı risk düzeyinde daha yüksek getirili, ya da aynı getiri düzeyinde daha düşük riskili bir portföy oluşturabilir. Uygulamanın ikinci kısmında standart Markowitz portföy seçim modeli kullanılarak İMKB 30 hisselerinden oluşan yatırım uzayı için etkin sınır oluşturulacaktır. Ardından sırasıyla yukarıda elde edilen portföy ile aynı risk düzeyine sahip etkin portföy ve aynı getiri düzeyine sahip etkin portföy belirlenecektir.

Şekil 1'deki modelden İMKB 30 endeksi getirileri çıkartılarak, kalan 30 hisse senedi için standart Markowitz kuadratik programlama portföy seçim modeli kurulmuştur. Kurulan yeni modeli Solver'da çözmek için gereken parametreler Tablo 4'de görülmektedir.

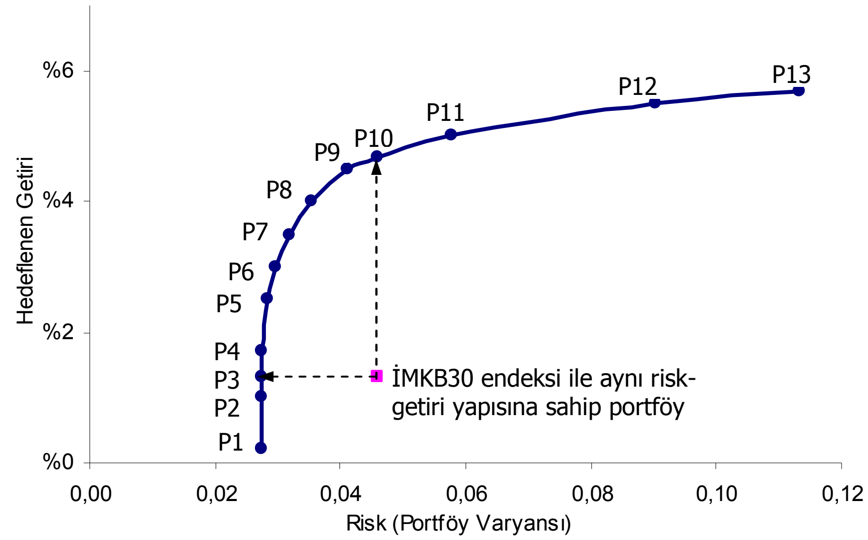
Tablo 4. Standart Markowitz Modeli İçin Solver Parametreleri

Amaç Fonksiyonu	Karar Değişkenleri	Kısıtlar
Min. $AH$92	$C$90:$AF$90	$AH$90=1 $C$90:$AF$90>=0 $D$92>=$DG$93

Oluşturulan model farklı hedeflenen getiri düzeyleri için çözülmüş ve Tablo 5'de görülen etkin portföyler belirlenmiştir. Tabloda sadece portföylerde çeşitli ağırlıklarla yer alan 9 hisse senedi gösterilmiştir. Tabloda görünmeyen hisse senetleri hiç bir etkin portföyde yer almayanlardır. Bu portföylerin risk-getiri değerleri kullanılarak elde edilen etkin sınır grafiği de Şekil 2'de görülmektedir. Bu grafik üstünde İMKB 30 endeksini risk-getiri yapısı ile temsil eden portföy de görülmektedir.

Tablo 5. İMKB 30'daki Hisse Senetlerini İçeren Yatırım Uzayı için Etkin Sınır ve Portföy Ağırlıkları

Etkin Portföyler	Hedeflenen Getiri	Portföy Varyansı	Hisselerin Portföydeki Ağırlıkları								
			H1	H7	H8	H10	H12	H14	H21	H22	H26
Portföy1	%0.20	0.0276	-	-	*%16*	-	-	*%46*	*%16*	*%02*	*%19*
Portföy2	%1.00	0.0276	-	-	*%16*	-	-	*%46*	*%16*	*%02*	*%19*
Portföy3	**%1.31**	**0.0276**	-	-	*%16*	-	-	*%46*	*%16*	*%02*	*%19*
Portföy4	%1.70	0.0276	-	-	*%16*	-	-	*%46*	*%16*	*%02*	*%19*
Portföy5	%2.50	0.0284	-	-	*%19*	-	-	*%24*	*%30*	-	*%27*
Portföy6	%3.00	0.0298	-	-	*%21*	-	-	*%10*	*%38*	-	*%32*
Portföy7	%3.50	0.0319	*%01*	-	*%15*	*%01*	-	-	*%50*	-	*%34*
Portföy8	%4.00	0.0353	-	-	-	*%15*	-	-	*%57*	-	*%28*
Portföy9	%4.50	0.0411	-	-	-	*%38*	*%01*	-	*%60*	-	-
Portföy10	**%4.69**	**0.0459**	-	*%09*	-	*%44*	*%04*	-	*%44*	-	-
Portföy11	%5.00	0.0578	-	*%27*	-	*%50*	*%04*	-	*%19*	-	-
Portföy12	%5.50	0.0904	-	*%74*	-	*%26*	-	-	-	-	-
Portföy13	%5.70	0.1134	-	*%100*	-	-	-	-	-	-	-



Şekil 2. Etkin Sınır Grafiği Ve İMKB 30 Endeksi İle Aynı Risk-Getiri Yapısına Sahip Portföyün Bu Grafikteki Yeri

Şekil 2 incelendiğinde İMKB 30 endeksi ile aynı risk-getiri yapısına sahip portföyün getirisi sabit kalmak şartıyla daha düşük riskili bir etkin portföy bulunmuştur (Portföy 3). Portföy 3'ün riski 0.0276'dır. Aynı şekilde İMKB 30 endeksi ile aynı risk-getiri yapısına sahip portföyün riski sabit kalmak şartıyla daha yüksek getirili bir etkin portföy bulunmuştur (Portföy 10). Portföy 10'un getirisi %4.69'dur.

4. SONUÇ VE YENİ ÇALIŞMALAR

Bu çalışmada, Markowitz kuadratik programlama ile portföy seçim modelinin İMKB 30 endeksinde yer alan şirketler üzerinde uygulamaları yapılmıştır. Bilgisayar teknolojisi ve model çözüm algoritmalarında sağlanan ilerlemeler Markowitz modelinin yaygın olarak uygulanmasını mümkün kılmıştır. Günümüzde büyük ölçekli portföy seçim modelleri tüm dünya piyasaları için çözülebilmektedir.

Çalışmanın ilk aşamasında kuadratik programlama formundaki standart Markowitz portföy seçim modeli, İMKB 30 endeksi ile aynı risk-getiri yapısındaki portföyü oluşturacak şekilde modifiye edilmiştir. İMKB 30 endeksini oluşturan şirketlerin Ağustos 1999- Eylül 2003 arasındaki 50 aylık getirileri hesaplanmış ve bu veri kullanılarak ortalama getiriler ve varyans-kovaryans matrisi elde edilmiştir. Ardından kuadratik formdaki Markowitz portföy seçim model Excel üzerinde kurulmuş ve Solver ile çözülmüştür. Bu çözüm ile elde edilen portföy içerisinde 13 şirket çeşitli portföy ağırlıkları ile yer almıştır. (Tablo 3)

İkinci aşamada standart kuadratik programlama modeli kullanılarak İMKB 30 endeksi ile aynı getiri düzeyinde daha düşük riskli portföy ağırlıkları bulunmuştur. Son olarak da standart kuadratik programlama modeli kullanılarak İMKB 30 endeksi ile aynı risk düzeyinde daha yüksek getirili portföy ağırlıkları bulunmuştur.

Bu çalışmada oluşturulan modeller yardımıyla sermaye piyasalarında portföy oluşturmak durumunda olan karar vericiye yukarıda özetlenen üç ayrı strateji için destek sağlanmıştır. Ayrıca çalışma ile karmaşık matematiksel altyapısı olan portföy seçim modelinin Excel ve Solver kullanılarak hızlı ve etkin bir biçimde çözülebileceği de gösterilmiştir.

Standart Markowitz modeline $x_N = -1$ kısıtı eklenmesi ile model ilk n-1 yatırım enstrümanından, n. enstrümanın risk-getiri yapısında portföy oluşturuyordu. Bu kısıt $x_N = 1$ olarak değiştirildiğinde ise n. enstrümanın risk yapısının tersine sahip ve riskten kaçınma (hedging) sağlayan portföy, ilk n –1 enstrüman içerisinden oluşturulur. Bu da başka bir uygulama çalışması konusu olarak alınabilir.

Ayrıca bundan sonraki çalışmalarda, portföyde istenen en fazla enstrüman sayısı (tamsayı değişkenler kullanılarak), kredi kullanarak yatırım yapmak gibi gerçek hayat koşulllarıda standart Markowitz portföy seçim modeline dahil edilerek piyasalarımız için uygulamalar yapılabilir. Öte yandan, sadece 50 aylık veri ile kurulup çözülen model, farklı dönemler için hazırlanıp dinamik bir yapıda sonuçların değişimi izlenebilir.

KAYNAKÇA

Cohen, K. J. ve J. A. Pogue (1967), "An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio Selection Models", *Journal of Business,* 40, 166-93.

Elton, E. J. ve M. J. Gruber (1973), "Estimating the Dependence Structure of Share Prices-Implications for Portfolio Selection", *Journal of Finance,* 28, 1203-32.

Francis, J. C. (1978), "Portfolio Analysis of Small, Medium, and Large Sized Banks", *Journal of Monetary Economics*, 4, 459-480.

King, A. (1993), "Assymetric Risk Measures and Tracking Models for Portfolio Optimization Under Uncertainty", *Annals of Operations Research*, 45, 165-78.

Konno, H. ve H. Yamazaki (1991), "Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Application to Tokyo Stock Market", *Management Science,* 37, 519-31.

Markowitz, H. (1952), "Portfolio Selection", *Journal of Finance,* 7, 77-91.

Markowitz, H. (1956), "The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints", *Naval Research Logistics Quarterly,* 3, 111-33.

Markowitz, H. (1959), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley, New York.

Markowitz, H. ve A. F. Perold (1981), "Portfolio Analysis with Factors and Scenarios", *Journal of Finance*, 36, 14.

Markowitz, H. G. Yu, Y. Yamane (1993), "Computation of Mean-Semivariance Efficient Sets by the Critical Line Algorithm", *Annals of Operational Research,* 45, 307-17.

Perold, A. F. (1984), "Large Scale Portfolio Optimization", *Management Science,* 30, 1143-60.

Pogue, G. A. (1970), "An Extension of the Markowitz Portfolio Model to Include Variable Transactions Costs, Short Sales, Leverage Policies and Taxes", *Journal of Finance,* 25, 1005-28.

Rosenberg, B. (1974), "Extra Market Components of Covariance in Security Returns", *Journal of Financial and .Quantitative Analysis,* 9, 263-73.

Rudd, A. ve Rosenberg, B. (1979), "Realistic Portfolio Optimization", *TIMS Studies in Management Science*, 11, 21-46.

Sharpe, W.F. (1967), "Portfolio Analysis", *Journal of .Financial and Quantitative Analysis,* 2, 76-84.

Sharpe, W.F. (1970), *Portfolio Theory and Capital Markets*, Mc Graw Hill: New York.

Sharpe, W.F. (1971), "A Linear Proggramming Approximation for the General Portfolio Analysis Problem", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 1263-75.

Wolfe, P. (1959), "The Simplex Method for Quadratic Programming", *Econometrica*, 27, 382-98.